2.3.6 La modulazione angolare

Dato il segnale modulante *m(t)*, limitato nella banda B e con ampiezza normalizzata |*m(t)*|<1, la forma generale di un segnale modulato in angolo è la seguente:

$$x(t) = \cos\Big(2\pi f_0 t + \varphi\left[m(t)\right]\Big)$$

dove $\varphi[m(t)]$ è la legge di modulazione; essa determina il valore della *fase istantanea* $(2\pi f_0 t+\varphi)$ della portante sinusoidale in corrispondenza al valore m(t) assunto dal messaggio al tempo t.

Specificatamente abbiamo:

$$\varphi\left[m(t)\right] = \begin{cases} K_P \cdot m(t) & \text{modulazione di fase (PM)} \\ 2\pi K_F \displaystyle\int_{-\infty}^{t} m(\vartheta)\, d\vartheta & \text{modulazione di frequenza (FM)} \end{cases}$$

Si definisce *fase istantanea* l'argomento della portante. Nel caso di modulazione di fase abbiamo:

$$\phi(t) \stackrel{\text{def}}{=} 2\pi f_0 t + K_p \cdot m(t)$$

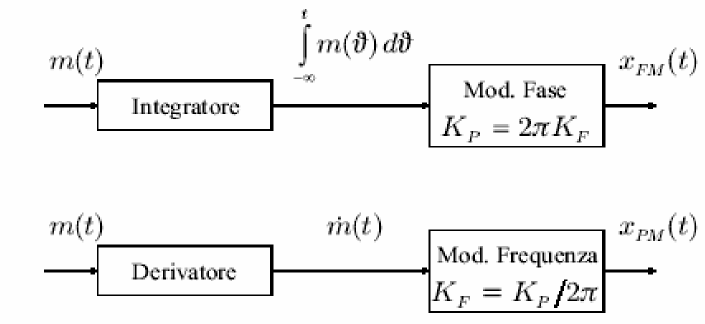
e quindi il parametro *Kp* misura la massima *deviazione* (rispetto al contributo nominale della sola portante $2\pi f_0 t+\varphi$) di fase del segnale modulato.

Definendo la frequenza istantanea come la derivata della fase istantanea, nel caso di modulazione di frequenza abbiamo:

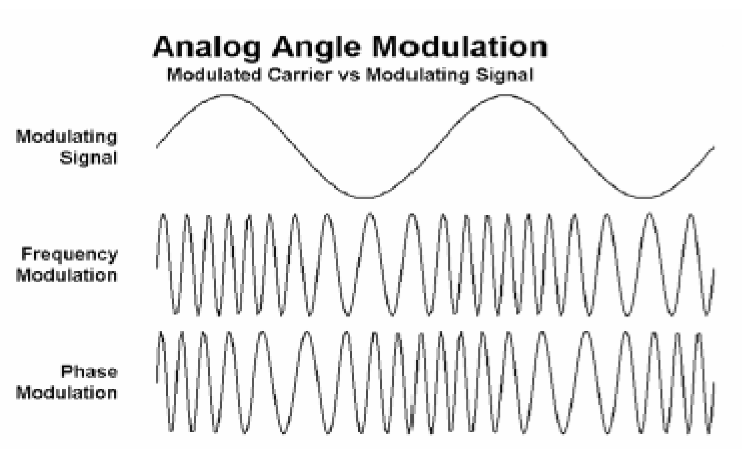
$$f(t) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}\left(2\pi f_0 t + 2\pi K_F \int_{-\infty}^{t} m(\vartheta)\, d\vartheta\right) = f_0 + K_F \cdot m(t)$$

e il parametro *KF* misura la massima deviazione di frequenza.

Si noti l'equivalenza esistente tra la modulazione di fase e la modulazione di frequenza, illustrata nella seguente figura:



Nel seguito ci soffermeremo sulle misure tramite analizzatore di spettro della modulazione di frequenza, più diffusamente impiegata in trasmissioni di tipo analogico (radio-diffusione di segnale audio), mentre la modulazione di fase trova applicazione nelle trasmissioni numeriche.



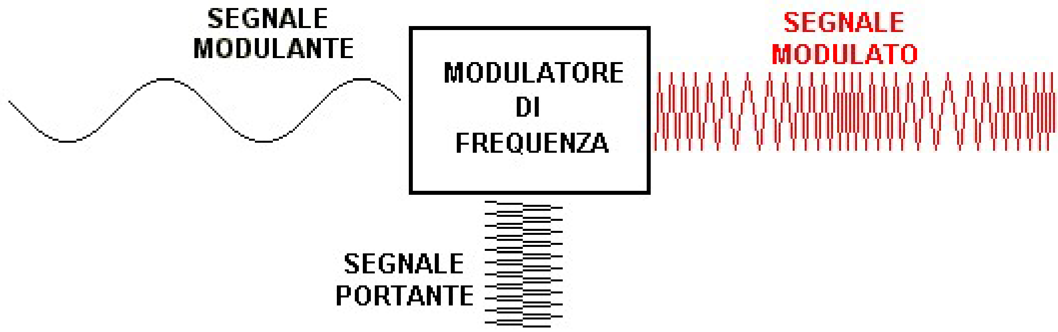
2.3.7 Modulazione di frequenza

Inventata da **Armstrong** nel 1935, ma regolamentata solo nel 1961 in Europa all'interno delle radiodiffusioni stereofoniche, costituisce un considerevole miglioramento rispetto alla AM sia per immunità ai disturbi cui è invece molto soggetta la AM, che per numero di canali effettivamente disponibili, che per l'alta fedeltà delle trasmissioni.

È usata anche per la parte audio del segnale televisivo, trasmesso via etere per la televisione analogica, per i cellulari di tipo ETACS, oltre che per alcune trasmissioni dei radioamatori.

Ha lo svantaggio di avere una banda molto maggiore della AM, per cui è stato necessario attribuirle una gamma di frequenze di cento volte più alta per consentire di usare larghezze di banda molto maggiori.

Nella modulazione di frequenza, la frequenza della portante viene fatta variare secondo l'ampiezza della modulante, mentre l'ampiezza della portante rimane invariata, come schematicamente è rappresentato nella figura seguente:



Le radiodiffusioni in stereofonia attualmente usano la FM (Frequency Modulation).

L'insieme delle frequenze, costituito dalla banda stereofonica, è stata normalizzata già nel 1961 dalla F.C.C. (Federal Communications Commission) dai 30 Hz a 15 kHz

Questa banda coincide quasi con la banda di sensibilità dell'orecchio umano che è, mediamente dai 20 Hz a 20 kHz in modo che questo sistema stereofonico consente praticamente di trasmettere tutto quello che l'orecchio umano può sentire.

Diversamente avveniva per le trasmissioni in AM**,** attualmente attive ma in disuso, che avendo una banda di 5 kHz sono molto più simili alla banda telefonica 300 Hz a 3,4 kHz.

Nella AM, infatti, si trasmette la voce umana, ma non la musica, o meglio, non fedelmente, visto che i violini, ad esempio, hanno uno spettro che supera i 9.000 Hz e che quindi è ben trasmesso dalla FM che arriva a 15.000 Hz ma mal trasmesso dalla AM che arriva appena a 5.000 Hz

Nella FM sono presenti: una *modulante* di tipo analogico, ed una *portante* sinusoidale**.**

Un segnale periodico può svilupparsi in serie di Fourier, cioè in una somma di infinite sinusoidi che può essere troncata a quella armonica la cui ampiezza ha valore trascurabile per gli strumenti e i sensi dell'uomo.

Pertanto, è sempre lecito considerare il segnale modulante come costituito da singole sinusoidi. Per semplicità esaminiamo una sola di queste armoniche la cui funzione matematica si può esprimere indifferentemente sia in seno che in coseno.

Ad esempio:

PORTANTE: $v_p(t) = V_p \cos(\omega_p t)$	MODULANTE: $v_m(t) = V_m \cos(\omega_m t)$	Con: $\omega_p >> \omega_m$

Nella modulazione di frequenza (FM), l'ampiezza del segnale modulato è mantenuta costante ed eguale al valore della portante a riposo $\mathbf{V_p}$:

La frequenza invece varia, proporzionalmente all'ampiezza istantanea del segnale modulante ed il massimo scarto di frequenza, rispetto alla frequenza portante a riposo si chiama **Δf** e, in Europa, è uguale a **75 kHz** essendo stato normalizzato nel 1961.

La rapidità con cui avviene tale variazione è determinata dalla rapidità della legge di variazione nel tempo del segnale modulante stesso, ω_m

Pertanto, mentre nella portante a riposo:

$$v_p(t) = V_p \cos \omega_p t$$

la pulsazione ω_p ha valore costante, nel segnale modulato la nuova pulsazione deve essere proporzionale, secondo una costante K_F caratteristica del modulatore, all'ampiezza del segnale modulante:

$$v_m(t) = V_m \cos \omega_m t$$

Dunque la pulsazione istantanea del segnale modulato in FM deve avere la forma:

$$\omega_{FM}(t) = \omega_p + K_F V_m \cos \omega_m t = 2\pi\left(f_p + \frac{K_F V_m}{2\pi}\cos\omega_m t\right) = 2\pi\left(f_p + \Delta f \cos \omega_m t\right)$$

$$\Delta f = \frac{K_F V_m}{2\pi}$$

$$\omega(t) = \frac{d\varphi(t)}{dt}$$

$$d\varphi(t) = \omega(t)dt$$

$$\varphi(t) = \int\left(\omega_p + K_F V_m \cos\omega_m t\right) dt = \omega_p t + \frac{K_F V_m}{\omega_m} sen\omega_m t$$

$$v_{FM}(t) = V_p \cos\left(\omega_p t + \frac{K_F V_m}{\omega_m} sen\, \omega_m t\right) = V_p \cos\left(\omega_p t + m sen\, \omega_m t\right)$$

$$m = \frac{K_F V_m}{\omega_m} = \frac{K_F V_m}{2\pi f_m} = \frac{\Delta f}{f_m}$$

$$v_{FM}(t) = V_p \cos\left(\omega_p t + m sen\, \omega_m t\right)$$

In base alla serie di Bessel si dimostra che il segnale suddetto, rappresentante la modulazione in frequenza di una portante sinusoidale con una modulante sinusoidale, è rappresentato da infinite sinusoidi secondo l'espressione matematica:

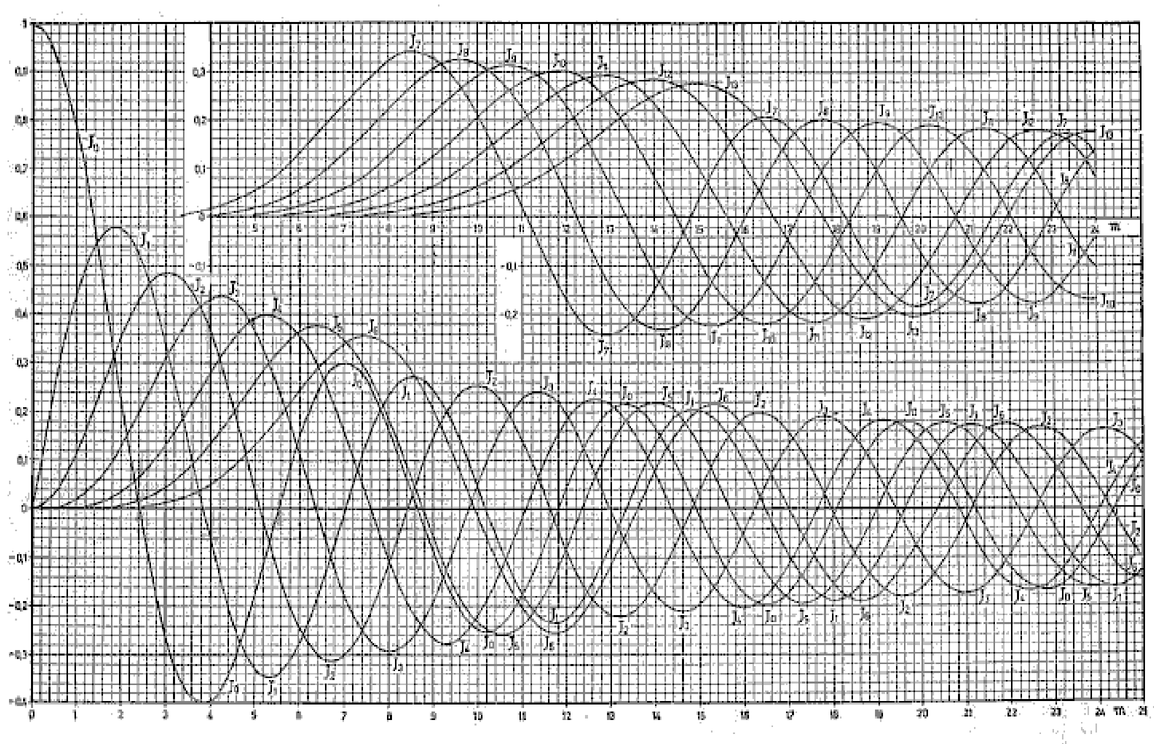
$$v(t) = V_p J_0(m) sen\, \omega_p t +$$

$$+ V_p J_1(m)\left[sen(\omega_p + \omega_m)\, t - sen(\omega_p - \omega_m)\, t\right] +$$

$$+ V_p J_2(m)\left[sen(\omega_p + 2\omega_m)t + sen(\omega_p - 2\omega_m)t\right] +$$

$$+ V_p J_3(m)\left[sen(\omega_p + 3\omega_m)\, t - sen(\omega_p - 3\omega_m)\, t\right] +$$

$$+ V_p J_4(m)\left[sen(\omega_p + 4\omega_m)\, t + sen(\omega_p - 4\omega_m)\, t\right] + \ldots$$



Sull'asse delle ascisse vi è l'indice di modulazione ***m*****,** e sulle ordinate le funzioni di Bessel J_0, J_1, J_2, ...

Le funzioni di Bessel possono assumere valori inferiori a 1 in modulo ed anche il valore 0.

Si deduce che per alcuni valori dell'indice di modulazione ***m*****,** alcune righe dello spettro del segnale modulato in FM possono sparire.
Si chiamano zeri di Bessel quei valori dell'indice di modulazione m (2,4; 5,5; 8,7; 11,8; ecc.) che annullano J_0, per cui la trasmissione avviene in assenza di portante, e quindi con rendimento del 50%.

Abbiamo quindi visto che in contrasto alla modulazione di ampiezza, la modulazione angolare di un singolo tono produce una serie di armoniche. In altre parole AM è un processo lineare mentre FM non è un processo lineare.

2.3.8 Calcolo dello spettro del segnale modulato in FM

Per lo studio dello spettro, cioè dell'insieme di tutte le sinusoidi che rappresentano nel dominio della frequenza il segnale modulato, è più semplice fare un esempio.

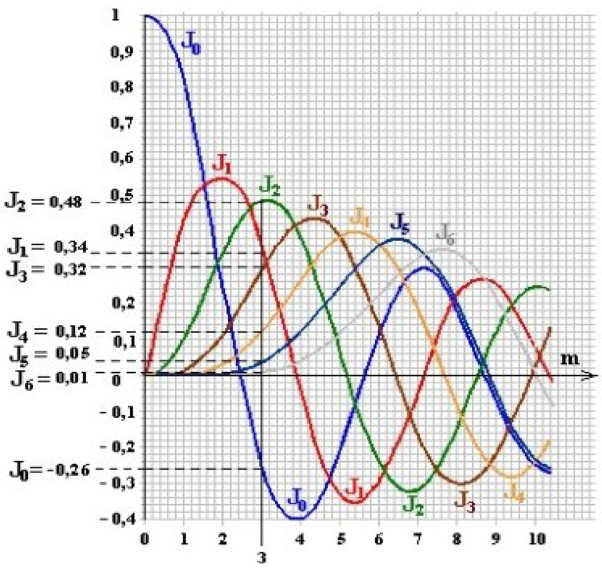
Si traccia lo spettro di un segnale in modulazione di frequenza (FM) con:

- **f_p=100 MHz**
- **f_m= 15 kHz**
- **Δf = 45 kHz**
- **V_p= 100 V**

Si determina il valore di **m** in base alla formula:

$$m = \frac{\Delta f}{f_m} = \frac{45.000}{15.000} = 3$$

Si traccia, sul diagramma delle funzioni di Bessel, un segmento parallelo all'asse delle ordinate in corrispondenza del valore **m = 3** dell'indice di modulazione e, dall'intersezione con tutte le curve **J_0, J_1, J_2, ...**, si determinano i valori che queste funzioni **J_0, J_1, J_2, ...**, assumono come è schematicamente indicato nella figura sotto:



Risulta, dal grafico:

J_0 = - 0,26

J_1 = 0,34

J_2 = 0,48

J_3 = 0,32

J_4 = 0,12

J_5 = 0,05

J_6 = 0,01

E quindi le ampiezze delle righe spettrali, in **Volt** *sono:*

$$J_0 V_p = |-0{,}26| \cdot 100 = 26V$$

$$J_1 V_p = 0{,}34 \cdot 100 = 34V$$

$$J_2 V_p = 0{,}48 \cdot 100 = 48V$$

$$J_3 V_p = 0{,}32 \cdot 100 = 32V$$

$$J_4 V_p = 0{,}12 \cdot 100 = 12V$$

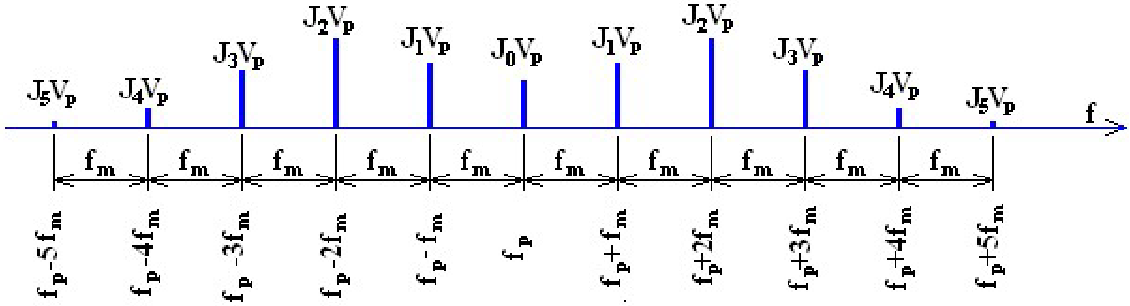
$$J_5 V_p = 0{,}05 \cdot 100 = 5V$$

Si definisce **larghezza di banda** di un segnale FM l'insieme delle frequenze di valore significativo che lo costituiscono e cioè, nel caso in esame, di ampiezza superiore all'**1%** della portante non modulata.

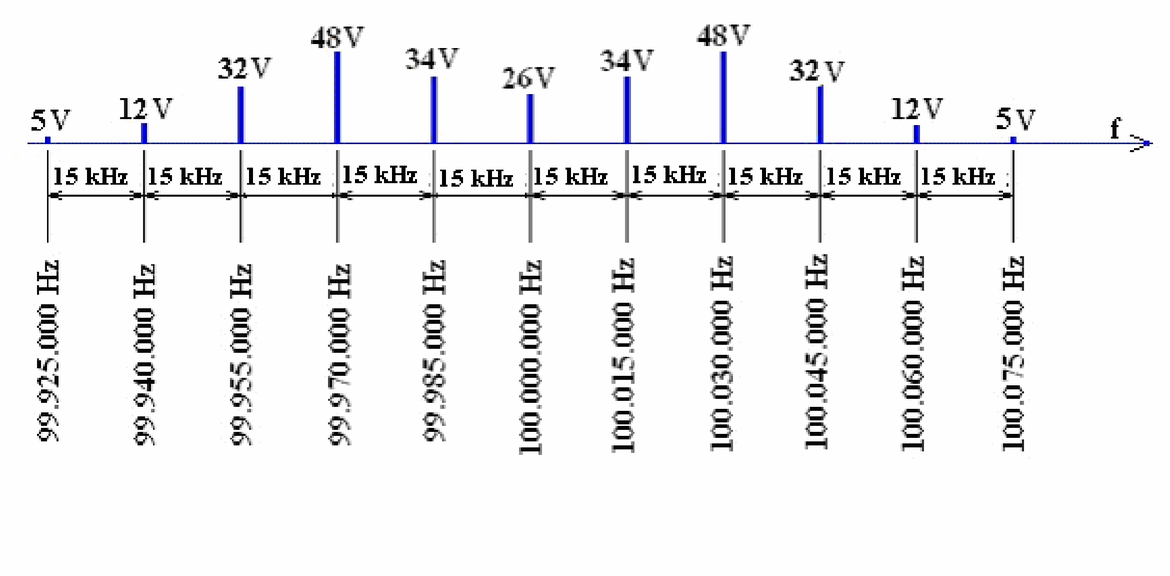
Nel caso in esame, osservando che nelle funzioni di Bessel il valore di riferimento della portante non modulata, cioè $\mathbf{J_0}$ con **m=0** è uguale a **1**, si stabilisce di considerare come facenti parte integrante della **banda** del segnale modulato in FM soltanto quelle funzioni di Bessel il cui valore in corrispondenza al valore di **m** prescelto, sia superiore, in modulo, a **0,01**.

Ecco perché in questo esempio abbiamo escluso $\mathbf{J_6}$, sesta funzione di **Bessel** e le successive.

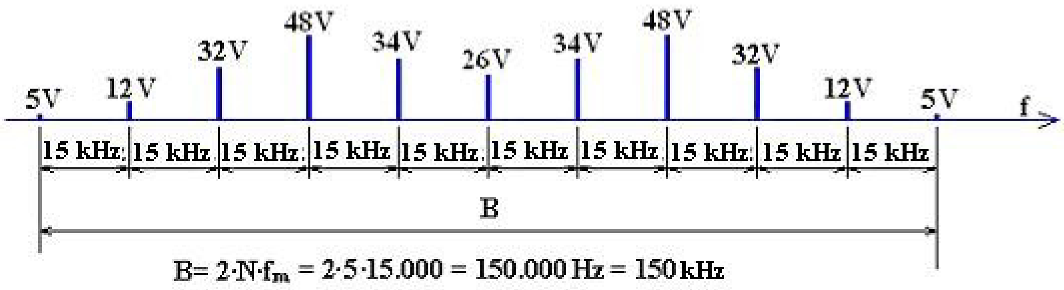
Ottenuti i valori delle funzioni di Bessel, si traccia la **banda** del segnale modulato in FM:



Lo stesso, con i valori numerici risulta:



Nel nostro esempio la larghezza di banda è la seguente:



La formula per determinare la larghezza di banda in FM è dunque:

$$B = 2 \cdot N \cdot f_m$$

Per determinare però la larghezza di banda occorre conoscere i diagrammi delle funzioni di Bessel, cosa che è possibile solo disponendo di un buon analizzatore di spettro.

Si può calcolare la larghezza di banda, sia pure in modo approssimativo, senza disporre né dell'analizzatore di spettro, né delle funzioni di Bessel, usando una formula empirica, dovuta a Carson:

$$B = 2(\Delta f + f\ m\ max)$$

dove **Δf** è il massimo scarto in frequenza rispetto alla portante a riposo, e $\mathbf{f_{m\ max}}$ è la massima frequenza modulante.

Questa formula è tanto più esatta, quanto più **m** è grande, mentre per **m** piccolo non è molto precisa.

Nel caso dell'esempio precedente avrebbe dato:

$$B = 2(45.000 + 15.000) = 120.000\ Hz$$

2.3.8 Misurazioni in FM con l'analizzatore di spettro

In pratica, lo spettro di un segnale FM non è infinito.

Le ampiezze dello spettro diventano trascurabili oltre ad una certa frequenza al variare dell'indice di modulazione β

$$\beta = \Delta f_p / f_m = \Delta \phi_p$$

dove

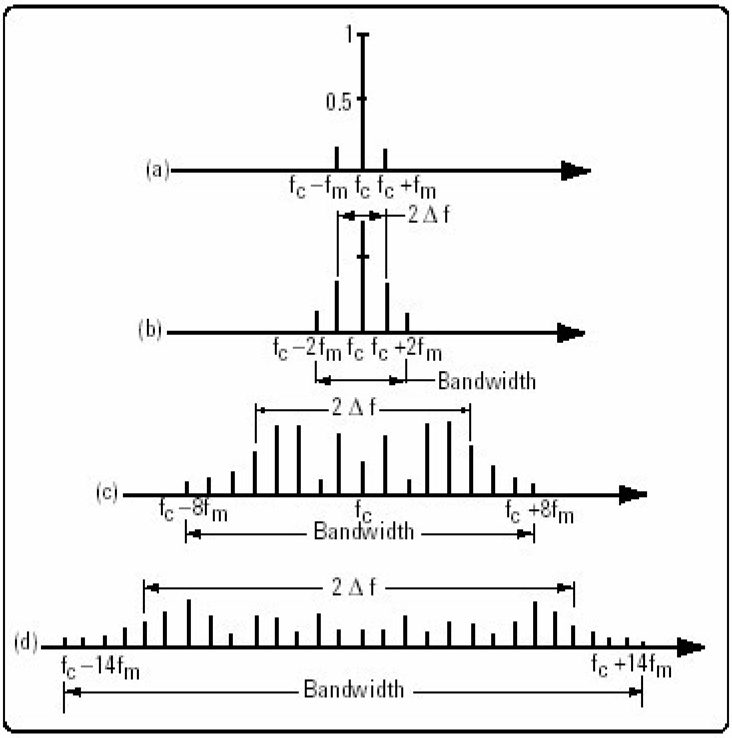
β = indice di modulazione

Δf_p = deviazione di frequenza di picco

f_m = frequenza del segnale modulante

$\Delta\varphi_p$ = deviazione di fase di picco

Ora si veda il comportamento spettrale di un segnale FM per valori diversi di β. Nella figura seguente si vedono gli spettri di un segnale per β = 0.2, 1, 5, e 10



Spettro di un segnale FM (segnale modulante sinusoidale f_m fissato, ed ampiezza Δf_p variante)

(a) β = 0,2

(b) β = 1

(c) β = 5

(d) β =10

Il segnale modulante sinusoidale (*tono*) ha la frequenza costante f_m, così β è proporzionale alla sua ampiezza. Nella figura seguente, l'ampiezza del segnale modulante è mantenuto costante e β è variato cambiando la frequenza modulante f_m

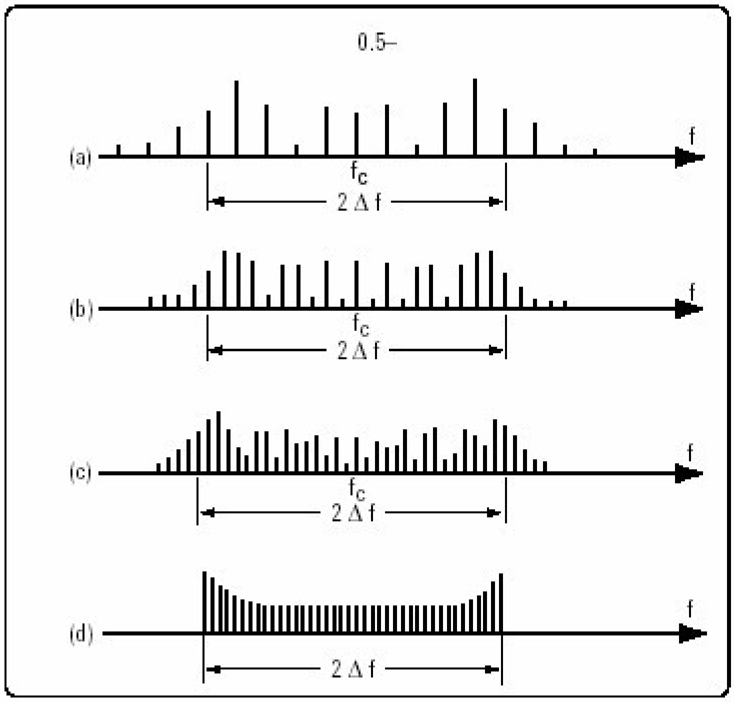
Spettro di un segnale FM (ampiezza Δf_p fissato, e segnale modulante f_m variante)

(a) $\beta = 5$

(b) $\beta = 10$

(c) $\beta = 15$

(d) $\beta \rightarrow \infty$



Due importanti fatti emergono dalle figure precedenti:

- Per un indice di modulazione molto basso (β meno di 0.2) troviamo il doppio della larghezza di banda del segnale modulante. La richiesta di larghezza di banda in questo caso è il doppio di f_m, come per una AM.
- Per un indice di modulazione molto alto (β più di 100), la larghezza di banda è due volte Δf_p

Le figure che seguono mostrano il display dell'analizzatore con due segnali FM, rispettivamente uno a β=0.2 e l'altro a β=95

Portante

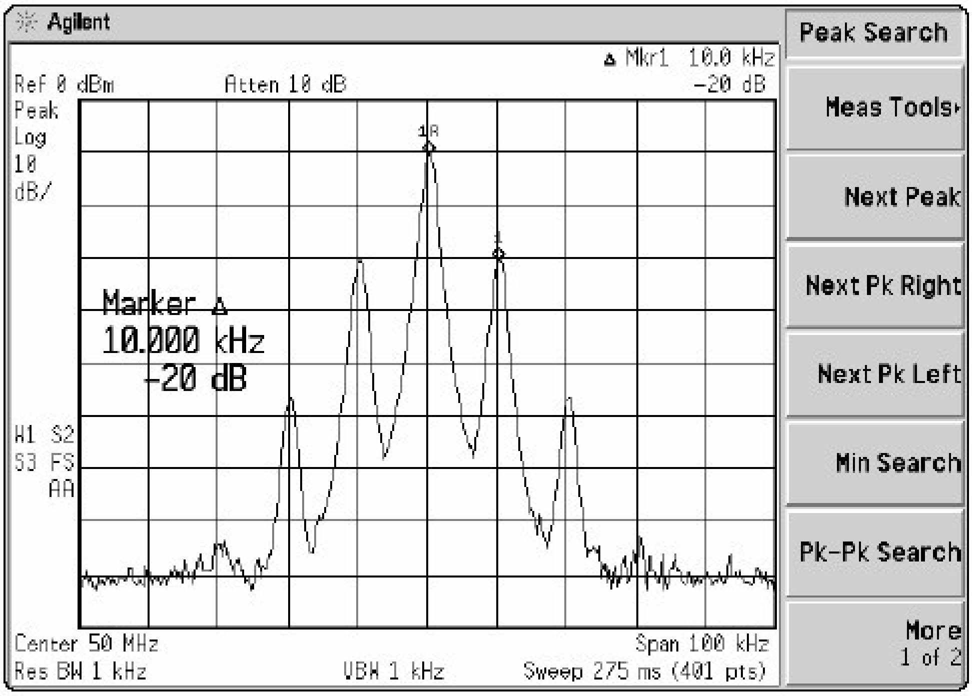
modulata

a 50 MHz

con

f_m = 10 kHz

e β = 0,2



Portante

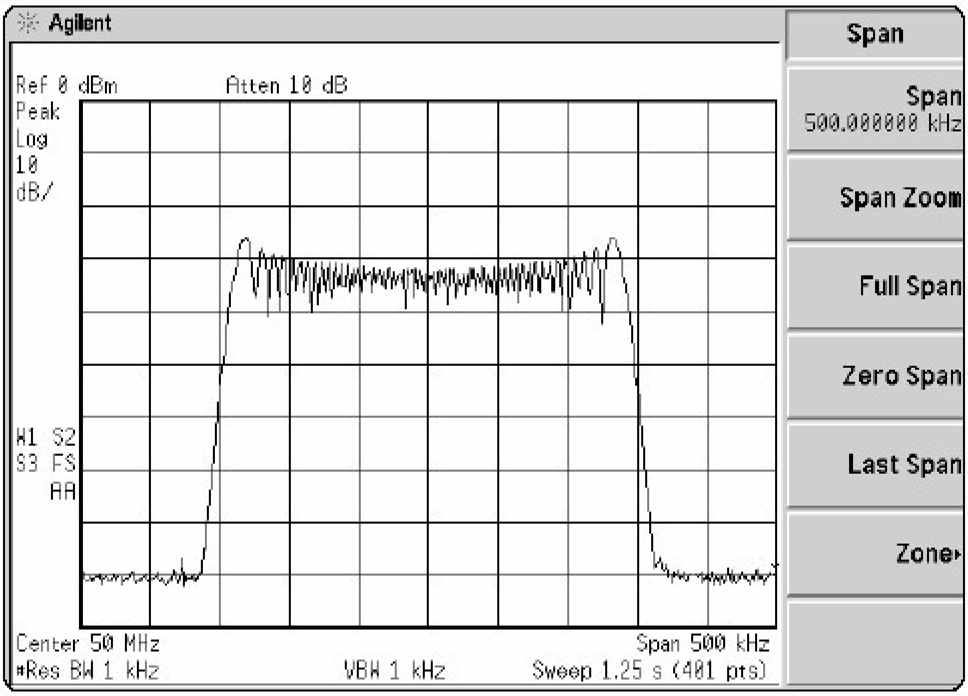
modulata

a 50 MHz

con

f_m = 1,5 kHz

e β = 95



Possiamo calcolare la necessaria larghezza di banda B usando la seguente approssimazione:

$$B = 2\ \Delta f_{peak} + 2\ f_m$$

oppure

$$B = 2\ f_m\ (1 + \beta)$$

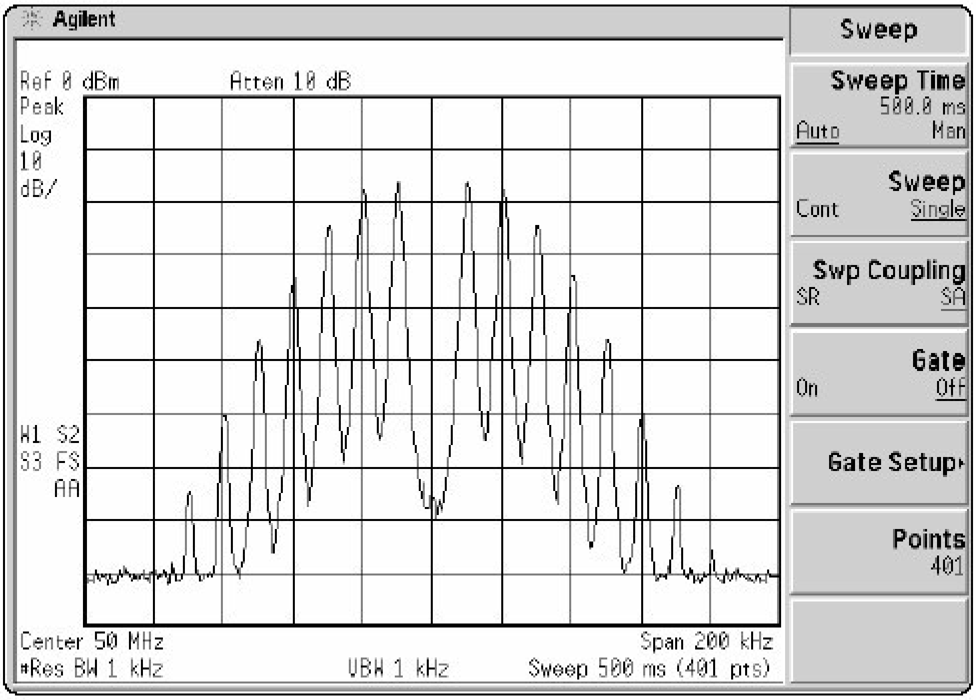
Una stazione FM ha una massima deviazione di frequenza (determinata dalla massima ampiezza del segnale modulante) di Δf_{picco} = 75 kHz. La più alta frequenza del segnale modulante f_m è 15 kHz. Questa combinazione produce un indice di modulazione β=5 ed il segnale risultante ha una larghezza di banda uguale 8 volte il doppio della banda del segnale modulante. Così la larghezza di banda può essere calcolata come 2 x 8 x 15 Hz = 240 kHz. Per frequenza di modulazione al di sotto dei 15 kHz (con la stessa ampiezza), l'indice di modulazione aumenta più di 5 e la larghezza di banda eventualmente si avvicina 2 Δf_{picco} = 150 kHz

Si può, quindi, calcolare la larghezza di banda richiesta in trasmissione usando la più alta frequenza in modulazione f_m e la massima deviazione di frequenza di picco Δf_{picco}

L'analizzatore di spettro è uno strumento molto utile per misurare il Δf_{picco} e β.

Nella figura successiva si mostra una modulazione di frequenza di 10 kHz ed un indice di modulazione β=2,4 con una deviazione di frequenza Δf_p=24 kHz

Questo è lo spettro di un segnale FM a 50 MHz.
La f_m è 10kHz, di conseguenza Δf_p=2,4x10kHz =24kHz



Siccome si può settare con precisione la frequenza modulata usando un analizzatore di spettro e siccome l'indice modulazione è anche conosciuto, la deviazione di frequenza così generata sarà ugualmente precisa.

2.4 Modulazione numerica

Si chiamano modulazioni numeriche quel tipo di modulazioni in cui il segnale modulante è di tipo numerico, vengono impiegate nella trasmissione dati fra modem, nei ponti radio, nei cellulari, nei collegamenti via satellite.