

TRASPORTO DI CALORE CONVETTIVO

I. Trasporto di calore convettivo. Coefficiente di scambio termico convettivo

Si intende per **trasporto convettivo** di calore il meccanismo di scambio termico che avviene in un fluido in movimento. Per chiarire il concetto riferiamoci, come esempio, al caso in cui il fluido si muove intorno ad un oggetto sommerso, come la sfera di figura 1, che deve essere raffreddata. Questo può avvenire mettendo a contatto l'oggetto caldo con un fluido più freddo quiescente. In questo modo il calore viene trasmesso per conduzione e la temperatura del corpo si abbassa. Tuttavia, l'esperienza insegna che il corpo viene raffreddato più velocemente se viene applicato un moto relativo tra l'oggetto e il fluido.

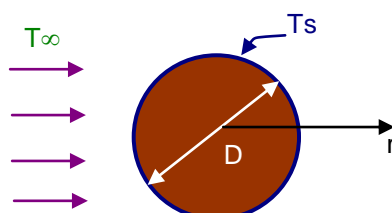


Figura 1

In condizioni quiescenti il trasporto di calore è di tipo puramente **conduttivo**, mentre se il fluido è in movimento va tenuto in conto il trasporto di calore per **convezione**. In quest'ultimo caso fluido più freddo viene continuamente a contatto con la superficie calda della sfera, si riscalda e si allontana dalla stessa "portandosi via" una certa quantità di calore. La presenza di un flusso determina sempre un incremento dello scambio termico rispetto alle condizioni quiescenti.

In questa sede il flusso termico convettivo verrà analizzato per alcune situazioni fondamentali, schematizzate in Fig.2: il moto intorno ad un oggetto sommerso (sfera o cilindro), il moto all'interno di un tubo, il moto tangenziale ad una lastra piana.

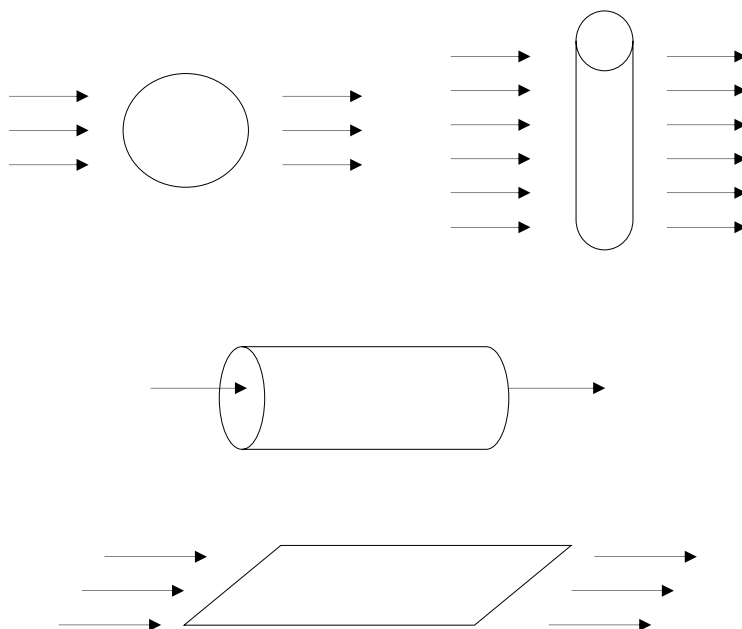


Figura 2

La trattazione analitica dei problemi di trasporto di calore convettivo richiederebbe la soluzione simultanea delle equazioni di bilancio della quantità di moto e di energia. Tale strada è molto impegnativa e può essere percorsa, generalmente, o attraverso un approccio analitico complesso o ricorrendo a tecniche di simulazione numerica. Una strada ingegneristica alternativa passa per l'utilizzo dell'analisi dimensionale. Questa permette di determinare i gruppi adimensionali

indipendenti che caratterizzano il problema, pervenendo così a relazioni quantitative per descrivere il trasporto di calore convettivo.

Ritornando all'esempio del moto intorno alla sfera, supponiamo di poter determinare analiticamente il campo di temperatura $T(x,y,z)$ intorno alla sfera in condizioni stazionarie, risolvendo le equazioni su accennate. Dalla conoscenza del campo di temperatura è possibile determinare il flusso di calore scambiato in ogni punto tra la sfera e il fluido:

$$q = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_R \quad (1.1)$$

dove k è la conducibilità termica del fluido. Noto il flusso di calore in ogni punto della superficie della sfera è possibile poi calcolare l'intera potenza termica scambiata tra fluido e sfera. Non volendo affrontare il problema in maniera analitica per le difficoltà di cui sopra, si ricorre ad una diversa espressione del flusso di calore. Assumendo l'ipotesi semplificativa che la superficie della sfera si trovi tutta alla stessa temperatura T_s , il flusso termico viene scritto come:

$$q = h(T_s - T_\infty) \quad (1.2)$$

Nella (1.2) T_∞ è la temperatura del fluido lontano dalla sfera è la quantità h , che ha le dimensioni di un flusso diviso per una temperatura, viene detta **coefficiente di scambio termico convettivo**. La (1.2) non deriva da alcuna trattazione matematica del problema; essa è soltanto una *definizione* del coefficiente di scambio termico convettivo come quella quantità che, moltiplicata per la differenza di temperatura caratteristica $(T_s - T_\infty)$, fornisce il flusso di calore scambiato.

Ci si può chiedere a questo punto a quali parametri sia legato il coefficiente h . Nella lista possiamo includere:

$$\begin{aligned} h & \left[\frac{M}{t^3 T} \right]; & k & \left[\frac{ML}{t^3 T} \right]; & c_p & \left[\frac{L^2}{t^2 T} \right]; & \rho & \left[\frac{M}{L^3} \right] \\ \mu & \left[\frac{M}{Lt} \right]; & D & [L]; & v_\infty & \left[\frac{L}{t} \right] \end{aligned} \quad (1.3)$$

In parentesi quadra nella (1.3) sono riportate le dimensioni fondamentali delle grandezze in gioco: M per massa, L per lunghezza, t per tempo e T per temperatura.

La dipendenza del coefficiente di scambio termico convettivo può essere inquadrata in maniera più semplice utilizzando il teorema di Buckingham. Esso stabilisce che:

"Un qualunque problema fisico descritto da un numero N di parametri fisici dimensionali, esprimibili da M dimensioni fondamentali, può essere ridotto ad una relazione tra $N-M$ gruppi adimensionali indipendenti."

Nel nostro caso particolare, con 7 parametri e 4 dimensioni fondamentali è possibile formare $7-4=3$ gruppi adimensionali indipendenti. La nostra scelta cade su:

$$\begin{aligned} Re &= \frac{\rho v_\infty D}{\mu} \\ Nu &= \frac{hD}{k} \\ Pr &= \frac{\mu}{\rho} \frac{\rho c_p}{k} = \frac{\mu c_p}{k} = \frac{\nu}{\alpha} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Il primo gruppo adimensionale è il numero di Reynolds, che lega tra loro i parametri fluidodinamici fondamentali del sistema; il secondo è il **numero di Nusselt**, il terzo è il **numero di Prandtl**.

Il numero di Nusselt può essere riscritto come:

$$Nu = \frac{h\Delta T}{\frac{k}{D}\Delta T} \quad (1.5)$$

Esso quindi è il rapporto tra il flusso termico convettivo e quello che si avrebbe in condizioni quiescenti, cioè il flusso termico puramente diffusivo. Nu quindi rappresenta una sorta di *fattore di esaltazione* del trasporto di calore dovuto alla convezione. Siccome il trasporto convettivo determina sempre un aumento del flusso termico rispetto al caso diffusivo si ha $Nu > 1$.

Il numero di Prandtl contiene solo parametri fisici del fluido, in particolare viscosità, densità, calore specifico e conducibilità termica. L'ultima eguaglianza della (1.4) lo esprime in termini di rapporto tra la **diffusività di quantità di moto** e la **diffusività termica**. La prima, detta anche **viscosità cinematica** è il rapporto tra la viscosità e la densità del fluido. Con le dimensioni di una lunghezza al quadrato diviso per un tempo, essa gioca, nel trasporto della quantità di moto, esattamente lo stesso ruolo della diffusività termica nel caso del trasporto di calore. Si ricordi il caso del trasporto diffusivo transitorio (di calore o di quantità di moto) nel caso di un mezzo piano seminfinito: in quel caso la diffusività determina la velocità con la quale l'onda di calore (o di quantità di moto) penetra nel mezzo, determinando una variazione di temperatura (o di velocità) rispetto a quella iniziale. Il numero di Prandtl misura quindi il rapporto tra la velocità di trasporto diffusiva della quantità di moto rispetto a quella di calore.

Come detto il numero di Prandtl contiene solo parametri del fluido. Questi dipendono ovviamente dalla temperatura, ma è possibile comunque farne una stima preliminare. Infatti valori tipici di Pr sono:

$$\begin{aligned} Pr &= 0.65 \div 1 \quad \text{per gas} \\ Pr &> 1 \text{ (tipicamente } \square 10) \quad \text{per liquidi} \\ Pr &\ll 1 \quad \text{per metalli liquidi} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Il valore di Pr molto basso per i metalli liquidi è dovuto alla loro elevata conducibilità.

Sulla base del teorema di Buckingham è possibile prevedere che il numero di Nusselt (che contiene il coefficiente di scambio termico convettivo) sia una funzione di Re e Pr :

$$Nu = Nu(Re, Pr) \quad (1.7)$$

Disponendo quindi di correlazioni (grafiche o numeriche) che esprimano in maniera quantitativa la (1.7) è possibile determinare il coefficiente di scambio termico convettivo in funzione delle grandezze caratteristiche del problema. Le considerazioni fatte per la sfera valgono anche, con le dovute differenze e particolarità, anche per le altre tipologie di flusso, che verranno analizzate separatamente nel seguito.

II. Correlazioni per moto intorno a oggetti sommersi

II.1. Moto intorno a una sfera

Le correlazioni per moto intorno ad oggetti sommersi (cilindro e sfera) sono sia grafiche che numeriche e richiedono comunque il calcolo delle proprietà del fluido. Queste vanno sempre calcolate alla cosiddetta **temperatura di film**, media aritmetica tra la temperatura del fluido lontano dal corpo, T_∞ e quella sulla superficie dell'oggetto, T_0 :

$$T_f = \frac{T_\infty + T_0}{2} \quad (2.1)$$

La Fig.3 mostra la correlazione grafica per il numero di Nusselt intorno ad una sfera. In ascissa è riportato il prodotto:

$$RePr^{\frac{1}{3}} \quad (2.2)$$

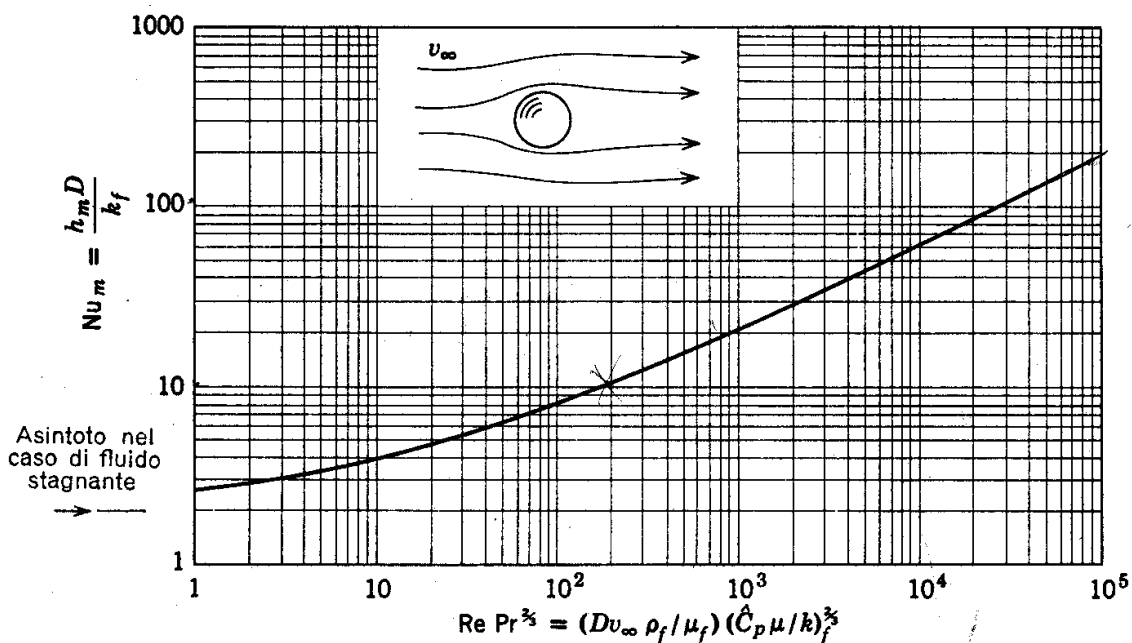


Figura 3

L'uso della (2.2) come variabile indipendente è giustificato dal fatto che la corrispondente correlazione numerica è:

$$Nu = 2 + 0.6 Re^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{3}} \quad (2.3)$$

La (2.3) giustifica il fatto che la curva di Fig.3 tenda al valore asintotico 2 per il prodotto Re tendente a zero. Di fatto, il limite puramente conduttivo della (2.3), corrispondente a condizioni quiescenti, è tale che:

$$\lim_{Re \rightarrow 0} h = \frac{2k}{D} \quad (2.4)$$

La (2.4) è ottenibile analiticamente dalla studio del flusso conduttivo di calore in una geometria sferica nell'ipotesi che la temperatura di superficie sia T_0 e quella a distanza infinita sia pari a T_{∞} . In tali condizioni, infatti, l'equazione stazionaria di diffusione è:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) = 0 \quad (2.5)$$

da risolvere con le condizioni al contorno:

$$\begin{aligned} T = T_0 \quad r = \frac{D}{2} \\ T \rightarrow T_{\infty} \quad r \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (2.6)$$

Integrando una prima volta la (2.5) si ha:

$$\frac{dT}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \quad (2.7)$$

Una seconda integrazione fornisce:

$$T(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2 \quad (2.8)$$

Applicando le condizioni al contorno si ottiene:

$$\begin{aligned} C_2 &= T_\infty \\ C_1 &= \frac{D(T_\infty - T_0)}{2} \end{aligned} \quad (2.9)$$

e in definitiva il profilo di temperatura è:

$$T = T_\infty - \frac{D(T_\infty - T_0)}{2r} \quad (2.10)$$

Noto il profilo di temperatura si può calcolare il flusso di calore che entra nel fluido in corrispondenza della superficie della sfera:

$$q = -k \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r=\frac{D}{2}} = \frac{2k}{D} (T_0 - T_\infty) \quad (2.11)$$

Confrontando la (2.11) con la definizione di h , equazione (1.2), si ha:

$$h = \frac{2k}{D} \quad (2.12)$$

e quindi:

$$Nu = \frac{hD}{k} = 2 \quad (2.13)$$

proprio come previsto dalle (2.3) e (2.4).

3.2. Esempio 1

Consideriamo una sfera solida di diametro $D=10\text{cm}$ al cui interno venga generato calore in maniera uniforme con una potenza per unità di volume pari a $p=60 \text{ KJ/m}^3$. La sfera viene investita da una corrente di aria alla temperatura $T_\infty=20^\circ\text{C}$ e alla velocità $v_\infty=1\text{m/s}$. Si calcoli il profilo di temperatura all'interno della sfera, e in particolare la temperatura al centro, nel caso di:

1. Sfera di alluminio ($k_s=180 \text{ Kcal/hm}^\circ\text{C}$)
2. Sfera di sughero ($k_s=0.04 \text{ Kcal/hm}^\circ\text{C}$)
3. Sfera di argilla ($k_s=1.3 \text{ Kcal/hm}^\circ\text{C}$)

Scriviamo un bilancio di energia sulla sfera. Nel caso di generazione uniforme al suo interno il bilancio è:

$$= -k_s 4\pi r^2 \left. \frac{dT}{dr} \right|_r + k_s 4\pi r^2 \left. \frac{dT}{dr} \right|_{r+dr} + 4\pi r^2 dr p = 0 \quad (2.14)$$

e quindi:

$$= k_s \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dT}{dr} \right) + r^2 p = 0 \quad (2.15)$$

La (2.15) va risolta con le condizioni al contorno: al centro gradiente nullo di temperatura, alla superficie della sfera uguaglianza delle portate termiche interne ed esterne. Siccome da un bilancio macroscopico tutto il calore generato internamente viene trasportato da fluido per convezione, le due condizioni al contorno si scrivono:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dr} &= 0 \quad r = 0 \\ \pi D^2 h (T_0 - T_\infty) &= p \frac{\pi D^3}{6} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Nella seconda delle (2.16) T_0 è un valore non noto, ma anche non arbitrario, in quanto rappresenta il valore del profilo di temperatura in corrispondenza della superficie:

$$T_0 = T(R) \quad (2.17)$$

Integriamo la (2.15). La prima integrazione dà:

$$r^2 \frac{dT}{dr} = -\frac{p}{k_s} \frac{r^3}{3} + C_1 \quad (2.18)$$

Dividendo la (2.18) per r^2 ed effettuando una seconda integrazione si ha:

$$T(r) = -\frac{p}{k_s} \frac{r^2}{6} - \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (2.19)$$

Passando alla determinazione delle costanti di integrazione, la condizione di gradiente nullo al centro impone certamente che $C_1=0$:

$$T(r) = -\frac{p}{k_s} \frac{r^2}{6} + C_2 \quad (2.20)$$

Per determinare C_2 va prima di tutto calcolata l'espressione per $T(R)$:

$$T(R) = -\frac{p}{k_s} \frac{R^2}{6} + C_2 = -\frac{p}{k_s} \frac{D^2}{24} + C_2 \quad (2.21)$$

Sostituendo la (2.21) nella seconda delle (2.16) si ha:

$$h \left(-\frac{p}{k_s} \frac{D^2}{24} + C_2 - T_\infty \right) = p \frac{D}{6} \quad (2.22)$$

da cui si ricava:

$$C_2 = T_\infty + \frac{pD}{6} \left(\frac{D}{4k_s} + \frac{1}{h} \right) \quad (2.23)$$

In definitiva il profilo di temperatura è dato da:

$$T(r) = T_{\infty} + \frac{pD}{6} \left(\frac{D}{4k_s} + \frac{1}{h} \right) - \frac{p}{k_s} \frac{r^2}{6} \quad (2.24)$$

La temperatura al centro è dunque data da:

$$T(0) = T_{\infty} + \frac{pD}{6} \left(\frac{D}{4k_s} + \frac{1}{h} \right) \quad (2.25)$$

La (2.25) rappresenta la soluzione del problema, ma l'espressione numerica non è ancora disponibile in quanto va ancora calcolato il coefficiente di scambio termico il quale, a sua volta, può essere determinato solo conoscendo la temperatura di superficie, quest'ultima necessaria per il calcolo della temperatura di film (vedi (2.1)). Per chiudere il problema dobbiamo quindi determinare tale temperatura. Essa è ottenibile dal bilancio globale di energia, cioè dalla seconda condizione al contorno (2.16):

$$h(T_0 - T_{\infty}) = p \frac{D}{6} \quad (2.26)$$

La (2.26), infatti, è una equazione nella sola T_0 , presente però implicitamente anche in h . Per risolverla, possiamo procedere per tentativi riscrivendo la (2.26) come:

$$T_0 = T_{\infty} + \frac{p}{h} \frac{D}{6} \quad (2.27)$$

e procedendo per successivi iterazioni. Un valore di primo tentativo per h può essere determinato valutando le proprietà dell'aria ad una temperatura di film prossima a quella dell'aria ambiente. Ad esempio, valutando le proprietà dell'aria a 38°C (dato presente in tabella) si ha (tutte le grandezze sono in unità SI):

$$\begin{aligned} \nu &= 1.68 \cdot 10^{-5} \\ k &= 0.0267 \\ Pr &= 0.72 \end{aligned} \quad (2.28)$$

si ha:

$$Re = \frac{v_{\infty} D}{\nu} = 5950 \quad (2.29)$$

e applicando la correlazione (2.3):

$$\begin{aligned} Nu &= 43.5 \\ h &= 11.6 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Rientrando con questo valore di h nella (2.27) si ottiene una temperatura di superficie di secondo tentativo $T_0=72.6^{\circ}\text{C}$. Da questa risulta una temperatura di film $T_f=45^{\circ}\text{C}$, alla quale si possono ricalcolare tutte le quantità mediante interpolazione delle tabelle:

$$\begin{aligned}
n &= 1.92 \times 10^{-5} \\
k &= 0.0283 \\
Pr &= 0.72 \\
Re &= 5253
\end{aligned}
\tag{2.31}$$

e ricalcolando h si ha:

$$\begin{aligned}
Nu &= 40.1 \\
h &= 11.3
\end{aligned}
\tag{2.32}$$

che restituisce una $T_0=108.1^\circ\text{C}$, per la quale possiamo ritenerci soddisfatti.

Dopo aver calcolato la temperatura alla superficie e il coefficiente di scambio termico convettivo è possibile calcolare la temperatura al centro della sfera utilizzando la (2.25). Per il caso 1. (alluminio) si ha $T(0)=108.2$. Per il caso 2. (sughero) si ha $T(0)=645^\circ\text{C}$. Infine, per il caso 3. (argilla) si ha $T(0)=124.7^\circ\text{C}$.

4. Il numero di Biot

I risultati numerici dell'esempio precedente meritano un commento approfondito. Nel caso 1., infatti, quando la conducibilità termica è molto elevata, la temperatura al centro è praticamente uguale a quella sulla superficie della sfera: il salto termico ΔT_e nella fase aria è molto superiore al salto termico ΔT_i nel solido, avendosi:

$$\begin{aligned}
\Delta T_i &= 0.1^\circ\text{C} \\
\Delta T_e &= 88^\circ\text{C} \\
\frac{\Delta T_i}{\Delta T_e} &= 0.0014
\end{aligned}
\tag{3.1}$$

Nel caso 2. (sughero) si ha la situazione praticamente opposta:

$$\begin{aligned}
\Delta T_i &= 622^\circ\text{C} \\
\Delta T_e &= 88^\circ\text{C} \\
\frac{\Delta T_i}{\Delta T_e} &= 7.1
\end{aligned}
\tag{3.2}$$

Nel caso 3., infine, la situazione è intermedia, nel senso che i due salti termici sono confrontabili:

$$\begin{aligned}
\Delta T_i &= 16.5^\circ\text{C} \\
\Delta T_e &= 88^\circ\text{C} \\
\frac{\Delta T_i}{\Delta T_e} &= 0.19
\end{aligned}
\tag{3.3}$$

Il risultato (3.1) è particolarmente significativo. Infatti, l'analisi *a posteriori* indica che la temperatura all'interno della sfera è praticamente uniforme. Se questo risultato fosse stato noto *a priori* si sarebbe potuta evitare la scrittura e la soluzione del bilancio differenziale (2.15). Infatti, con temperatura uniforme nella sfera il problema si sarebbe ridotto alla scrittura del bilancio macroscopico su tutta la sfera, cioè direttamente alla (2.26).

Una stima *a priori* del rapporto tra il salto termico interno ed esterno, di validità del tutto generale e non limitata solo al problema della sfera, è effettivamente possibile mediante il **numero di Biot**:

$$Bi = \frac{hD}{k_s} \quad (3.4)$$

Il numero di Biot rappresenta proprio il rapporto tra i due salti termici su descritti. Infatti, il flusso termico passante attraverso la superficie della sfera può essere espresso sia come flusso convettivo nella fase fluida (esterna) che come flusso diffusivo nella fase solida (interna):

$$q = h\Delta T_e \cong k_s \frac{\Delta T_i}{D} \quad (3.5)$$

La 3.5 non è una uguaglianza numerica, ma una utile approssimazione. Dalla (3.5) segue ovviamente:

$$Bi = \frac{hD}{k_s} \cong \frac{\Delta T_i}{\Delta T_e} \quad (3.6)$$

Si noti che il numero di *Biot* è formalmente molto simile al numero di *Nusselt*, con la differenza sostanziale che *Nusselt* ha la conducibilità del gas al denominatore mentre il numero di *Biot* quella del solido (da questo il pedice *s* alla conducibilità nella (3.4)).

Si possono allora distinguere tre situazioni diverse:

- $Bi \ll 1$, il salto termico interno è trascurabile rispetto a quello esterno, la temperatura nel solido è uniforme e il problema si riduce alla scrittura di un bilancio macroscopico sull'oggetto. In questo caso si usa dire che *la resistenza al trasporto di calore è tutta concentrata in fase fluida*;
- Se $Bi \gg 1$, il salto termico esterno è trascurabile rispetto a quello interno, la temperatura superficiale del solido è praticamente uguale (o prossima) alla temperatura T_∞ nel seno del fluido, e il problema va risolto scrivendo il bilancio differenziale sul solido, imponendo la condizione semplificata all'interfaccia: $T_0 = T_\infty$;
- Se $Bi \cong 1$ entrambi i salti termici sono significativi, e va quindi impostato il problema completo, con il bilancio globale e la condizione di uguaglianza dei flussi all'interfaccia.

Per chiarire meglio quanto detto, calcolando il numero di Biot per i tre casi dell'esempio precedente a partire dai parametri fisici del problema otteniamo:

$$\begin{aligned} Bi_1 &= 0.0054 \\ Bi_2 &= 24.3 \\ Bi_3 &= 0.75 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Si noti, in conclusione di questo paragrafo, che il concetto espresso dal numero di Biot è comunque sempre applicabile a tutti i problemi in cui si abbia trasporto di calore attraverso due o più sistemi posti in serie. Ad esempio, se si considera un gas in movimento che lambisce la superficie di un liquido quiescente (come accade, tra l'altro, in molti problemi di assorbimento con reazione chimica), è possibile definire un numero di Biot dato da:

$$Bi = \frac{h_G D}{k_L} \quad (3.8)$$

dove h_G è il coefficiente di trasporto convettivo nella fase gas (quella in flusso), k_L la conducibilità termica del liquido (fase quiescente) e D è la lunghezza caratteristica del problema

IV. Moto intorno ad un cilindro

Le stesse considerazioni svolte per il moto intorno ad una sfera si applicano per il trasporto di calore convettivo intorno ad un cilindro investito trasversalmente da una corrente di fluido. Se il cilindro ha una lunghezza L molto maggiore del diametro D , il calcolo del coefficiente di scambio termico può

essere come al solito eseguito attraverso correlazioni grafiche e numeriche del Numero di Nusselt in funzione del numero di Prandtl.

La correlazione numerica più utilizzata per lo scambio termico convettivo intorno ad un cilindro è rappresentata dalla seguente equazione empirica:

$$Nu = Pr^{0.3} (0.35 + 0.56Re^{0.52}) \quad (4.1)$$

La (4.1) permette il calcolo diretto del numero di Nusselt e quindi del coefficiente di scambio termico convettivo. Per il moto intorno a cilindro rimangono valide tutte le considerazioni fatte per quello intorno a sfera.

V. Moto su lastra piana

Si consideri una corrente di fluido che si muove di moto rettilineo con velocità uniforme v_∞ . Il fluido incontra tangenzialmente una lastra piana, come illustrato schematicamente in Figura 4.

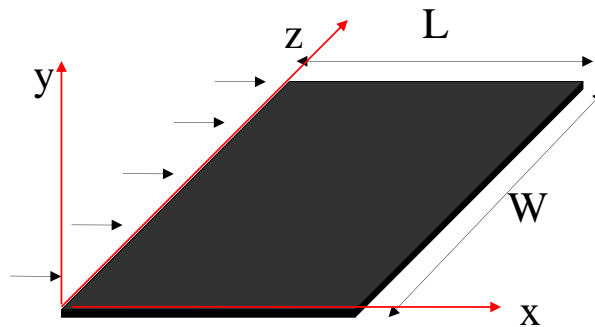


Figura 4

In Figura 4 viene fissato un sistema di coordinate $x-y$ con origine sul punto di attacco (il punto in cui il fluido tocca la superficie) dove x è la direzione del moto e y la direzione perpendicolare.

Da un punto di vista fisico qualitativo, ancorché ai fini della trattazione del trasporto di calore convettivo tra lastra e fluido, è importante stabilire le condizioni di flusso che si sviluppano.

Sia da un punto di vista sperimentale che teorico è possibile dimostrare che, nel tratto iniziale della lastra, si stabiliscono condizioni di flusso **laminare**: tutte le particelle si muovono deterministicamente con velocità rettilinea che varia gradualmente dal valore zero (alla lastra) fino al valore imperturbato. Tale condizione perdura fino a valori del numero di Reynolds pari a circa $5 \cdot 10^5$. Al di là di tale valore, si assiste alla transizione da moto laminare a moto **turbolento**.

In presenza di moto laminare ($Re < 10^5$) si può dimostrare che:

$$Nu = 0.664 Re_L^{0.5} Pr^{\frac{1}{3}} \quad (5.1)$$

mentre l'equazione che collega Nusselt a Prandtl in regime turbolento è:

$$Nu = 0.037 Pr^{\frac{1}{3}} (Re_L^{0.8} - 4300) \quad (5.2)$$

Il numero di Reynolds è riferito questa volta alla lunghezza dell'intera lastra:

$$Re_L = \frac{\rho v_\infty L}{\mu} \quad (5.3)$$

Esempio

Una pozzanghera lunga $L=30\text{cm}$ è spessa $\delta=1\text{ cm}$ è completamente ghiacciata alla temperatura di 0°C . Essa viene investita da una corrente di aria alla velocità di 5 m/s e alla temperatura di 20°C . Calcolare il tempo necessario affinché la pozzanghera si sciogla completamente.

Nell'ipotesi di assenza di trasporto di materia (evaporazione dell'acqua) il tempo necessario allo scioglimento della lastra di ghiaccio è quello durante il quale l'acqua cede all'aria una portata termica pari al suo calore latente di fusione, λ . Detta P la portata termica sottratta all'acqua dall'aria per unità di larghezza della piastra, un bilancio di energia fornisce:

$$P = h_L (T_\infty - T_0) L \quad (5.4)$$

dove $T_\infty = 20^\circ\text{C}$ e $T_0 = 0^\circ\text{C}$. Il coefficiente di scambio termico globale può essere calcolato valutando le proprietà dell'aria alla temperatura di film di 10°C . Si ha:

$$k=2.06 \text{ W/m}^\circ\text{C}; \quad \rho=1.25 \text{ Kg/m}^3; \quad \mu=1.8 \text{ Pa s}; \quad Pr=0.72$$

Il numero di Reynolds su tutta la lastra vale:

$$Re_L = \frac{\rho v_\infty L}{\mu} = 1.04 \cdot 10^5 \quad (5.5)$$

Siamo quindi ai limite del regime laminare, per cui possiamo calcolare il numero di Nusselt dalla **Errore. L'origine riferimento non è stata trovata.** e poi ricavare h :

$$Nu = 154$$

$$h_L = \frac{Nu \cdot k}{L} \quad (5.6)$$

La potenza termica per unità di larghezza è quindi data da:

$$P = h_L (T_\infty - T_0) L = 6360 \frac{\text{J}}{\text{m} \cdot \text{s}} \quad (5.7)$$

Visto che il ghiaccio è un parallelepipedo di larghezza unitaria, lunghezza L e spessore δ , si avrà:

$$P \cdot t_{\text{fusione}} = \lambda_{\text{fusione}} L \delta \rho_g \quad (5.8)$$

dove il calore latente di fusione è pari a 335 KJ/Kg e la densità dell'acqua è circa pari a 1000 Kg/m^3 . In definitiva si ha:

$$t_{\text{fusione}} = \frac{\lambda_{\text{fusione}} L \delta \rho_g}{P} = \frac{335000 \cdot 0.3 \cdot 0.01 \cdot 1000}{6360} = 158 \text{ s} \quad (5.9)$$