



1.7 Analizzatori di spettro numerici

Lo strumento comunemente utilizzato per effettuare l’analisi in frequenza è l’analizzatore di spettro FFT che è in grado di effettuare i calcoli numerici necessari per eseguire la trasformata di Fourier a partire da un segnale temporale discretizzato.

Sebbene i calcoli richiesti siano la ripetizione di semplici operazioni matematiche, qualora aumenti il numero di dati sui quali si deve operare la pesantezza computazionale diviene elevata. Nel 1965 due ricercatori (Cooley e Tuckey) ridussero drasticamente il numero di operazioni matematiche richieste per eseguire la trasformata di Fourier attraverso lo sviluppo di algoritmo che oggi passa sotto il nome di Fast Fourier Transform (FFT).

Per renderci conto di quale sia l’ammontare del risparmio di operazioni tra la trasformata “classica” e quella “veloce” assumiamo che segnale temporale in osservazione sia composto da N campioni. Utilizzando il metodo convenzionale il numero di operazioni matematiche da effettuare è pari a N^2 , usando l’algoritmo FFT il costo computazionale è ridotto a $(N/2) \cdot \log_2 N$. Ciò non costituisce una grande differenza per N piccolo, ma non appena N cresce tale differenza diviene molto significativa come visibile nella seguente tabella:

| N | N^2 | $(N/2) \log_2(N)$ |
|------|---------|-------------------|
| 32 | 1024 | 80 |
| 128 | 16384 | 448 |
| 1024 | 1048576 | 5120 |

La tecnica FFT quindi è stata una innovazione tecnologica particolarmente significativa ed è inutile affermare che essa abbia acquistato popolarità in una vasta serie di applicazioni.



L’analizzatore FFT presenta alcuni vantaggi rispetto agli analizzatori di tipo analogico tra cui:

- L’utilizzo di memoria digitale, caratteristica fondamentale della tecnica FFT, permette all’analizzatore di sostituire strumenti come oscilloscopi o registratori di forme d’onda.
- Una elevata risoluzione in frequenza e la possibilità di ottenere molte più linee spettrali dal medesimo segnale di quanto non si possa ottenere con tecniche analogiche e tutto ciò in un periodo di tempo molto più piccolo.
- La possibilità di ottenere precisamente, utilizzando un analizzatore multi canale, le relazioni in modulo e fase fra ingressi ed uscite.

Cominciamo ad introdurre i concetti fondamentali dell’FFT ed in particolare consideriamo alcune caratteristiche che sono importanti per capire l’analisi spettrale di un analizzatore basato sull’FFT.

1.7.1 Principi fondamentali dell’FFT

Un analizzatore numerico basa il suo principio di funzionamento sulla nota trasformata di Fourier discreta (DFT).

Per capire meglio le caratteristiche e le limitazioni di un analizzatore FFT per l’analisi spettrale è importante conoscere alcune proprietà della Trasformata Discreta di Fourier (DFT) e gli effetti del campionamento.



Si parte dal segnale analogico in ingresso $x(t)$ il quale viene campionato e convertito in forma numerica, dando origine ad una sequenza finita N di campioni. Tale sequenza, ossia il segnale tempo-discreto $x(nT)$ viene poi elaborato applicando la nota relazione che caratterizza le DFT:

$$X(kF) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT)e^{-j2\pi kFnt} \quad k=0,1,\dots,N-1$$

dove:

N = numero dei campioni

F = l'intervallo dei campioni nel dominio della frequenza

T = periodo di campionamento nel dominio del tempo

Questa espressione fornisce una versione campionata dello spettro del segnale, ossia restituisce i valori, in termini di modulo e fase che lo spettro assume in corrispondenza di determinate frequenze equispaziate. Ovvero, la DFT di una sequenza di durata finita può essere interpretata come campionamento in frequenza dello spettro della sequenza.

La possibilità di calcolare la DFT del segnale $x(nT)$ deriva dall'esistenza di un particolare algoritmo, noto come FFT (Fast Fourier Transform), che consente di calcolare la suddetta trasformata in modo estremamente efficiente, in particolare quando il numero N di campioni è una potenza di base 2: ad esempio, sono molte diffuse le FFT a 1024 punti, cioè il calcolo dello spettro di $x(t)$ in 1024 frequenze distinte.



L'intervallo dei campioni nel dominio della frequenza (o *bins*) della DFT è data dalla seguente relazione:

$$F = \frac{1}{NT} = \frac{F_s}{N}$$

dove:

F_s = frequenza di campionamento

Quindi da questa formula possiamo già notare che la risoluzione in frequenza può essere migliorata o aumentando il numero dei campioni N o decrementando la frequenza di campionamento F_s .

Il modulo della DFT è una funzione simmetrica di circa $N/2$ mentre la fase è una funzione simmetrica dispari.

L'analizzatore numerico plotta solamente la prima metà dei punti N della FFT.

La frequenza di un particolare punto FFT, k , è data da:

$$F_k = \frac{kF_s}{N}$$

La massima frequenza plottata è $F_k = F_s/2$, dove $k = N/2$

La DFT è una funzione esponenziale complessa dalla quale l'analizzatore di spettro calcola sia il modulo in *dBm* e sia la fase in gradi.



Ricordiamo che la conversione in dBm è data da:

$$P_{(dBm)} = 20 \log(V_{RMS} / V_{REF})$$

dove

$$V_{REF} = \sqrt{0.001 \text{ watts} * 50 \Omega} = 0.2236 \text{ volts}$$

è la tensione di riferimento definita come la tensione che produce 1 milliwatt di potenza su di una resistenza a 50Ω .

1.7.2 Effetti del campionamento

La trasformata di Fourier di un segnale analogico $x_a(t)$, è definita come:

$$X_a(F) = \int_{-\infty}^{\infty} x_a(t) e^{-j2\pi Ft} dt$$

Per ottenere una rappresentazione digitale $x(n)$ di un segnale analogico $x_a(t)$, un analizzatore numerico campiona il segnale ad un intervallo uniforme T :

$$x(n) = x_a(t) \Big|_{t=nT}$$

e si presume che la campionatura sia ideale tale da non sussistere tensioni di quantizzazione o altre distorsioni.

La trasformata di Fourier di questa sequenza a tempo discreto ideale è:

$$X(F) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a \left[\frac{1}{T} (FT + k) \right]$$



questa equazione mostra la relazione tra la trasformata di Fourier $X_a(F)$ del segnale continuo, e la trasformata di Fourier $X(F)$ della sequenza discreta nel tempo.

$X(F)$ è la somma di un numero infinito di $X_a(F)$ opportunamente traslate in frequenza.

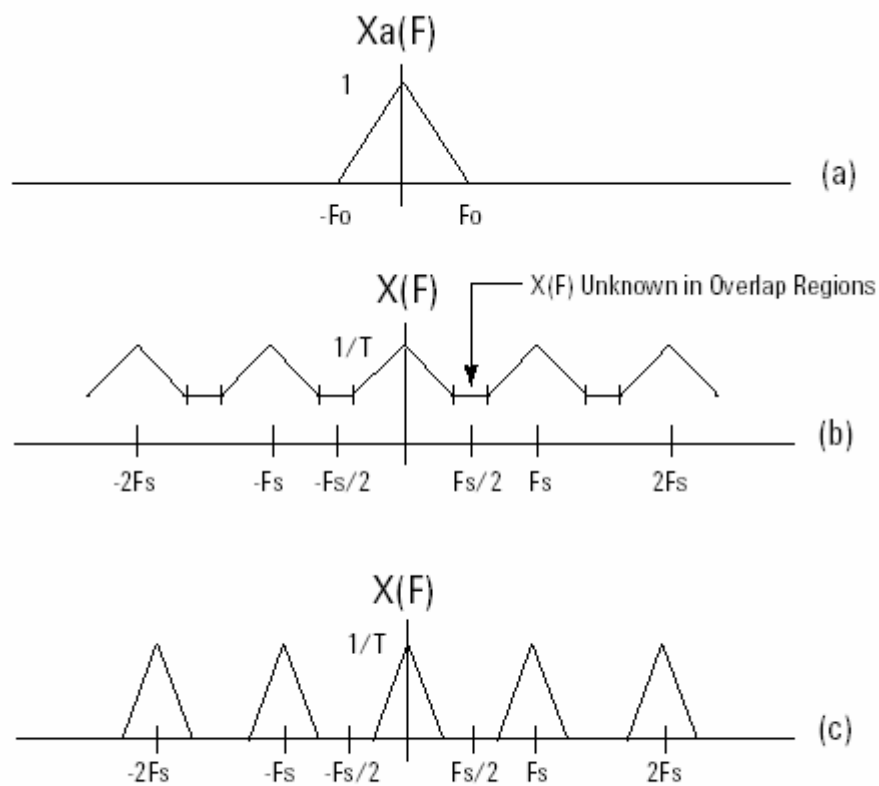


Figure 1. Fourier transform of (a) continuous signal, (b) discrete-time signal with overlap, and (c) discrete-time signal without overlap

La figura 1a mostra la trasformata di Fourier $X_a(F)$ di un segnale continuo. La figura 1b e 1c mostra la trasformata di Fourier $X(F)$ di due segnali tempo-discreti ottenuti da un diverso periodo di campionamento.



Vediamo che affinché la successione dei campioni conservi le informazioni del segnale originario (condizione indispensabile per poter risalire allo spettro dai dati campionati) il valore massimo di T deve rispettare il primo vincolo stabilito dal teorema del campionamento o condizione di Nyquist:

$$F_s = 1/T > 2B \Rightarrow T < 1/(2B)$$

dove B è la banda del segnale sotto analisi.

La figura 1b rappresenta lo spettro del segnale campionato nel caso che le repliche di $X_a(f)$ si sovrappongono (sottocampionamento), essendo non soddisfatta la condizione di Nyquist, tale fenomeno è chiamato *aliasing*, la figura 1c invece si riferisce al caso in cui tale condizione sia soddisfatta con un certo margine e che le repliche di $X_a(f)$ non si sovrappongono (sovracampionamento).

Una scelta errata della frequenza di campionamento del segnale, quindi può essere causa del verificarsi del fenomeno dell’aliasing, che consiste nella comparsa di segnali “fantasma” sul display.

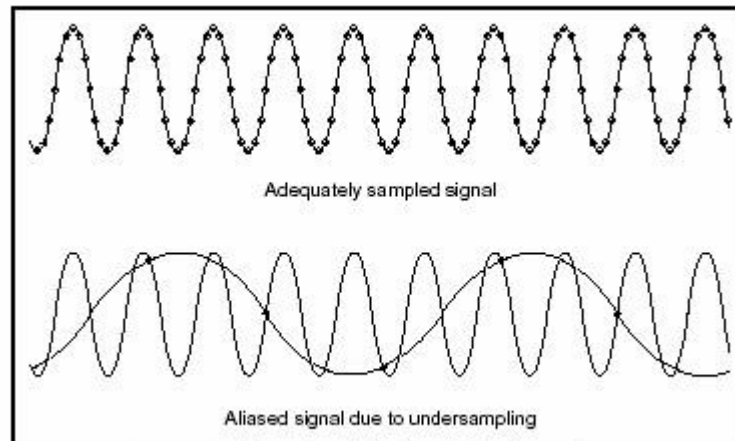
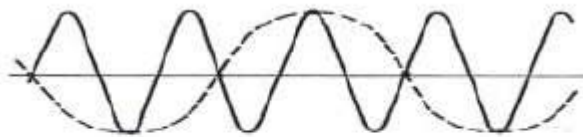


Figura 2 Adequate and Inadequate Signal Sampling



aliasing rappresentato nel dominio del tempo: la curva tratteggiata rappresenta il segnale a bassa frequenza che nasce ma che non fa parte del segnale originale

Ad esempio, una componente a frequenza

$$\frac{F_s}{2} < f_0 < F_s$$

dove F_s è la frequenza di campionamento appare come frequenza $F_s - f_0$

Nella figura seguente sono mostrate le frequenze “fantasma” che appaiono quando il segnale con le componenti a 25, 70, 160 e 510 Hz è campionato a 100 Hz.

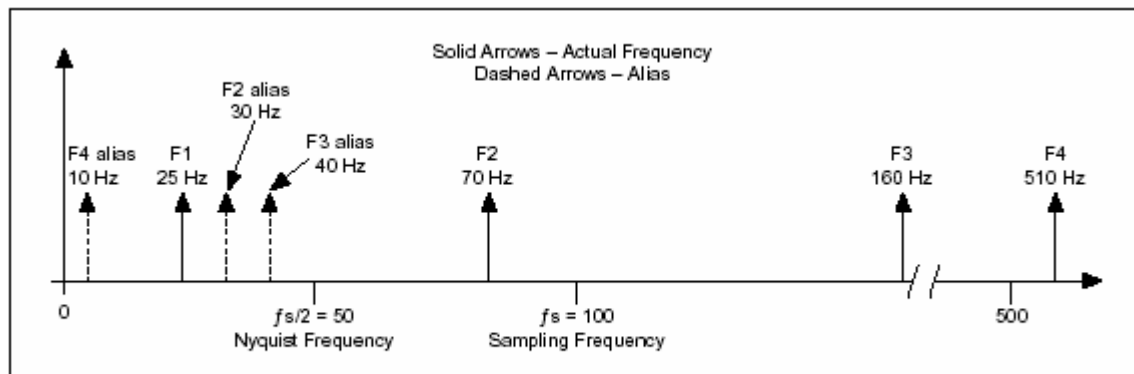


Figure 4. Alias Frequencies Resulting from Sampling a Signal at 100 Hz That Contains Frequency Components Greater than or Equal to 50 Hz

Le frequenze “fantasma” appaiono a 10, 30, e 40 Hz

Nella figura seguente mostriamo un altro esempio di due onde sinusoidali con frequenze di 3,3 MHz e 6,1MHz campionato da un analizzatore Infiniium dell’Agilent Technologies con frequenza di campionamento a 5MSa/s. Poiché entrambe le frequenze delle onde sinusoidali sono superiori alla frequenza max di 2,5 MHz (dato dal teorema del campionamento) abbiamo che la frequenza effettiva di 3,3 MHz è rappresentata dalla frequenza “fantasma” di 1,7 MHz mentre la frequenza effettiva di 6,1 MHz è rappresentata dalla frequenza “fantasma” di 1,1 MHz



Proprio per garantire che la condizione del teorema del campionamento possa essere verificata, viene inserito nell'analizzatore numerico un filtro "passa-basso" di ingresso: la sua frequenza di taglio, o stop-frequency, viene fissata a metà della frequenza massima di campionamento che permette di tagliare tutte le componenti al di sopra della metà della frequenza di campionamento, questo filtro prende appunto il nome di filtro anti-aliasing.

1.7.3 Aspetti computazionali della FFT

I calcoli di base per analizzare i segnali include la conversione dallo spettro a doppio lato al singolo lato, la regolazione della risoluzione in frequenza e tracciamento dello spettro usando la FFT, e la conversione della potenza in unità logaritmiche.

Lo spettro di potenza restituisce un array che contiene i 2 lati dello spettro del segnale.

I valori dell'array sono proporzionali al quadrato dell'ampiezza di ogni componente della



frequenza che costituisce il segnale nel dominio del tempo.

Le tracce dei 2 lati dello spettro mostrano le componenti negative e positive ad un'altezza di

$$\frac{A_k^2}{4}$$

dove A_k è l'ampiezza di picco della componente sinusoidale a frequenza k .

1.7.4 Conversione dal doppio al singolo lato dello spettro di potenza

La maggior parte degli strumenti per l'analisi in frequenza visualizzano solo la metà positiva dello spettro perché lo spettro reale di un segnale è simmetrico attorno alla componente continua DC, e quindi le informazioni delle componenti negative sono ridondanti.

In uno spettro a doppio lato, metà energia è contenuto nelle frequenze positive mentre l'altra metà è contenuto nelle frequenze negative. Quindi, per convertire dal doppio al singolo lato dello spettro della potenza bisogna scartare la seconda metà dell'array e moltiplicare ogni suo punto per 2 ad eccezione per la componente continua DC.

$$G_{AA}(i) = S_{AA}(i), i = 0 \text{ (DC)}$$

$$G_{AA}(i) = 2 \cdot S_{AA}(i), i = 1 \text{ to } \frac{N}{2} - 1$$

dove $S_{AA}(i)$ è il doppio lato dello spettro, $G_{AA}(i)$ è il singolo lato dello spettro, e N è la lunghezza del doppio lato dello spettro. Il resto dello spettro $S_{AA}(i)$ da $N/2$ a $N-1$ è scartato.

I valori ad eccezione della DC del singolo lato dello spettro sono ad un'altezza di

$$\frac{A_k^2}{2}$$



Questo è equivalente a

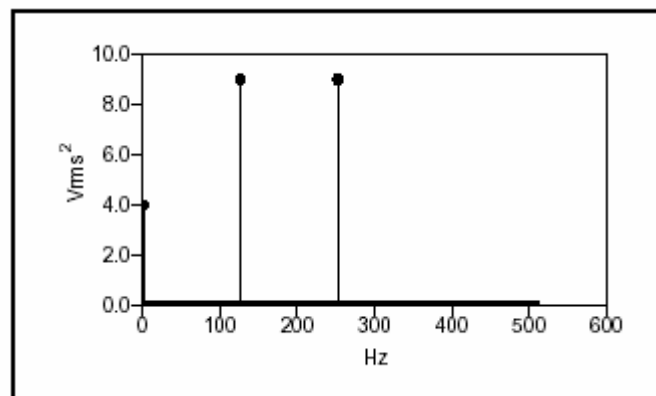
$$\left(\frac{A_k}{\sqrt{2}}\right)^2$$

dove

$$\frac{A_k}{\sqrt{2}}$$

è il valore efficace (rms) dell'ampiezza della componente sinusoidale a frequenza k.

Quindi, le unità dello spettro sono spesso riferite come quantità di valori rms del segnale nel dominio del tempo. Ad esempio, il singolo lato dello spettro di potenza del segnale di una forma d'onda in volt è in valore rms.



In figura si mostra il singolo lato dello spettro di un segnale composto da una onda sinusoidale di ampiezza $3 V_{\text{rms}}$ a 128 Hz, da un'onda sinusoidale di ampiezza $3 V_{\text{rms}}$ a 256 Hz, e da una componente continua di 2 Volt. L'onda sinusoidale di $3 V_{\text{rms}}$ ha una tensione di picco pari a $3.0 \cdot \sqrt{2} = 4,2426 \text{ V}$.



1.7.5 Regolazione della risoluzione in frequenza e grafico dello spettro

Il range della frequenza e la risoluzione sull'asse-x dello spettro dipende dalla frequenza di campionamento e dal numero di punti acquisiti. Il numero dei punti di frequenza o linee equivale a

$$\frac{N}{2}$$

dove N è il numero di punti acquisiti del segnale nel dominio del tempo.

Vediamo che in figura la prima linea di frequenza è a 0 Hz, cioè la DC. L'ultima linea di frequenza è a

$$\frac{F_s}{2} - \frac{F_s}{N}$$

dove F_s è la frequenza alla quale il segnale acquisito nel dominio del tempo è stato campionato. Le linee di frequenza accadono ad intervalli Δf dove

$$\Delta f = \frac{F_s}{N}$$

Le linee di frequenza possono anche essere chiamate come frequenze bins o FFT bins perché si può pensare di una FFT come un set di filtri paralleli di larghezza di banda Δf centrata ad ogni incremento di frequenza dalla componente continua DC fino alla frequenza

$$\frac{F_s}{2} - \frac{F_s}{N}$$



Alternativamente si può calcolare Δf come

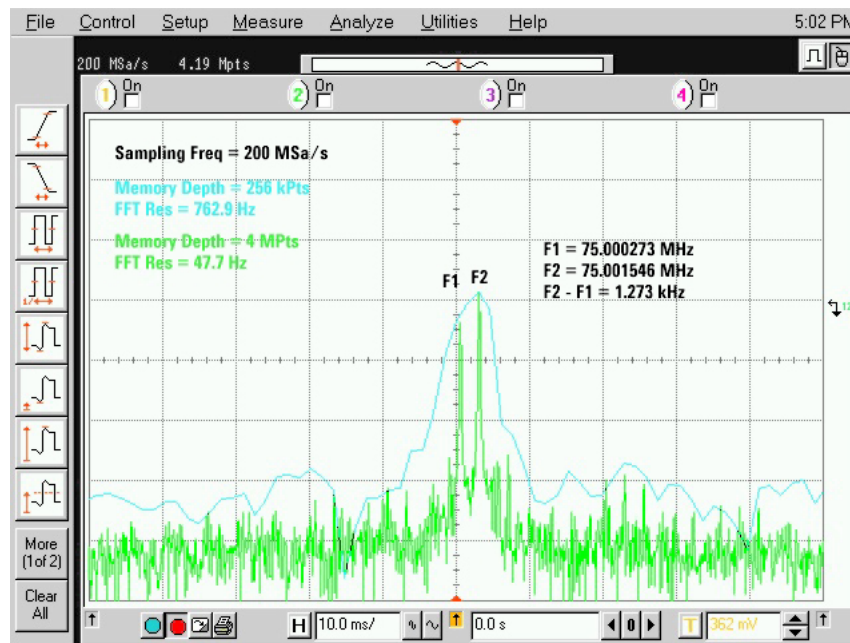
$$\Delta f = \frac{1}{N \cdot \Delta t}$$

dove Δt è il periodo di campionamento. Ovvero, $N \cdot \Delta t$ è la lunghezza del time record che contiene il segnale acquisito nel dominio del tempo. Il segnale in figura contiene 1024 punti campionato a 1024 kHz per ottenere una $\Delta f = 1$ Hz e un range di frequenze da DC a 511 Hz.

I calcoli per l’asse delle frequenze dimostrano che la frequenza di campionamento determina il range della frequenza o la larghezza di banda dello spettro e che per una data frequenza di campionamento il numero dei punti acquisiti nel dominio del tempo determina la risoluzione in frequenza. Per incrementare la risoluzione in frequenza per un dato range di frequenza, incrementiamo il numero dei punti acquisiti alla stessa frequenza di campionamento. Ad esempio, acquisendo 2048 punti a 1024 kHz avrebbero prodotto $\Delta f = 0,5$ Hz con range di frequenza 0 a 511,5 Hz. Alternativamente, se la frequenza di campionamento fosse stata di 10,24 kHz con 1024 punti, Δf sarebbe stato 10 Hz con un range di frequenza da 0 a 5,11 kHz.

Nella figura seguente mostriamo un altro esempio di uno spettro di un segnale prodotto da due onde sinusoidali che contengono frequenze quasi identiche $F1=75,000273$ MHz ed $F2=75,001546$ MHz

ottenuto con un analizzatore Infiniium Deep-Memory della Agilent Technologies:



La frequenza $\Delta=|F1-F2|=1,273$ kHz

La frequenza di campionamento è di 200 MSa/s maggiore di 150.003092 MHz (il doppio di F2). Ciò consente di rispettare il principio del campionamento e di prevenire quindi l'*aliasing*.

Con 256K punti (Deep Memory) la risoluzione è di 762,9 Hz e non sono sufficienti per rendere distinguibili i due segnali, mentre con 4M punti (Deep Memory) la risoluzione dell'FFT è di 47,7 Hz e gli spettri di entrambi i segnali sono chiaramente visibili.

Dobbiamo dire però che aumentando la Deep Memory otteniamo un maggiore tempo di calcolo.

Sappiamo infatti che la complessità degli algoritmi FFT cresce come $(N/2)*\log_2 N$



1.7.6 Calcoli computazionali usando la FFT

Lo spettro mostra la potenza come ampiezza quadratica media ad ogni linea di frequenza ma non include l'informazione di fase. Dato che lo spettro perde l'informazione di fase, possiamo usare l'FFT per visualizzare la frequenza e la fase del segnale.

L'informazione di fase prodotto dall'FFT è la fase relativa all'inizio del segnale nel dominio del tempo. Per questa ragione dobbiamo fare del *trigger* dallo stesso punto nel segnale per ottenere letture di fase fedeli. In molti casi, si vuole determinare la fase relativa tra componenti, o la differenza di fase tra due segnali acquisiti simultaneamente. Si può vedere la differenza di fase tra due segnali usando alcune funzioni FFT avanzate.

La FFT restituisce uno spettro a doppio lato in forma complessa (parte reale ed immaginaria), dalla quale bisogna convertirla in forma polare per ottenere il modulo e la fase. L'asse delle frequenze è identico a quello dello spettro di potenza a doppio lato. L'ampiezza della FFT è relativo al numero dei punti del segnale nel dominio del tempo. Si usa la seguente equazione per calcolare l'ampiezza e la fase dall'FFT.

$$\text{Spettro d'ampiezza in quantità di picco} = \frac{\text{Modulo [FFT(A)]}}{N} = \frac{\sqrt{|\text{real[FFT(A)]}|^2 + |\text{imag[FFT(A)]}|^2}}{N}$$

$$\text{Spettro della fase in radianti} = \text{Phase [FFT(A)]} = \text{arctangent}\left(\frac{\text{imag[FFT(A)]}}{\text{real[FFT(A)]}}\right)$$

dove la funzione arcotangente qui è restituita come valori di fase tra $-\pi$ e $+\pi$, a pieno range di 2π .



Lo spettro d'ampiezza a doppio lato effettivamente mostra metà di ampiezza di picco alle frequenze positive e negative. Per convertire alla forma del singolo lato, bisogna quindi moltiplicare ogni frequenza per 2 tranne per la componente continua e scartare la seconda metà dell'array. Le unità delle ampiezza del singolo lato dello spettro sono allora in quantità di picco e danno l'ampiezza di picco di ogni componente sinusoidale che costituisce il segnale nel dominio del tempo. Per la fase del singolo lato dello spettro, bisogna scartare la seconda metà dell'array.

Per vedere lo spettro d'ampiezza in volts (o un'altra quantità) rms, bisogna dividere le componenti, tranne che per la continua, per la radice quadrata di 2 dopo aver convertito lo spettro nella forma del singolo lato. Le equazioni seguenti mostrano il calcolo intero da una FFT a doppio lato ad un singolo lato dello spettro d'ampiezza.

$$\begin{aligned} \text{Amplitude spectrum in volts rms} &= \sqrt{2} \cdot \frac{\text{Magnitude[FFT(A)]}}{N} \text{ for } i = 1 \text{ to } \frac{N}{2} - 1 \\ &= \frac{\text{Magnitude[FFT(A)]}}{N} \text{ for } i = 0 \text{ (DC)} \end{aligned}$$

dove i è il numero delle linea di frequenza (indice dell'array) dell'FFT di A.

Per vedere lo spettro di fase in gradi, si usa la seguente equazione.

$$\text{Phase spectrum in degrees} = \frac{180}{\pi} \cdot \text{Phase FFT(A)}$$



1.7.7 La conversione in unità logaritmica

Spesso, nella maggior parte, l'ampiezza o lo spettro di potenza sono mostrati in unità logaritmiche o decibel (dB). Usando questa unità di misura, è facile far vedere la larghezza del range dinamico., ovvero, è facile vedere componenti di piccolo segnale rispetto a quelli grandi.

Il decibel è un'unità di rapporto ed è calcolato come segue:

$$\text{dB} = 10 \log_{10} P/P_r$$

dove P è la potenza misurata e P_r è la potenza di riferimento.

Si usa la seguente equazione per calcolare il rapporto in decibels dai valori d'ampiezza:

$$\text{dB} = 20 \log_{10} A/A_r$$

dove A è l'ampiezza misurata ed A_r è l'ampiezza di riferimento.

Quando si usa l'ampiezza o la potenza come il quadrato dell'ampiezza dello stesso segnale, il livello in decibel è esattamente lo stesso. Moltiplicando il rapporto in decibel per 2 è equivalente ad avere il quadrato del rapporto. Quindi, si ottiene lo stesso livello in decibel nonostante si usi l'ampiezza o lo spettro di potenza.

Una convenzione comune è usare come riferimento 1 V_{rms} per l'ampiezza. In questo caso, 1 V_{rms} corrisponde a 0 dB. Altre forme comuni di dB è il dBm, il quale corrisponde al riferimento di 1 mW.



1.7.8 Limitazione d'acquisizione del Front End

Proprio per garantire che la condizione del teorema del campionamento possa essere verificata, viene inserito nello strumento un filtro "passa-basso" di ingresso: la sua frequenza di taglio, o *stop-frequency*, viene fissata a metà della frequenza massima di campionamento, che permette di tagliare tutte le componenti al di sopra della metà della frequenza di campionamento; questo filtro prende appunto il nome di filtro anti-aliasing.

Nella figura che segue si mostra la risposta in frequenza di un filtro antialiasing dell'analizzatore PCI-4450 Family della National Instruments:

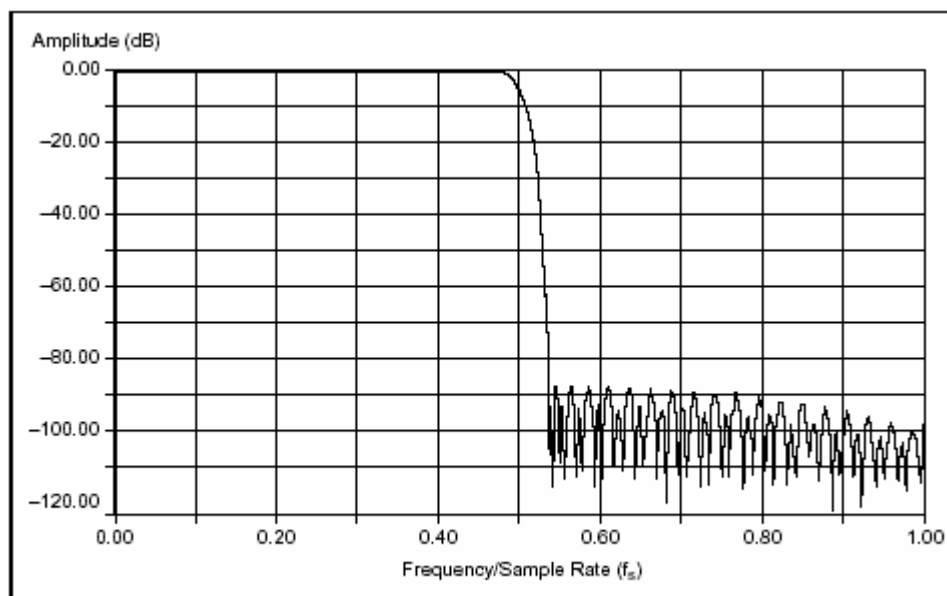


Figure 5. Bandwidth of PCI-4450 Family Input Versus Frequency, Normalized to Sampling Rate



Si nota come un segnale d’ingresso al di sopra della metà della frequenza di campionamento è fortemente attenuato.

Notiamo, che oltre a ridurre le componenti di frequenza che sono al di sopra della metà della frequenza di campionamento, nel filtro si presenta una limitazione di larghezza di banda per la non idealità dello stesso filtro.

I filtri antialiasing attenuano solo una percentuale di frequenze al di sotto della metà della frequenza di campionamento. Per questo motivo per calcolare la larghezza di banda o i numeri di linee per una data frequenza di campionamento, si moltiplica la frequenza di campionamento stessa per 0,464 (nel caso della famiglia PCI-4450 della National Instruments) ottenendo uno spettro di 475 linee di ampiezza $\pm 0,1$ dB con una FFT a 1024 punti.

Se invece utilizziamo una FFT a 2048 punti otteniamo il doppio delle linee e quindi una maggiore risoluzione in frequenza, c’è però da dire che questo è in contrasto con i tipici strumenti, i quali hanno 400 o 800 linee massimo per una FFT di 1024 punti o di 2048 punti rispettivamente.

1.7.9 Range dinamico

Il range dinamico può essere definito come l’intervallo massimo nel quale può variare il segnale di ingresso.

Per esempio, se l’uscita di un determinato trasduttore varia fra un minimo di 1mV e un massimo di 1V il range dinamico del segnale è di 60 dBm.



$$20 \log_{10} \frac{V_{\max}}{V_{\min}} \quad [dBm]$$

Il range dinamico di uno strumento di misura deve essere più grande del range dinamico del segnale di ingresso e questo per assicurare una elevata accuratezza di analisi di tutto il segnale; nel caso specifico la dinamica dell’analizzatore di spettro deve essere maggiore di 60dBm (1/1000).

Il range dinamico di un analizzatore di spettro è una misura dell’ampiezza del rapporto (V_{\max}/V_{\min}) dello spettro creato da un segnale sinusoidale applicato in ingresso. Perciò maggiore è il numero di bit del convertitore A/D maggiore sarà la dinamica dello strumento.

In figura seguente si mostra lo spettro di un segnale sinusoidale puro a 470 MHz prodotto dall’analizzatore di spettro Infiniium FFT dell’Agilent Technologies. Si notano le armoniche a 940 MHz, 1410 MHz, e 1880 MHz che sono al di sotto della metà della frequenza di campionamento a 4 GHz, mentre la linea a 1650 MHz è una frequenza aliasing (fantasma) del segnale d’ingresso a 470 MHz. Si nota anche la frequenza di clock interno a 125 MHz. Il range dinamico tra la frequenza fondamentale a 470 MHz e la più grande delle armoniche è di 51 dBm.

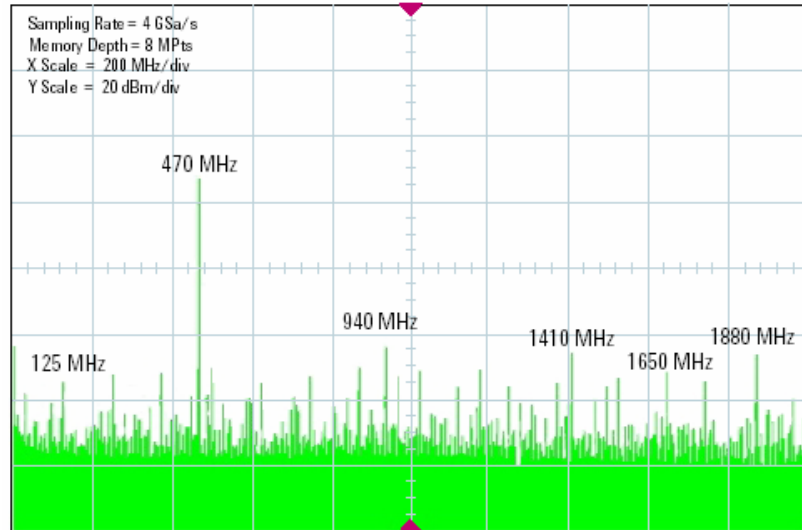


Figure 5. Infiniium FFT spectrum with 470 MHz pure sine wave input

Aumentando la deep-memory si migliora il range dinamico, questo perché si riduce il livello di rumore.

Nella figura seguente si mostra l'effetto dell'incremento della lunghezza del record sul range dinamico:

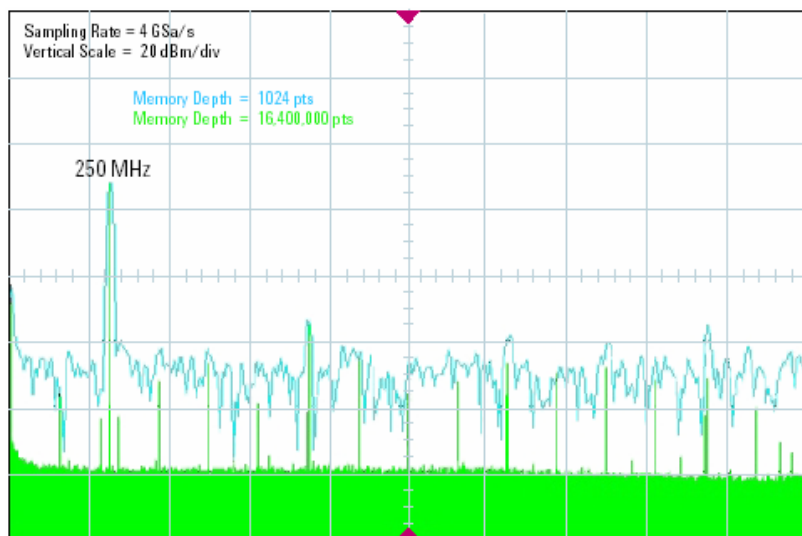


Figure 6. Infiniium FFT spectrum showing how deep memory reduces the noise level



La traccia blu è acquisita con un memory-depth di 1024 punti, mentre la traccia verde è acquisita con un memory-deph di 16.400.000 punti. Entrambi sono campionati a 4 GSa/s. Si noti che il livello di rumore cala di circa 30 dBm.

Gli analizzatori di spettro più comuni hanno generalmente una risoluzione pari a 12 o 16 bit, mentre nel caso di acquisizione ed elaborazione del segnale tramite schede di acquisizione per personal computer si possono raggiungere risoluzioni fino a 24 bit che corrispondono ad una dinamica teorica massima pari a 144dB.

1.7.10 La dispersione spettrale (Spectral Leakage) e la finestatura

Anche il cambiamento dei limiti di integrazione, dall’infinito al finito, dell’integrale di Fourier

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j2\pi ft} dt$$

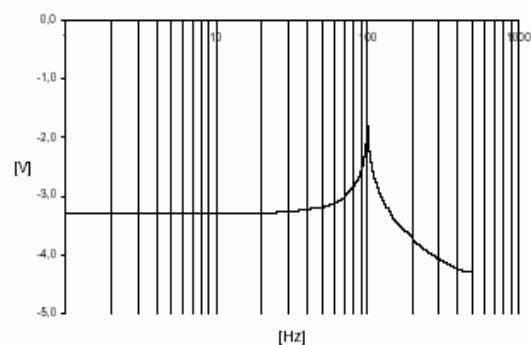
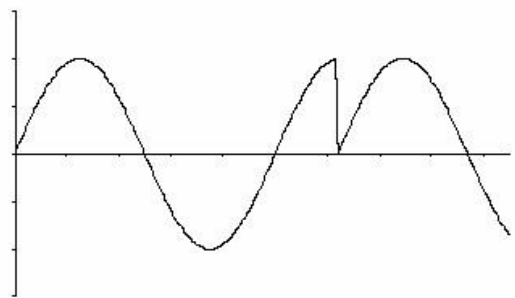
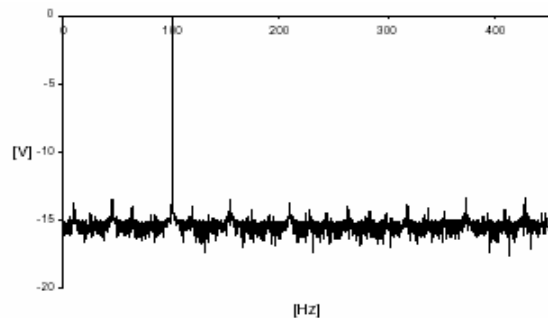
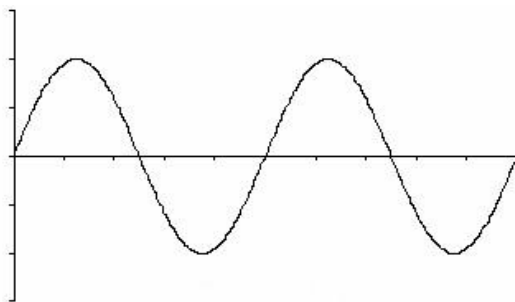
può essere causa di un errore che prende il nome di *leakage*.

Poiché non è possibile misurare un segnale per un tempo infinito, l’analizzatore cambia i limiti dell’integrazione regolandoli sulla durata del tempo che impiega a raccogliere un blocco di campioni. Questo blocco di campioni è detto *time-record*. La FFT richiede che, in questo intervallo, il segnale si ripeta più volte nel tempo.

Se l’insieme delle repliche ha un andamento identico a quello del segnale originario non si avranno problemi di leakage. Se invece ciò non accade, per ridurre l’effetto del leakage, si rende necessario l’uso di una “finestratura”.



Se il time-record contiene un numero intero di cicli di una forma d'onda, come un'onda sinusoidale, la forma d'onda è detta *periodica nel time-record*. Come conseguenza di questa caratteristica i valori assunti dalla forma d'onda in corrispondenza degli estremi del time-record sono uguali e se gli intervalli di osservazione sono consecutivi, i punti alle estremità combaciano perfettamente. In tali condizioni l'integrale di Fourier può essere calcolato accuratamente giacché, per quante volte il time-record si ripeta inalterato, il leakage non compare.



Se, invece, la forma d'onda nel time-record non è periodica allora sarà presente l'errore



dovuto al leakage. Il caso di time-record consecutivi con valori dei campioni assunti in corrispondenza delle estremità non coincidenti, equivale a sovrapporre un segnale a gradino alla forma d'onda in esame. Poiché un gradino istantaneo contiene un numero infinito di frequenze, queste si sovrapporranno a quelle del segnale sotto analisi invalidando il risultato.

Questo effetto è molto evidenziato nel dominio della frequenza. Infatti, per una sinusoidale, invece di avere una linea sottile, lo spettro si slarga in un vasto range di frequenze.

La soluzione usuale al problema dello spectral leakage è quella di forzare la forma d'onda a zero alla fine del time record, pertanto essa sarà sempre la stessa e non ci saranno discontinuità quando il time record viene replicato. Questo può essere effettuato moltiplicando il time record per una funzione finestra. Chiaramente la forma della finestra è importante e influenzerà i dati ma soprattutto deve essere scelta in modo tale da non introdurre essa stessa una discontinuità.

Gli analizzatori a FFT usano il metodo della finestatura per ridurre l'effetto del leakage, e quindi migliorando i risultati nel dominio della frequenza.

Un altro modo per spiegare la dispersione spettrale è di considerare la sequenza finita $x(n)$ come un prodotto di due sequenze di lunghezza infinita: la sequenza originale e la sequenza finestra.

Ricordiamo che ad un prodotto nel dominio del tempo $y(n)=x(n)*w(n)$ corrisponde ad una



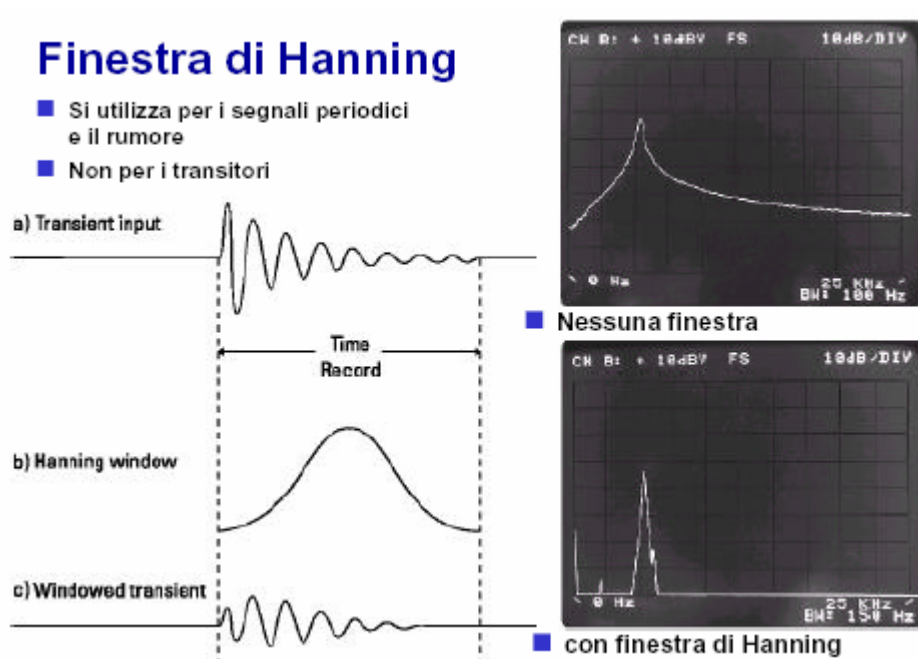
convoluzione nel dominio della frequenza. E’ chiaro che al crescere della lunghezza L , lo spettro della finestra è sempre più concentrato sull’origine: pertanto la dispersione spettrale può essere ridotta aumentando la lunghezza della finestra. Tale strada, ovviamente, non è in genere praticabile in quanto la lunghezza della finestra non può eccedere il numero di punti su cui si valuta la DFT.

Le diverse funzioni finestra hanno diversi vantaggi ed è importante scegliere quella corretta per ogni misurazione.

Ad esempio, la finestra *uniforme* fornisce la migliore risoluzione in frequenza ed un’elevata accuratezza in ampiezza, ma può essere usata solamente se il misurando è periodico nel time-record. Questa condizione si riscontra, tuttavia, assai di rado con i segnali reali.

Più spesso si adottano finestre dotate di spettri caratterizzati da “lobi” laterali poco pronunciati: la prima finestra che è stata introdotta è quella di *Hanning*, il cui andamento è espresso dalle relazioni:

$$\begin{aligned} w(t) &= 0 && \text{per } t < 0 \text{ e } t > T_0 \\ w(t) &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right) && \text{per } 0 \leq t \leq T_0 \end{aligned}$$



Questa finestra determina ancora un errore di leakage qualora la durata del timerecord non sia multiplo del periodo del segnale ma, grazie alla modesta ampiezza dei lobi laterali del suo spettro, le ampiezze delle armoniche introdotte sono estremamente inferiori a quelle che possono essere determinate dalla finestra rettangolare (o da assenza di finestre).

Un'osservazione da fare è che se lo spettro della sequenza da analizzare è sufficientemente piatto, sia in ampiezza che in fase, il legame tra lo spettro della sequenza $x(n)$ e $y(n)$ risultano proporzionali con costante di proporzionalità pari all'area sottesa dallo spettro della finestra. Questo è senz'altro verificato per i cosiddetti *segnali autofinestrati*, cioè per i segnali aventi durata inferiore o al più uguale alla lunghezza del tempo in analisi, qualora si adoperi la finestra rettangolare. Infatti in tali ipotesi la sequenza troncata coincide con la sequenza da analizzare $x(n)$ e la convoluzione restituisce lo spettro $X(F)$ del segnale di interesse.

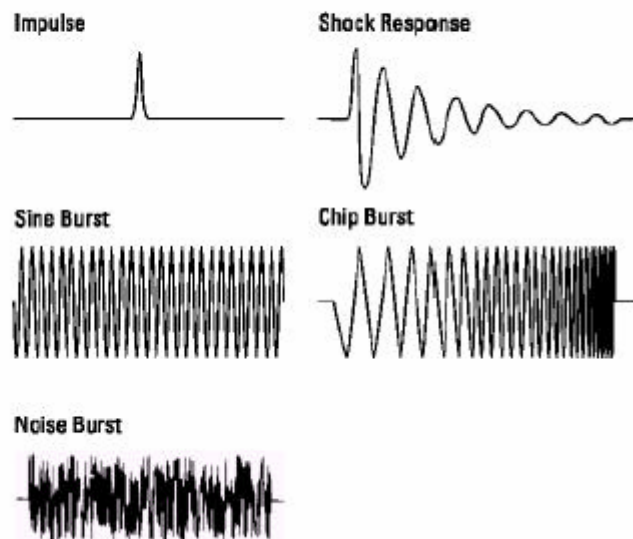


Si noti che sono segnali autofinestrati i segnali transitori, aventi durata in campioni inferiore o al più uguale a quella del segmento d'analisi: ciò spiega il largo impiego della finestra rettangolare per l'analisi spettrale di segnali transitori.

Finestra Uniforme (o Rettangolare)

■ Si usa per tutti i segnali di durata finita "self-windowed"

- ▶ Transitori
- ▶ Impulsi
- ▶ Treni di impulsi
- ▶ etc.



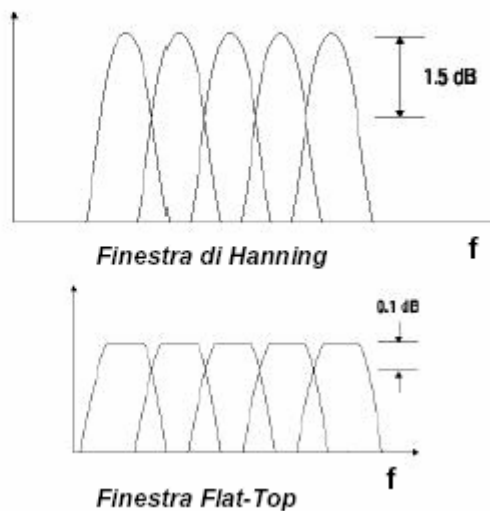
Quando si vuol misurare in modo accurato l'ampiezza dello spettro si adotta la finestra Flat-Top.

Questa finestatura mostra una perdita di risoluzione in frequenza, ma paragonata alla finestatura Hanning fornisce una migliore accuratezza in ampiezza ed è quindi preferibile qualora questa maggiore accuratezza sia richiesta.



Finestra Flat-Top

- Si usa quando si vuol misurare in modo accurato l'ampiezza dello spettro.
- Vediamo la finestra nel dominio delle frequenze come una serie di filtri passanda.
 - ▶ Finestra di Hanning: attenuazione di 1.5 dB (16%) per frequenze a metà tra due righe.
 - ▶ Finestra Flat-Top: attenuazione di 0.1 dB (1%) per frequenze a metà tra due righe
- La finestra flat-top consente una minore accuratezza in frequenza



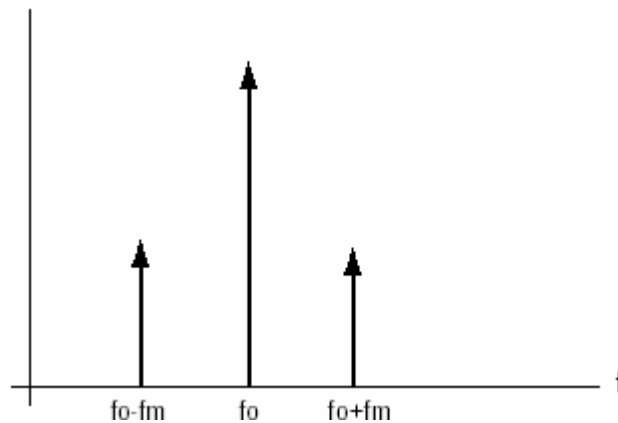
1.8 Applicazioni

1.8.1 Caratterizzazione di un segnale AM

In questo paragrafo descriviamo una applicazione reale di un analizzatore di spettro FFT Deep Memory della serie Infiniium dell'Agilent Technologies.

L'applicazione consiste nella misurazione delle caratteristiche di un segnale modulato in ampiezza (AM). Le caratteristiche d'interesse sono la frequenza portante, f_o , la frequenza modulante, f_m , e l'indice di modulazione, a

Lo spettro di un segnale AM contiene tutte le informazioni necessarie per calcolare questi parametri:



In figura si mostra lo spettro di un tipico segnale AM con modulazione sinusoidale.

Si notano la linea centrale dello spettro che rappresenta la portante e le bande laterali. Il segnale modulante è la differenza tra la portante ed una delle bande laterali. L’indice di modulazione è una misura della differenza d’ampiezza tra la portante e la modulante. Essa può essere calcolata dal modulo differenza A_{dB} utilizzando la seguente equazione:

$$\alpha = 2 \times 10^{(A_{dB} / 20)}$$

Per questo esempio, un generatore di funzione è usato per generare un segnale AM con i seguenti parametri:

- Frequenza portante = 77 MHz
- Frequenza modulante = 1 kHz
- Indice di modulazione = 2%

Il primo compito da fare è settare sull’analizzatore la frequenza di campionamento e il deep-memory. Per prevenire l’aliasing, la frequenza di campionamento F_s è settato ad un



valore più grande del doppio di 77 MHz + 1 kHz. Anche, per una migliore risoluzione, è selezionato il minimo valore disponibile per la frequenza di campionamento che soddisfa questo criterio. Per l’Infiniium la minima frequenza di campionamento disponibile per il quale viene soddisfatto il criterio di Nyquist è di 200 MSa/s.

Per ottenere una più accurata misura dell’indice di modulazione, è usata una finestra flat-top.

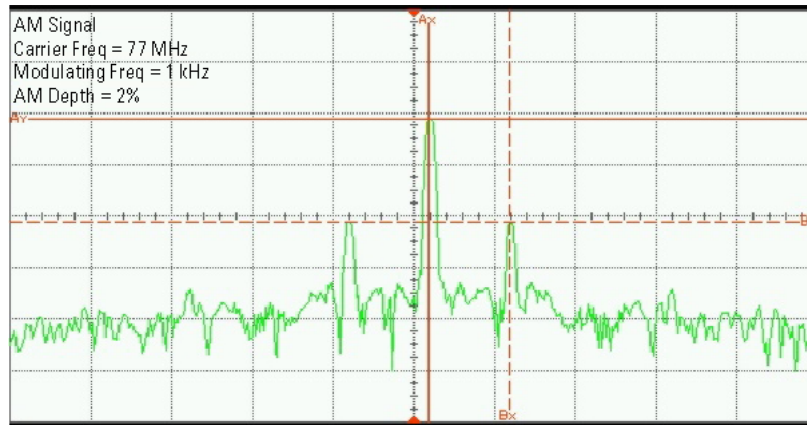
La finestra flat-top è larga 8 bins, così per distinguere chiaramente le bande laterali richiede una risoluzione in frequenza di 1 kHz diviso per 8. Usando questo fatto e riferendoci all’espressione per calcolare la risoluzione in frequenza, l’equazione seguente mostra il minimo numero di punti acquisiti:

$$N \geq \frac{F_s}{F} = \frac{F_s}{\frac{f_m}{W}} = \frac{200 \text{ MSa/s}}{\frac{1 \text{ kHz}}{8}} = 1.6 \text{ MPts}$$

dove F è la risoluzione in frequenza e W è la larghezza del lobo principale della finestra in bins.

Per questo esempio, la FFT Deep-Memory è settato a 8 MPts la quale eccede il minimo consentito, ed offre una risoluzione in frequenza di 23,8 Hz.

Nella figura seguente si mostra lo spettro della FFT del segnale AM catturato dallo strumento Infiniium.



Acquisition Sampling mode real time Normal Configuration 4GSa/s
Memory depth manual Memory depth 8200000pts
Sampling rate manual Sampling rate 200 MSa/s
Averaging off Interpolation on

Channel 1 Scale 20 mV/div Offset 2 mV
BW limit off Coupling DC Impedance 50 Ohms
Attenuation 1.000 : 1 Atten units ratio Skew 0.0 s
Ext adapter None Ext coupler None
Ext gain 1.00 Ext offset 0.0

Time base Scale 5.00 ms/ Postion 0.0 s Reference center

Trigger Mode edge Sweep auto
Hysteresis normal Holdoff time 80 ns Coupling DC
Source channel 1 Trigger level 1.6 mV Slope rising

Function 2 FFT magnitude channel 1
Vertical scale 20.0 dBm/div Offset -51.0000 dBm
Horizontal scale 1.00 kHz/div Position 77.0000 MHz
Window flattop Resolution 23.8419 Hz

| Measure | current | mean | std dev | min | max |
|-----------------------|-----------|-----------|---------|-----------|-----------|
| FFT Δ freq(f2) | 1.001 kHz | 1.001 kHz | 0 Hz | 1.001 kHz | 1.001 kHz |
| FFT Δ mag(f2) | -40.17 dB | -40.17 dB | 0.0 dB | -40.17 dB | -40.17 dB |

| Marker | current | mean | X | Y |
|-----------------------|-----------|-----------|-----------------------------|------------|
| FFT Δ freq(f2) | 1.001 kHz | 1.001 kHz | A—(f2) = 77.000189 MHz | -13.27 dBm |
| FFT Δ mag(f2) | -40.17 dB | -40.17 dB | B---(f2) = 77.001191 MHz | -53.44 dBm |
| | | | Δ = 1.001 kHz | -40.17 dB |
| | | | 1/ Δ X = 999 μ s | |