Contenuti aggiuntivi su matrici e determinanti, Dimostrazioni del Capitolo 3

Dimostrazione 3.10 Sia $W = \mathcal{L}(\mathcal{C}_A) \leq \mathbb{K}$. Osserviamo che $\mathcal{S}'$ è una base di W. Infatti $\mathcal{S}'$ è indipendente, inoltre ogni vettore di W dipende da $\mathcal{C}_A$, e quindi anche da $\mathcal{S}'$, poiché $\mathcal{S}'$ è indipendente massimale in $\mathcal{C}_A$. Pertanto $\dim W = q$. Poiché $\mathcal{S}$ è indipendente massimale in $\mathcal{R}_A$, ogni riga di A dipende da $\mathcal{S}$. In altre parole, esiste una matrice $K = (k_{s,t})$ di tipo (m, p) tale che

$$\begin{aligned}
A_1 &= k_{1,1}A_{i_1} + k_{1,2}A_{i_2} + \cdots + k_{1,p}A_{i_p} \\
A_2 &= k_{2,1}A_{i_1} + k_{2,2}A_{i_2} + \cdots + k_{2,p}A_{i_p} \\
&\vdots \\
A_m &= k_{m,1}A_{i_1} + k_{m,2}A_{i_2} + \cdots + k_{m,p}A_{i_p}
\end{aligned}$$

Ognuna di tali relazioni vettoriali equivale ad n relazioni scalari

$$\begin{gathered}
a_{1,1} = k_{1,1}a_{i_1,1} + \cdots + k_{1,p}a_{i_p,1} \ ; \ \ldots \ ; \ a_{1,n} = k_{1,1}a_{i_1,n} + \cdots + k_{1,p}a_{i_p,n} \\
a_{2,1} = k_{2,1}a_{i_1,1} + \cdots + k_{2,p}a_{i_p,1} \ ; \ \ldots \ ; \ a_{2,n} = k_{2,1}a_{i_1,n} + \cdots + k_{2,p}a_{i_p,n} \\
\vdots \\
a_{m,1} = k_{m,1}a_{i_1,1} + \cdots + k_{m,p}a_{i_p,1} \ ; \ \ldots \ ; \ a_{m,n} = k_{m,1}a_{i_1,n} + \cdots + k_{m,p}a_{i_p,n}
\end{gathered}$$

Rileggendo per colonne, abbiamo

$$A^1 = a_{i_1,1}K^1 + \cdots + a_{i_p,1}K^p \ ; \ \ldots \ ; \ A^n = a_{i_1,n}K^1 + \cdots + a_{i_p,n}K^p$$

e cioè le colonne di A dipendono dalle p colonne di K. Pertanto, lo spazio W generato dalle colonne di A ha dimensione non maggiore di p, ovvero $q \leq p$. Analogamente, scambiando il ruolo di righe e colonne, si prova che $p \leq q$.

Per affrontare la teoria dei determinanti, con un approccio diverso da quello del libro di testo, premettiamo un risultato relativo all'uso delle operazioni elementari sulle righe di una matrice. Indichiamo con $M_n(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici quadrate di ordine n.

Lemma 1 *Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$, e sia $\rho(A) = n$. Allora A può trasformarsi, con operazioni elementari sulle righe, in I_n.*

Dimostrazione. Sia $A \in M_n(\mathbb{K})$, e sia $\rho(A) = n$. Già sappiamo che A può trasformarsi, con operazioni elementari sulle righe, in una matrice a scala B di rango n. Quindi B è del tipo

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \ldots & b_{1,n} \\ 0 & b_{2,2} & \ldots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{n,n} \end{pmatrix}$$

con gli elementi della diagonale tutti non nulli (osserviamo che B è triangolare alta). Mediante le operazioni del terzo tipo

$$R_1 \rightsquigarrow R_1 - \frac{b_{1,j}}{b_{j,j}} R_j,\ j = 2, \ldots, n\ ;\ R_2 \rightsquigarrow R_2 - \frac{b_{2,j}}{b_{j,j}} R_j,\ j = 3, \ldots, n\ ;\ etc.$$

B si trasforma nella matrice diagonale

$$D = \begin{pmatrix} b_{1,1} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{2,2} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & b_{n,n} \end{pmatrix} .$$

Mediante le operazioni del primo tipo

$$R_j \rightsquigarrow \frac{1}{b_{j,j}} R_j,\ j = 1, \ldots, n$$

D si trasforma in I_n. □

Definizione 2 *Sia* det : $M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$. *Se l'applicazione* det *soddisfa le proprietà*

D_1 $\det(I_n) = 1$

D_2 *Se* $\rho(A) < n$ *allora* $\det(A) = 0$

D_3 det *è lineare sulle righe*

prende il nome di funzione determinante, *o più semplicemente,* determinante.

Lemma 2 *Siano* $A, A' \in M_n(\mathbb{K})$ *e supponiamo che* A' *si ottenga da* A *mediante una operazione elementare sulle righe. Le proprietà* D_2, D_3 *implicano che*

(a) *Se* A' *si ottiene da* A *mediante una operazione elementare del primo tipo* ($R_h \rightsquigarrow \lambda R_h,\ \lambda \neq 0$), $\det A' = \lambda \det A$.

(b) *Se* A' *si ottiene da* A *mediante una operazione elementare del secondo tipo* ($R_i \leftrightsquigarrow R_j$), $\det A' = -\det A$.

(c) *Se* A' *si ottiene da* A *mediante una operazione elementare del terzo tipo* ($R_h \rightsquigarrow R_h + \lambda R_k$), $\det A' = \det A$.

Dimostrazione. La (a) è implicita nella D_3. Proviamo la (c). Consideriamo la matrice

$$A'' = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_{i-1} \\ \lambda A_j \\ A_{i+1} \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} .$$

Per la D_3 abbiamo che $\det A' = \det A + \det A''$; inoltre la matrice A'' ha due righe proporzionali (A_j compare come j-ma riga e λA_j compare come i-ma riga), quindi $\rho(A) < n$) e $\det A'' = 0$ per la D_2. Proviamo la (b). Consideriamo le matrici

$$A''' = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i+A_j \\ \vdots \\ A_i+A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \; ; \; B = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_i \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \; ; \; C = \begin{pmatrix} A_1 \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_j \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix}$$

dove $A_i + A_j$ compare come riga i-ma e come riga j-ma in A''', A_i compare come riga i-ma e come riga j-ma in B e A_j compare come riga i-ma e come riga j-ma in C. Anche in questo caso A''', B, C hanno rango minore di n, e quindi determinante nullo, e per la D_3 abbiamo

$$0 = \det A''' = \det A + \det B + \det C + \det A' = \det A + \det A'$$

e cioè $\det A' = -\det A$. □

Teorema 3 *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste un'unica funzione determinante.*

Dimostrazione. Dimostriamo l'unicità. A tale scopo, supponiamo che $\det, \det'$ siano due funzioni determinanti e proviamo che $\det = \det'$, ovvero che $\det(A) = \det'(A)$ per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$. Se $\rho(A) < n$ ciò è ovvio, in quanto, per la D_2, $\det(A) = \det'(A) = 0$. Sia dunque $\rho(A) = n$. Come osservato nel Lemma 1, A si trasforma in I_n con un numero finito di operazioni elementari sulle righe. Poiché tali operazioni sono reversibili, è vero anche che I_n si trasforma in A con un numero finito di operazioni elementari sulle righe. Per la D_1, $\det(I_n) = \det'(I_n) = 1$, e quindi, per il Lemma 2, sarà anche $\det(A) = \det'(A)$. Dimostriamo ora l'esistenza della funzione determinante, procedendo per induzione su n. Sia $n = 1$. Una matrice A di ordine 1 è del tipo $A = (\lambda)$, dove $\lambda \in \mathbb{K}$, e possiamo porre $\det A = \lambda$. La verifica delle proprietà richieste è in questo caso banale. Supponiamo ora che $n > 1$ e che esista una funzione determinante $\det : M_h(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, per ogni $h < n$. Per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$, poniamo

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{(i,1)} \ . \tag{1}$$

Proviamo che la funzione det così definita verifica le proprietà D_1, D_2, D_3. La D_1 è ovvia. La D_3 è verificata, poiché ogni addendo $(-1)^{i+1} a_{i,1} \det A_{(i,1)}$ è, per ipotesi induttiva, lineare sulle righe, essendo $A_{(i,1)}$ una matrice di ordine $n-1$. Proviamo infine la D_2. Sia $\rho(A) < n$. Esiste allora una riga di A che dipende dalle altre. Sia, ad esempio,

$$A_1 = \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n \ .$$

Si ha dunque che

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_2 A_2 + \cdots + \alpha_n A_n \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} \ .$$

e quindi, per la D_3, già dimostrata,

$$\det A = \alpha_2 \det \begin{pmatrix} A_2 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \alpha_3 \det \begin{pmatrix} A_3 \\ A_2 \\ A_3 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} + \alpha_n \det \begin{pmatrix} A_n \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{pmatrix} .$$

In ogni addendo compare il determinante di una matrice che ha due righe uguali. Basta quindi provare che det si annulla sulle matrici con due righe uguali. Sia dunque B una matrice di ordine n con due righe uguali, ad esempio sia $B_r = B_s$, con $r > s$. Si ha

$$\det B = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} b_{i,1} \det B_{(i,1)} = (-1)^{r+1} b_{r,1} \det B_{(r,1)} + (-1)^{s+1} b_{s,1} \det B_{(s,1)} \ ,$$

poiché negli altri addendi compare lo scalare $\det B_{(i,1)}$, e la matrice $B_{(i,1)}$ ha ordine $n-1$ (e quindi ad essa si applica l'ipotesi induttiva), ed ha due righe uguali, essendo $i \neq r$ e $i \neq s$. Poiché $B_r = B_s$, sarà, in particolare, $b_{r,1} = b_{s,1}$, e $B_{(r,1)}$ si ottiene da $B_{(s,1)}$ con $r-s-1$ scambi di righe adiacenti (ovvero con $r-s-1$ applicazioni di operazioni elementari sulle righe del secondo tipo). Pertanto, per l'ipotesi induttiva e per il Lemma 2, $\det B_{(s,1)} = (-1)^{r-s-1} \det B_{(r,1)}$. Quindi

$$\begin{aligned} \det B &= (-1)^{r+1} b_{r,1} \det B_{(r,1)} + (-1)^{s+1} b_{s,1} \det B_{(s,1)} \\ &= (-1)^{r+1} b_{r,1} \det B_{(r,1)} + (-1)^{s+1} b_{r,1} (-1)^{r-s-1} \det B_{(r,1)} \\ &= (-1)^{r+1} b_{r,1} \det B_{(r,1)} + (-1)^{r} b_{r,1} \det B_{(r,1)} = 0 \end{aligned}$$

e, pertanto, anche la D_2 è dimostrata. $\square$

La (1) prende il nome di *sviluppo (secondo Laplace) del determinante mediante la I colonna.* La dimostrazione del Teorema 3 funziona anche, banalmente, se si utilizza un'altra colonna, ad esempio la k-ma, e si pone

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{i,k} \det A_{(i,k)} \ , \tag{2}$$

e, poiché si è provata l'unicità della funzione determinante, la (2) e la (3) daranno luogo allo stesso risultato. La (2) prende il nome di *sviluppo (secondo Laplace) del determinante mediante la k-ma colonna.*

Esercizio *Se A è una matrice triangolare (alta o bassa) si ha* $\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{i,i}$.

Esercizio *Se A è una matrice quadrata, di ordine n, e $\rho(A) = n$, si ha* $\det A \neq 0$.

Teorema 4 *Per ogni matrice quadrata A, di ordine n, si ha* $\det A = \det A^t$.

Dimostrazione. Definiamo un'altra funzione $\det' : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ponendo $\det'(A) := \det(A^t)$, per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$. Dimostreremo che $\det'$ soddisfa le proprietà D_1, D_2, D_3, ovvero è una funzione determinante, e quindi, per l'unicità del determinante, si avrà che $\det(A) = \det'(A) = \det(A^t)$. La D_1 e la D_2 sono ovvie (I_n è simmetrica e il rango di una matrice coincide con il rango della sua trasposta). Resta dunque da dimostrare che $\det'$ è lineare sulle righe, ovvero che det è lineare sulle colonne, e ciò è agevole, utilizzando lo sviluppo del determinante per colonne. $\square$

A questo punto è chiaro che ogni osservazione o risultato concernente le righe vale anche per le colonne, e viceversa. In particolare, per ogni $h \in \{1, \ldots, n\}$, si ha

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{h+j} a_{h,j} \det A_{(h,j)}$$

e tale formula prende il nome di *sviluppo (secondo Laplace) del determinante mediante la h-ma riga.*

Prima di enunciare il prossimo teorema, noto come *Teorema di Binet*, ricordiamo che se A, B sono due matrici ed è possibile effettuare il prodotto righe per colonne AB, si ha che $\rho(AB) \leq \min\{\rho(A), \rho(B)\}$. Per verificare ciò, enunceremo un risultato che riguarda le applicazioni lineari composte.

Teorema 5 *Siano V, V', V'', tre spazi vettoriali su uno stesso campo $\mathbb{K}$, siano $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ due applicazioni lineari e consideriamo la loro composta $g \circ f : V \to V''$.*

(i) $\operatorname{im}(g \circ f) \subseteq \operatorname{im} g$*;*

(ii) $\ker f \subseteq \ker(g \circ f)$*.*

Dimostrazione. Per provare la (i), osserviamo che $\operatorname{im}(g \circ f) = (g \circ f)(V) = g(f(V)) \subseteq g(V') = \operatorname{im} g$. Per quanto riguarda la (ii), consideriamo un elemento $\mathbf{v} \in \ker f$. Abbiamo che $f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$ e quindi $(g \circ f)(\mathbf{v}) = g(f(\mathbf{v})) = g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, ovvero $\mathbf{v} \in \ker(g \circ f)$. $\square$

Corollario 6 *Siano $A \in \mathcal{M}_{(m,n)}$ e $B \in \mathcal{M}_{(\ell,m)}$ due matrici, e consideriamo il prodotto (righe per colonne) $BA \in \mathcal{M}_{(\ell,n)}$.*

(i) $\rho(BA) \leq \rho(B)$*;*

(ii) $\rho(BA) \leq \rho(A)$*.*

Dimostrazione. Utilizziamo il teorema precedente. Poniamo $\dim V = n$, $\dim V' = m$, $\dim V'' = \ell$ e, fissate delle basi ordinate $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ di V, V', V'' rispettivamente, consideriamo le matrici $A = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(f)$, $B = M_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}''}(g)$. Ad esempio si può porre $V = \mathbb{R}^n$, $V' = \mathbb{R}^m$, $V'' = \mathbb{R}^\ell$, considerare le rispettive basi standard, e porre $f = \omega_A$, $g = \omega_B$. È chiaro che $BA = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}''}(g \circ f)$. Dalla prima parte del teorema precedente, abbiamo che

$$\rho(BA) = \dim \operatorname{im}(g \circ f) \leq \dim \operatorname{im} g = \rho(B) \ .$$

Dal fatto che $\ker f \subseteq \ker(g \circ f)$ segue invece che $n - \rho(A) = \dim \ker f \leq \dim \ker(g \circ f) = n - \rho(BA)$, ovvero $\rho(BA) \leq \rho(A)$. $\square$

Teorema 7 *Siano A, B, due matrici quadrate di ordine n. Si ha che* $\det(AB) = \det(A) \cdot \det B$.

Dimostrazione. Per ogni $B \in M_n(\mathbb{K})$, definiamo un'applicazione $f : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ponendo $f(A) := \det(AB)$, per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$. È chiaro che f è lineare sulle righe. Inoltre, poiché $\rho(AB) \leq \rho(A)$, se $\rho(A) < n$ anche $\rho(AB) < n$ e si ha che $f(A) = 0$. Infine $f(I_n) = \det B$. Se $\rho(B) = n$, e quindi $\det B \neq 0$, definiamo $\det' : M_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ ponendo $\det'(A) := \frac{1}{\det B} f(A)$, per ogni $A \in M_n(\mathbb{K})$. Per quanto osservato a proposito di f, è chiaro che $\det'$ soddisfa le proprietà D_1, D_2, D_3, ovvero è una funzione determinante, e quindi, per l'unicità del determinante, si avrà che $\det(A) = \det'(A) = \frac{1}{\det B} f(A) = \frac{1}{\det B} \det(AB)$, da cui l'asserto. Sia, infine, $\rho(B) < n$, e cioè $\det B = 0$. Poiché $\rho(AB) \leq \rho(B)$, si avrà $\det(AB) = 0$ e l'asserto è verificato anche in questo caso.

□

Teorema degli Orlati (3.41) *Siano $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ e sia $B = A^{j_1,\dots,j_p}_{i_1,\dots,i_p}$ una sua sottomatrice quadrata di ordine p tale che $\det B \neq 0$. Supponiamo inoltre che ogni orlato di B sia degenere, ovvero che, per ogni $h, k \in \{1, \dots, n\}$ si abbia $\det A^{j_1,\dots,j_p,k}_{i_1,\dots,i_p,h} = 0$. Si ha allora che*

(i) *$\rho(A) = p$;*

(ii) *Il sistema $\mathcal{S} = [A_{i_1}, \dots, A_{i_p}]$ è un sottosistema indipendente massimale del sistema $\mathcal{R}_A$ delle righe di A;*

(iii) *Il sistema $\mathcal{S}' = [A^{j_1}, \dots, A^{j_p}]$ è un sottosistema indipendente massimale del sistema $\mathcal{C}_A$ delle colonne di A.*

Dimostrazione. È chiaro che basta provare la (ii). Verifichiamo che $\mathcal{S}$ è indipendente. Poiché $\det B \neq 0$, si ha che $\rho(B) = p$ e quindi le sue colonne sono indipendenti. Ma allora sarà anche $\rho(A^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_p}) = p$. Infatti $A^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_p}$ ha solo p righe, e quindi il suo rango è non maggiore di p. D'altra parte le p colonne di B, che sono indipendenti, sono anche colonne di $A^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_p}$. Quindi le p righe di $A^{1,\dots,n}_{i_1,\dots,i_p}$, che compongono il sistema $\mathcal{S}$ sono indipendenti. Vogliamo ora provare che $\mathcal{S}$ è indipendente massimale in $\mathcal{R}_A$, ovvero che, per ogni $h \in \{1, \dots, n\}$, la riga A_h dipende da $\mathcal{S}$. Sappiamo che, per ogni $h, k \in \{1, \dots, n\}$, si ha $\det A^{j_1,\dots,j_p,k}_{i_1,\dots,i_p,h} = 0$. Sviluppiamo tale determinante secondo la $(p+1)$-ma colonna:

$$0 = \det A^{j_1,\dots,j_p,k}_{i_1,\dots,i_p,h} = \pm\big(a_{i_1,k}\lambda_1 + \cdots + a_{i_p,k}\lambda_p + a_{h,k}\lambda \big)$$

dove $\lambda = \det B \neq 0$. Osserviamo che i coefficienti $\lambda_1, \dots, \lambda_p, \lambda$ non dipendono da k: Pertanto, al variare di k, otteniamo la relazione vettoriale

$$\lambda_1 A_{i_1} + \cdots + \lambda_p A_{i_p} + \lambda A_h = \mathbf{0}$$

ovvero

$$A_h = (-\tfrac{\lambda_1}{\lambda})A_{i_1} + \cdots + (-\tfrac{\lambda_p}{\lambda})A_{i_p} \ ,$$

e quindi A_h dipende da $\mathcal{S}$.

□