

## Capitolo 2 RICHIAMI DI MECCANICA

### 2.1 GEOMETRIA DELLE MASSE

La seconda equazione cardinale della dinamica, della quale si tratterà nel seguito, mostra con chiarezza che il comportamento dinamico di un sistema dipende non solo dalla sua massa ma dalla distribuzione della stessa. In questa parte si richiamano brevemente i concetti di base sulla geometria delle masse.

#### 2.1.1 Baricentro e momenti statici

Si consideri un sistema di  $n$  masse puntiformi, rigidamente interconnesse. Siano  $\vec{r}_1; \vec{r}_2; \dots; \vec{r}_n$  i vettori che individuano la posizione di ciascuna delle masse (v. fig.2.1).

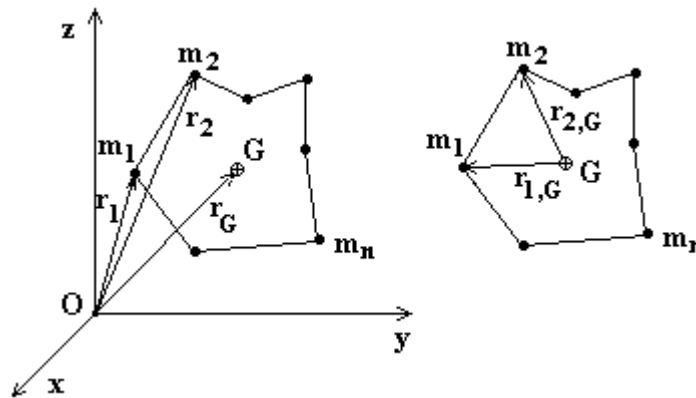


Fig.2.1

La posizione del baricentro è data da:

$$\vec{r}_G = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \dots + m_n \vec{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} = \frac{\sum_1^n m_s \vec{r}_s}{M}$$

Avendo indicato con  $M = \sum_1^n m_s$  la massa totale del sistema.

Il prodotto di ciascuna massa per la sua distanza da un asse (o da un punto)  $m_i r_i$  è detto momento statico della massa stessa rispetto all'asse assegnato.

Il baricentro G di un sistema di masse è quel punto rispetto al quale il risultante dei momenti statici delle masse che lo compongono è nullo; detta  $r_{i,G}$  la distanza della generica massa i-esima dal baricentro G, risulta:

$$\sum_1^n m_i \vec{r}_{i,G} = 0 \quad (2.1)$$

Per un corpo a massa distribuita (V. fig.2.2) avente volume V e densità  $\delta$ , la posizione del baricentro è data da:

$$\vec{r}_G = \frac{1}{M_v} \int \delta \vec{r} dv$$

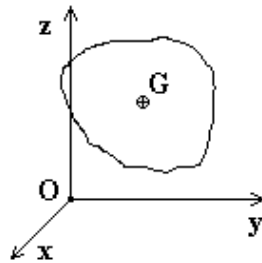


Fig.2.2

### **Esempio 2.1**

Si consideri il sistema in fig.2.3, costituito da due masse che supporremo puntiformi, i cui baricentri sono indicati da  $G_1$  e  $G_2$ , posti a distanza d tra di loro. La posizione del baricentro del sistema si trova facilmente applicando la (2.1) ossia la condizione per la quale, rispetto ad esso la somma dei momenti statici è nulla:

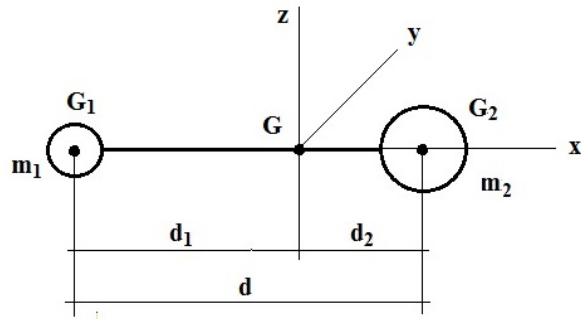


Fig.2.3

$$m_1 d_1 + m_2 d_2 = 0$$

ed ovviamente risulta:

$$d_1 d_2 = d$$

Dalle due precedenti relazioni si ricava facilmente:

$$d_1 = d m_2 / (m_1 + m_2)$$

$$d_2 = d m_1 / (m_1 + m_2)$$

Si osservi che, un momento statico, essendo costituito dal prodotto di una massa per una lunghezza, nel S.I. si misura in kg m.

### 2.1.2 Momenti di inerzia di massa

Per un sistema di masse puntiformi si definiscono momenti di inerzia di massa rispetto ai tre assi \$x\$, \$y\$, \$z\$ le quantità:

$$I_{xx} = \sum_1^n m_s (y_s^2 + z_s^2)$$

$$I_{yy} = \sum_1^n m_s (x_s^2 + z_s^2)$$

$$I_{zz} = \sum_1^n m_s (x_s^2 + y_s^2)$$

Analogamente, per un corpo a massa distribuita:

$$I_{xx} = \int_V (y_s^2 + z_s^2) dm$$

$$I_{yy} = \int_V (x_s^2 + z_s^2) dm$$

$$I_{zz} = \int_V (x_s^2 + y_s^2) dm$$

A titolo di esempio, per il sistema rappresentato in fig.2.3, risulterà:

$$I_{xx} = 0$$

$$I_{yy} = I_{zz} = (m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2)$$

Si osservi infine che, un momento di inerzia di massa, essendo costituito dal prodotto di una massa per una lunghezza al quadrato, nel S.I. si misura in  $\text{kg m}^2$ .

Si definiscono prodotti d'inerzia o momenti centrifughi le quantità:

a) Sistema di masse puntiformi:

$$I_{xy} = I_{yx} = \sum_1^n m_s x_s y_s$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \sum_1^n m_s x_s z_s$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \sum_1^n m_s y_s z_s$$

b) Sistema a massa distribuita.

$$I_{xy} = I_{yx} = \int_V x y \, dm$$

$$I_{xz} = I_{zx} = \int_V x z \, dm$$

$$I_{yz} = I_{zy} = \int_V y z \, dm$$

### 2.1.2.1 Assi e terne di riferimento

#### Asse baricentrico

Si osservi la fig. 2.4: è evidente che ciascuno degli assi rappresentati, passando per il baricentro è detto asse baricentrico.

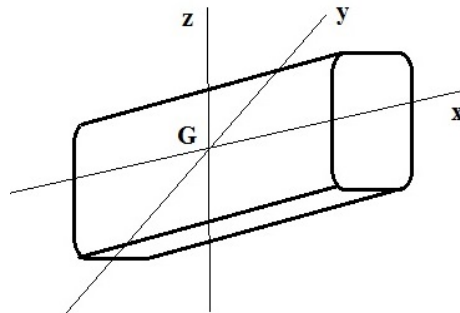


Fig.2.4

#### Asse principale di inerzia

Osservando ancora la figura 2.4 si può facilmente vedere che rispetto a ciascuno degli assi rappresentati, la distribuzione di massa dell'oggetto risulta quella mediamente più "vicina" possibile o più "lontana" possibile dall'asse considerato. Ciò non si verifica più se l'asse assume direzione diversa da quella mostrata nell'esempio.

Di tutti gli assi che si possano considerare, quelli rispetto ai quali il momento di inerzia di S è il massimo o il minimo possibile sono detti assi principali di inerzia.

#### Asse centrale di inerzia

Un asse baricentrico e principale di inerzia è detto centrale di inerzia.

### Terne di riferimento

Una terna la cui origine coincide con il baricentro è detta terna baricentrica.

Se gli assi sono principali di inerzia è detta terna principale di inerzia.

Se è baricentrica e principale di inerzia, la terna è detta terna centrale di inerzia.

#### 2.1.2.2 Momento d'inerzia rispetto ad un altro asse

Sia  $I_{cc}$  il momento di inerzia di un corpo  $S$  di massa  $M$  rispetto ad un asse  $c$ . Si dimostra che il momento di inerzia di massa  $I_{tt}$  di  $S$  rispetto ad un asse  $t$ , parallelo all'asse  $c$  e posto a distanza  $d$  da quest'ultimo, vale:

$$I_{tt} = I_{cc} + M d^2$$

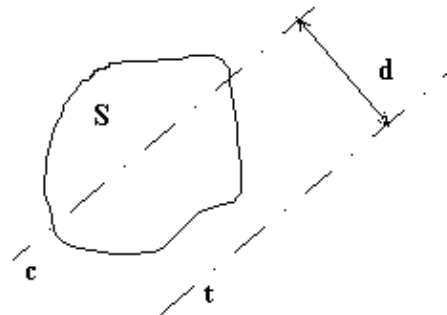


Fig.2.5

#### 2.1.2.3 Raggi di inerzia

Il raggio di inerzia  $\rho$ , rispetto ad un asse, si può semplicemente definire come quella lunghezza che elevata al quadrato e moltiplicata per la massa  $M$  di un sistema fornisce il valore del momento di inerzia rispetto all'asse considerato:

$$I_{xx} = \rho_{xx}^2 M \Rightarrow \rho_{xx} = \sqrt{I_{xx}/M}$$

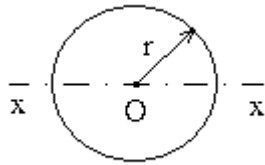
$$I_{xy} = \rho_{yy}^2 M \Rightarrow \rho_{yy} = \sqrt{I_{xy}/M}$$

$$I_{zz} = \rho_{zz}^2 M \Rightarrow \rho_{zz} = \sqrt{I_{zz}/M}$$

A titolo di esempio, si riportano le espressioni del raggio di inerzia di alcune figure piane e di alcuni solidi:

### Figure piane

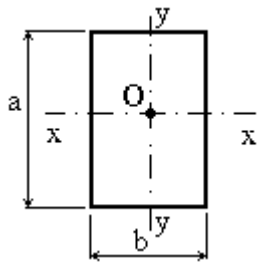
Cerchio



$$\rho_{xx}^2 \text{ (rispetto ad un qualsiasi diametro)} = r^2/4$$

$$\rho_o^2 \text{ (rispetto ad un asse, normale al cerchio e passante per il centro)} = r^2/2$$

Rettangolo

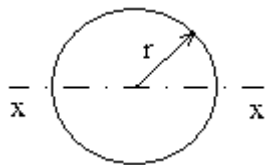


$$\rho_{xx}^2 = 1/12 a^2$$

$$\rho_{yy}^2 = 1/12 b^2$$

$$\rho_o^2 = 1/12 (a^2 + b^2)$$

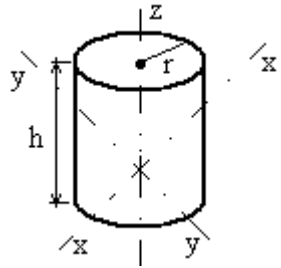
Solidi



Sfera

$$\rho_{xx}^2 \text{ (rispetto ad un qualsiasi diametro)} = 2/5 r^2$$

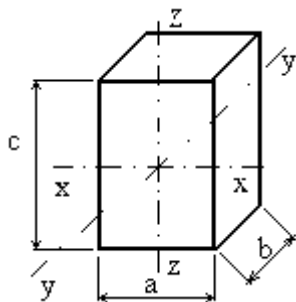
Cilindro



$$\rho^2_{xx} = \rho^2_{yy} = 1/12 h^2 + 1/4 r^2$$

$$\rho^2_{zz} = r^2/2$$

Parallelepipedo

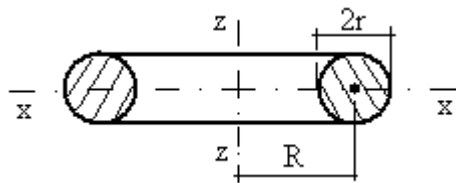


$$\rho^2_{xx} = 1/12 (b^2 + c^2)$$

$$\rho^2_{yy} = 1/12 (a^2 + c^2)$$

$$\rho^2_{zz} = 1/12 (a^2 + b^2)$$

Toro



$$\rho^2_{xx} = R^2/2 + 5/8 r^2$$

$$\rho^2_{zz} = R^2 + 3/4 r^2$$

**Esempio 2.II**

Un solido di acciaio ( $\delta=7,8 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ ), mostrato in figura, ha la forma di un parallelepipedo. Calcolare il momento di inerzia di massa del solido

rispetto all'asse g.

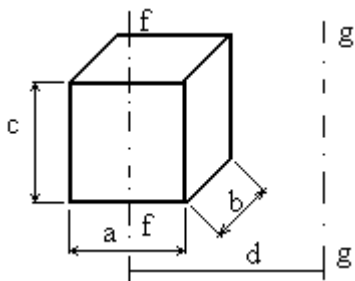
Sono noti:

a = 100 mm

b = 150 mm

c = 250 mm

d = 300 mm



Il volume è pari a :  $0,1 \cdot 0,15 \cdot 0,25 = 3,75 \times 10^{-3} \text{ m}^3$   
 La massa è pari a :  $3,75 \times 10^{-3} \cdot 7,8 \times 10^3 = 29,25 \text{ kg}$   
 Il raggio di inerzia  $\rho_{ff}^2 = 1/12 (a^2 + b^2) = 2,71 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$ .  
 Per cui:  $I_{ff} = 7,93 \times 10^{-2} \text{ kg m}^2$   
 Ed infine:  $I_{gg} = I_{ff} + M d^2 = 2,71 \text{ kg m}^2$

## 2.2 RICHIAMI DI CINEMATICA

### 2.2.1 Moto di un corpo puntiforme

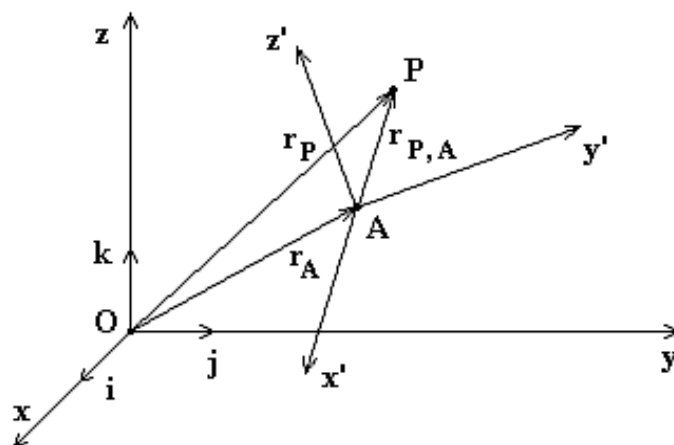


Fig. 2.6

Si consideri un punto A individuato dal vettore posizione  $\vec{r}_A$  ed un punto P del quale è nota la posizione rispetto al punto A,  $\vec{r}_{P,A}$ . La posizione di P è data da:

$$\vec{r}_P = \vec{r}_A + \vec{r}_{P,A} \quad (2.2)$$

La velocità si ottiene derivando rispetto al tempo la (2.2):

$$\vec{v}_p = \frac{d\vec{r}_p}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{p,A}}{dt} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{p,A} + \vec{v}_r \quad (2.3)$$

Dove :

$$\vec{v}_r = \dot{x}'\vec{i} + \dot{y}'\vec{j} + \dot{z}'\vec{k}$$

Il secondo e terzo termine a II membro della (2.3) rappresentano la velocità di P nel riferimento Ax'y'z', mentre  $v_A$  è la velocità di trascinamento.

Derivando la (2.3), si ottiene l'accelerazione:

$$\vec{a}_p = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{p,A}) + \frac{d\vec{v}_r}{dt} \quad (2.4)$$

I termini nella relazione valgono:

$$\frac{d\vec{v}_A}{dt} = \vec{a}_A \quad \text{Accelerazione della terna Ax'y'z'}$$

$$\frac{d\vec{v}_r}{dt} = \vec{a}_r + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{p,A}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}_{p,A} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}_{p,A}}{dt} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}_{p,A} + \vec{\omega} \wedge \vec{v}_r + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{p,A})$$

In definitiva quindi:

$$\vec{a}_p = \vec{a}_r + \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}_{p,A} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{p,A}) + 2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$$

dove:

$\vec{a}_r$  Accelerazione di P rispetto ad A

$\vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}_{p,A} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{p,A})$  Accelerazione di trascinamento

$2\vec{\omega} \wedge \vec{v}_r$  Accelerazione complementare (Coriolis)

L'ultimo termine a II membro è sempre presente quando si consideri il moto di un punto come moto rispetto ad un riferimento mobile.

## 2.2 MOTO DI UN CORPO RIGIDO

### 2.2.1 Definizione di corpo rigido

Un corpo S si definisce rigido se, la distanza tra due punti qualsiasi che lo costituiscono (ad esempio il vettore  $\mathbf{r}_{P,A}$  in figura ha modulo costante) non varia nel tempo.

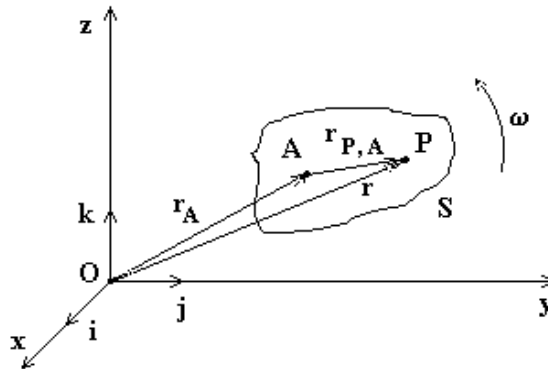


Fig. 2.7

### 2.2.2 Moto di un corpo rigido

Nota la posizione di un generico punto A appartenente ad S, la posizione di un generico punto P, sempre appartenente ad S, è data da:

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_A + \bar{\mathbf{r}}_{P,A} \quad (2.5)$$

La variazione della posizione del punto P è data da:

$$d\bar{\mathbf{r}} = d\bar{\mathbf{r}}_A + d\bar{\mathbf{r}}_{P,A} \quad (2.6)$$

Poiché S è rigido, il vettore  $\vec{r}_{P,A}$  non può variare in modulo, ma solo in direzione:

$$d\vec{r} = d\bar{\vartheta} \wedge \vec{r}_{P,A} \quad (2.7)$$

avendo indicato con  $d\vartheta = \omega dt$  il vettore spostamento angolare del corpo S che ruota con velocità angolare  $\omega$ .

Derivando rispetto al tempo la (2.6) e tenendo conto della (2.7), si ottengono la velocità e l'accelerazione del punto P:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}_A}{dt} + \frac{d\vec{r}_{P,A}}{dt} = \vec{v}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{P,A} \quad (2.8)$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}_A}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}_{P,A} + \vec{\omega} \wedge \frac{d\vec{r}_{P,A}}{dt} = \vec{a}_A + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}_{P,A} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_{P,A}) \quad (2.9)$$

E' da osservare che gli ultimi due termini a II membro della (2.9) rappresentano l'accelerazione di P dovuta al moto rotatorio di quest'ultimo, con velocità  $\omega$ , attorno al punto A.

Quanto appena detto è valido per il caso più generale. Si esaminano ora casi particolari.

#### 2.2.2.1 Moto traslatorio

In questo caso la velocità di rotazione  $\omega$  è nulla, per cui:

$$d\vec{r} = d\vec{r}_A ; \quad \vec{v} = \vec{v}_A ; \quad \vec{a} = \vec{a}_A$$

Cioè tutti i punti di S si muovono con la stessa legge del moto.

#### 2.2.2.2 Moto rotatorio

Se il corpo S ruota attorno ad un punto fisso nello spazio (ad esempio l'origine degli assi O in fig.2.7), detto  $\vec{r}$  il vettore che unisce un generico punto P ad un punto fisso O, velocità ed accelerazione di P sono date da:

$$\vec{v} = \omega \wedge \vec{r}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r} - \omega^2 \vec{r}$$

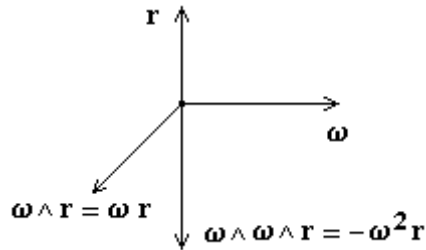


Fig.2.8

La figura consente di visualizzare il motivo per il quale risulta  $\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r}$

### 2.2.2.3 Moto piano

Il moto di un corpo rigido  $S$  si dice piano se la distanza di tutti i punti appartenenti ad  $S$  mantengono costante la loro distanza da un piano fisso  $x, y$ .

In questo caso, quindi, il moto di  $S$  consiste in una traslazione in una direzione parallela al piano  $x, y$  ed una rotazione attorno ad un asse ortogonale al piano. Il piano  $x, y$  è detto piano del moto.

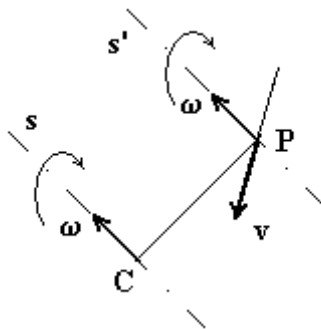


Fig.2.9

Occorre ricordare che una rotazione con velocità  $\omega$  attorno ad un asse  $s$  è pari (teorema del trasporto) ad una rotazione, ancora con velocità  $\omega$ , attorno ad un asse  $s'$  parallelo ad  $s$  più una traslazione con velocità  $V$  in direzione ortogonale al piano formato da  $\omega$  e dal segmento di minima distanza tra  $s$  ed  $s'$ .

Per quanto detto è quindi facile capire che, in un moto rigido, è sempre possibile definire un asse  $s$ , normale al piano del moto, rispetto al quale il moto del corpo  $S$  consiste in una pura rotazione attorno a tale asse.

Detto  $C$  il punto di intersezione di tale asse  $s$  con il piano del moto  $x, y$  (V. fig.2.10), istante per istante il moto del corpo rigido  $S$  sul piano può essere visto come una rotazione con velocità  $\omega$  attorno ad un punto  $C$ , la cui posizione, nel caso generale, non è fissa. Il punto  $C$  prende il nome di centro di istantanea rotazione.

Nell'istante in cui il centro di istantanea rotazione è il punto  $C$  in fig.2.10, la velocità del punto  $P$  di  $S$  vale:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_{P,C} = \vec{\omega} \wedge (P - C) \quad (2.10)$$

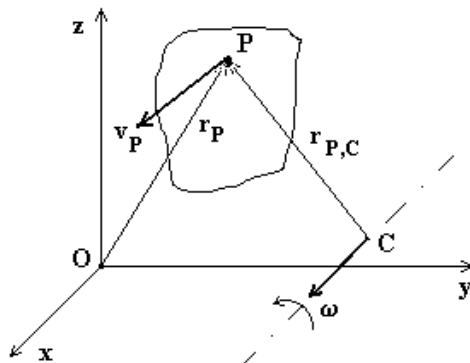


Fig.2.10

Si osservi che il centro di istantanea rotazione ha velocità nulla ma, in generale l'accelerazione non è nulla e dipende dal moto del corpo  $S$ .

Nel caso particolare in cui il corpo  $S$  ha un punto fisso (ad es. il punto  $O$  di fig.2.10), tale punto è, in ogni istante, il centro di istantanea rotazione. Velocità ed accelerazione sono ricavabili facilmente dalle (2.8) e (2.9) rispettivamente:

$$\vec{v}_P = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_P = \vec{\omega} \wedge (P - O)$$

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \vec{r}_P + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_P) = (\dot{\omega} + \omega^2) \vec{r}_P$$

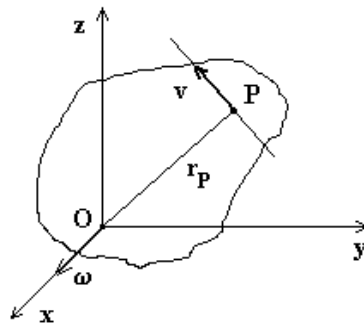


Fig.2.11

#### 2.2.2.4 Un esempio di applicazione di moto piano

Si consideri un veicolo, rappresentato in pianta in fig. 2.12, per il quale ciascuna delle due ruote motrici è mossa da un proprio motore, in modo indipendente dall'altra.

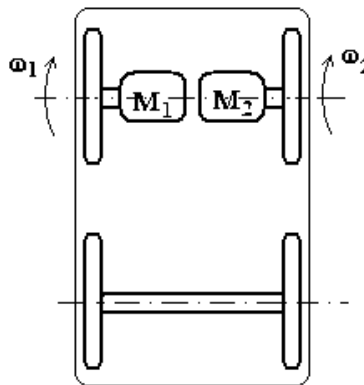


Fig. 2.12

Il moto del veicolo è un moto piano; come visto nel paragrafo precedente, il moto di S consiste in una traslazione in una direzione parallela al piano del moto ed una rotazione attorno ad un asse ortogonale al piano. Poiché, inoltre, è possibile ritenere il veicolo un corpo rigido, è sufficiente conoscere la traiettoria di un punto qualsiasi del veicolo per poter ricavare la traiettoria di un qualsiasi altro punto appartenente ad esso.

Il centro di ciascuna delle due ruote traslerà in una direzione parallela al piano del moto con velocità  $V_{1-2}$  che, detto  $r_{1-2}$  il raggio di rotolamento di ciascuna delle due ruote ed  $\omega_{1-2}$  la sua velocità di rotazione, vale:

$$V_{1-2} = \omega_{1-2} \cdot r_{1-2}$$

Ogni punto dell'assale trasla con una velocità compresa tra  $V_1$  e  $V_2$ , che dipende dalla sua posizione.

Si consideri allora il punto medio P dell'assale delle due ruote motrici, come mostrato in fig.2.13.

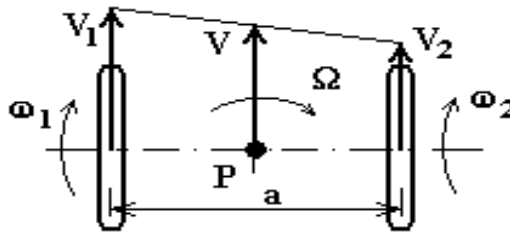


Fig. 2.13

In generale, tale punto trasla con velocità  $V$  (sempre in direzione parallela al piano del moto) data da:

$$V = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

e ruota attorno ad un asse, perpendicolare al piano del moto e passante per P, con una velocità  $\Omega$ ; tale velocità si ricava in modo evidente dalla fig. 2.14,b. Risulta infatti:

$$V_1 = \Omega(r + \frac{a}{2}) \quad ; \quad V_2 = \Omega(r - \frac{a}{2})$$

$$V_1 - V_2 = \Omega(r + \frac{a}{2} - r + \frac{a}{2}) = \Omega a$$

$$\Omega = \frac{V_1 - V_2}{a}$$

La distanza tra i punti medi delle due ruote  $a$  è detta carreggiata.

Per quanto visto nel paragrafo precedente (cfr. fig. 2.10) una rotazione con velocità  $\omega$  attorno ad un asse è pari ad una rotazione, con la stessa velocità angolare, attorno ad un altro asse parallelo al primo più una traslazione in direzione ortogonale al piano formato da  $\omega$  e dal segmento di minima distanza tra i due assi (teorema del trasporto). Nel caso in esame, dunque, il moto del punto P (traslazione e rotazione) è equivalente ad una pura rotazione attorno ad un asse parallelo al precedente e quindi ancora perpendicolare al piano di moto. Detto C il punto del piano del moto che rappresenta la traccia del nuovo asse di rotazione sul piano del moto, la distanza R, detto raggio di curvatura della traiettoria, di C da P si ottiene dalla 2.9:

$$V = \overline{PC} \cdot \Omega \Rightarrow R = \overline{PC} = V/\Omega \quad (2.10')$$

In fig. 2.14 sono riportate tre possibili condizioni di funzionamento:

1) Le velocità di rotazione delle ruote sono uguali; di conseguenza, se i loro raggi di rotolamento sono uguali (come normalmente avviene) le velocità di avanzamento delle ruote sono uguali (v. fig. 2.9,a). In questo caso risulta:

$$V_1 = V_2 = V \Rightarrow \Omega = 0 \Rightarrow R = \infty$$

2) Le velocità di rotazione delle ruote sono diverse (v. fig. 2.9,b). In questo caso il veicolo descrive una curva; velocità di avanzamento e raggio di curvatura si determinano con le relazioni viste in precedenza.

3) Le velocità di rotazione delle ruote sono uguali ed opposte (v. fig. 2.9,c). In questo caso risulta:

$$V_1 = -V_2 \Rightarrow V = 0 \Rightarrow \Omega = \frac{2V_1}{a} \Rightarrow R = 0$$

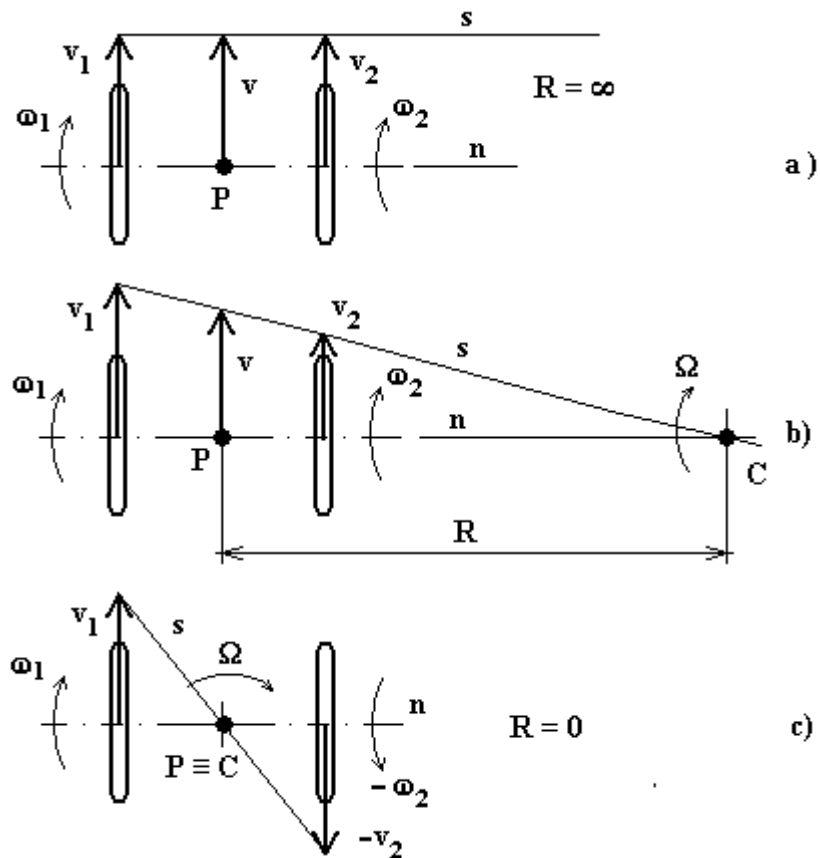


Fig. 2.14

## 2.3 RICHIAMI DI DINAMICA

### 2.3.1. Classificazione delle forze

La classificazione di una forza può essere fatta da punti di vista diversi. Si può distinguere infatti tra: forze interne e forze esterne.

Sono forze interne ad un sistema  $S$  tutte quelle forze che una parte del sistema  $S$  esercita su di un'altra parte di esso. E' evidente che, in un

sistema rigido, queste forze non compiono lavoro. Sono invece forze esterne tutte quelle la cui origine è esterna del sistema.

Forze motrici e forze resistenti. Sono forze motrici quelle il cui verso è concorde allo spostamento; il lavoro da loro compiuto è, per convenzione, positivo. Le forze il cui verso è opposto allo spostamento sono resistenti ed il loro lavoro è negativo.

Forze attive e reazioni vincolari. Sono dette reazioni vincolari quelle forze che vengono esercitate sul sistema dai vincoli, esterni o interni, al sistema. Esse, in genere non sono note "a priori" ma vengono determinate da equazioni di equilibrio del tipo della I<sup>a</sup> delle (2.10). Le forze attive sono, invece, quelle che agiscono sul sistema ma non dipendono dalla presenza di vincoli.

### Esempio 2.II

Si consideri il motore a combustione interna rappresentato in fig.2.15.

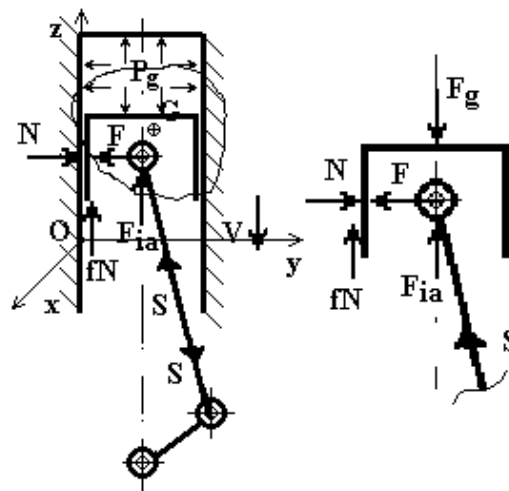


Fig.2.15

Per il sistema costituito da tutto il motore le forze dovute alla pressione dei gas  $P_g$  nella camera di combustione, la forza  $S$  esercitata dalla biella lungo il proprio asse, la forza  $F$  esercitata dal pistone sul cilindro, la reazione  $N$  di quest'ultimo, la forza d'attrito  $fN$  sono tutte forze interne al sistema. La forza d'inerzia alternativa  $F_{ia}$  è una forza esterna.

Se si considera un sistema costituito dal pistone preso a se stante, tutte le forze considerate sono esterne al sistema. Per quest'ultimo sono forze attive:  $F_g$ ;  $F$ ;  $F_{ia}$  ed  $S$ , mentre la  $N$  e la  $f N$  sono reazioni vincolari.

A seconda del verso dell'accelerazione del pistone, la forza d'inerzia alternativa avrà un verso o l'altro.

Se il suo verso è concorde con lo spostamento del pistone, tale forza è motrice, viceversa è resistente. La forza d'attrito  $f N$  ha verso sempre opposto a quello dello spostamento e pertanto è sempre una forza resistente.

### 2.3.2 Le resistenze passive

Le forze resistenti, delle quali si è detto nel paragrafo precedente, si dividono in: resistenti utili e resistenti passive; le prime sono quelle che compiono il lavoro per il quale la macchina o il meccanismo sono stati progettati. Le resistenze passive si oppongono al moto ed il loro lavoro, che si trasforma interamente in calore, rappresenta una perdita che è presente in ogni sistema meccanico.

Le resistenze passive sono rappresentate dalle:

- forze d'attrito;
- resistenze del mezzo
- perdite dovute all'imperfetta elasticità degli organi meccanici.

#### 2.3.2.1 Forze di attrito

Sono forze che nascono dal contatto tra due superfici. Si distinguono in: forze di attrito radente quando il moto relativo tra le due superfici è di strisciamento e forze di attrito volvente quando il moto relativo è di rotolamento.

Il fenomeno dell'attrito è piuttosto complesso ma, nella maggior parte dei casi, la forza di attrito può essere calcolata con la relazione:

$$R = f N$$

dove  $N$  è la forza normale alle due superfici ed  $f$  è il coefficiente di attrito.

Si distingue fra coefficiente di attrito statico che è il valore di  $f$  quando non vi è moto relativo tra le superfici e coefficiente di attrito cinetico che è il valore di  $f$  quando le superfici hanno moto relativo.

Valori indicativi del coefficiente di attrito radente sono riportati nella tabella 2.I. Si osservi che il coefficiente di attrito statico è maggiore di quello cinetico.

**Tab 2.1** : valori (indicativi) del coefficiente di attrito radente

Materiale	f statico	f cinetico
Acciaio su acciaio	0,45÷0,8	0,15÷0,5
Acciaio su ghisa	0,17÷0,24	0,18÷0,24
Acciaio su bronzo	0,4	0,34
Acciaio su ottone	0,51	0,44
Acciaio su ghiaccio	0,027	0,014
Acciaio su alluminio	0,47	0,61
Acciaio su grafite	0,1	0,15
Ghisa su ghisa	0,15	0,14
Acciaio su legno	0,5÷0,65	0,26

L'attrito volvente è dovuto essenzialmente al fatto che le superfici a contatto non sono infinitamente rigide ma si deformano nella zona di contatto. Inoltre, inevitabili errori di lavorazione delle superfici stesse danno luogo ad asperità. In fig.2.14 è mostrato, schematicamente, il rotolamento di un rullo su di una superficie cedevole (fig.2.14,a) e su di una superficie scabrosa (fig.2.14,b).

Nel primo caso la reazione  $N$  del vincolo non è allineata con la forza peso  $P$  e quindi dà luogo ad un momento resistente. Nel secondo caso la velocità con la quale il rullo avanza subisce, a causa del rilievo dovuto alla scabrosità, una brusca variazione di direzione cui corrisponde una variazione di energia cinetica.

E' da osservare che i valori dei coefficienti di attrito riportati sono indicativi poiché essi variano con la pressione tra le due superfici a contatto e la levigatezza delle stesse.

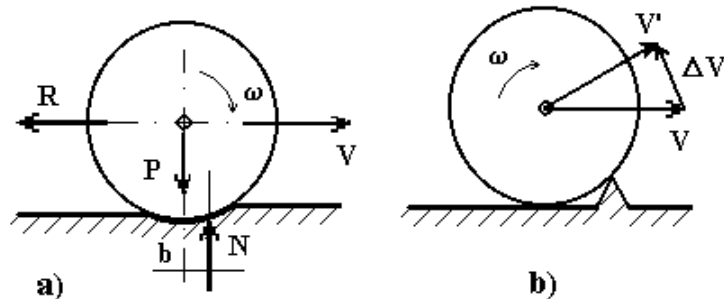


Fig.2.14

E' da osservare ancora che tali valori si riferiscono a superfici asciutte e prive di qualsiasi sostanza che possa fungere da lubrificante. In presenza di lubrificanti, l'attrito si riduce più o meno sensibilmente a seconda del meccanismo di lubrificazione che si viene ad instaurare.

**Tab2.II** : valori (indicativi) del coefficiente di attrito volvente

Materiale	f
Acciaio su acciaio (sup. lisce)	0,0005÷0,002
Acciaio su acciaio (sup. scabrose)	0,005÷0,01
Pneumatici su asfalto asciutto	0,008÷0,012
Pneumatici su asfalto bagnato	
Pneumatici su cemento	0,018÷0,035
Pneumatici su terra battuta	÷
Pneumatici su terra fangosa	0,09÷0,015

#### 2.4.1.2 Resistenza del mezzo

Quando un corpo si muove in un fluido con velocità di avanzamento V diviene sede di una forza F data dalla somma di due componenti: una R nella direzione di V detta resistenza ed una P in direzione ortogonale alla V detta portanza (v.fig.2.15).

Entrambe le componenti sono proporzionali al quadrato della velocità V, alla densità  $\delta$  del fluido ed all'area della sezione retta A del corpo:

$$R = C_R \delta v^2 A/2$$

$$P = C_P \delta v^2 A/2$$

Dove con  $C_R$  e  $C_P$  si sono indicati i coefficienti di resistenza e di portanza. Essi dipendono dalla forma geometrica del corpo e variano con il numero di Reynolds

$$Re = \delta v l / \mu$$

dove:

$\mu$  = viscosità del fluido

$l$  = dimensione caratteristica del corpo

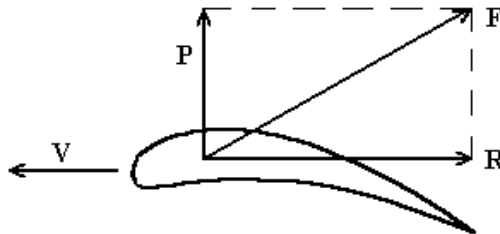


Fig.2.15

## 2.5. LAVORO DI UNA FORZA

Si consideri un punto  $P$  che percorre la traiettoria  $AB$  sotto l'azione di una forza  $F$  (v. Fig.2.16).

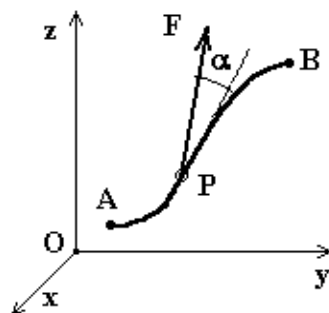


Fig.2.16

Il lavoro elementare  $dL$  compiuto da tale forza lungo lo spostamento infinitesimo  $dP$  vale:

$$dL = F dP = F |dP| \cos\alpha$$

Per quanto detto a proposito della classificazione delle forze il lavoro sarà positivo (ossia motore) se  $\alpha < \pi/2$  ; vice versa sarà negativo (resistente) se  $\alpha > \pi/2$ .

**Esempio 2.III:**

Si consideri il sistema in fig.2.17, costituito da un corpo su di un piano inclinato :

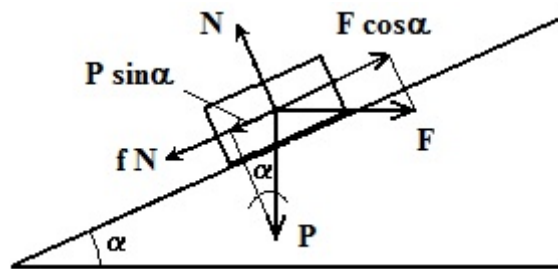


Fig.2.17

Le forze che agiscono sul corpo risultano essere:

$F$  = forza motrice

$P$  = forza resistente utile

$N$  = reazione vincolare

$f N$  = forza resistente passiva

Nei riguardi del moto del corpo, esso si troverà in equilibrio stazionario (ossia fermo o in moto uniforme) se:

$$F \cos\alpha = P \sin\alpha + f N$$

Reversibilità del moto.

Se la forza motrice  $F$  viene tolta, può verificarsi che:

a) Risulta:

$$P \sin\alpha > f N$$

In questo caso la componente della forza peso nella direzione del moto da luogo al moto retrogrado del corpo.

b) Se risulta invece che:

$$P \sin\alpha < f N$$

la componente della forza peso non è sufficiente da luogo al moto retrogrado del corpo ed il meccanismo è irreversibile.

Si osservi che la reversibilità o meno del moto dipende quindi dall'angolo di inclinazione del piano e dal coefficiente di attrito.

## 2.6 ENERGIA CINETICA DI UN SISTEMA MECCANICO

Si consideri un sistema rigido  $S$ ; sia  $G$  il suo baricentro e  $Gxyz$  una terna ad esso solidale.

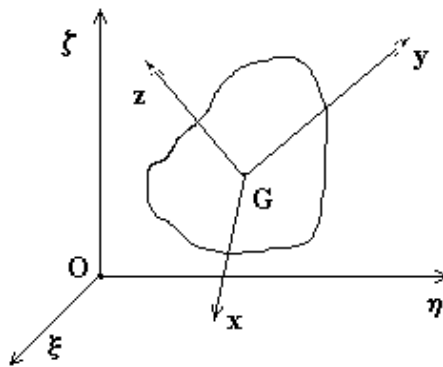


Fig.2.18

Come è noto, l'energia cinetica di S rispetto ad un riferimento fisso vale:

$$E = \frac{1}{2} m v_G^2 + \frac{1}{2} \{\omega\}^T [I] \{\omega\}$$

dove:

m = massa di S

[I] = matrice di inerzia

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{Bmatrix} = \text{velocità angolare di S rispetto al riferimento fisso}$$

### 2.6.1 Il teorema dell'energia cinetica

Si dimostra che, indicando con:

dE = variazione elementare dell'energia cinetica

dL<sup>(e)</sup> = lavoro elementare delle forze esterne

dL<sup>(i)</sup> = lavoro elementare delle forze interne,

vale la relazione:

$$dE = dL^{(e)} + dL^{(i)}$$

Tale relazione esprime il teorema dell'energia cinetica:

Il lavoro che le forze esterne e le forze interne compiono in un intervallo di tempo è pari alla variazione di energia cinetica.

Nel caso di sistema rigido è ovviamente:

$$dE = dL^{(e)}$$

## 2.7 LE EQUAZIONI CARDINALI DELLA DINAMICA

Dato un sistema di punti materiali, ciascuno dei quali ha accelerazione  $a_s$  rispetto ad una terna inerziale, le equazioni cardinali della dinamica si scrivono:

$$\sum_1^n m_s \bar{a}_s = \bar{R}^{(e)}$$

$$\sum_1^n (P_s - O) \wedge m_s \bar{a}_s = \bar{M}_0^{(e)}$$

avendo indicato con:

$P_s - O$  la distanza della generica massa  $m_s$  da un dato polo  $O$ .

$\bar{R}^{(e)}$  il risultante delle forze esterne al sistema

$\bar{M}_0^{(e)}$  il risultante dei momenti delle forze esterne al sistema rispetto ad un dato polo  $O$ .

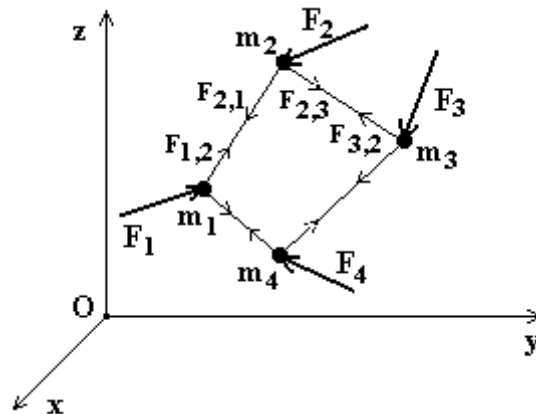


Fig.2.19

E' opportuno ricordare che, in un riferimento inerziale, il risultante delle forze esterne è pari al risultante delle forze attive più il risultante delle reazioni vincolari:

$$\bar{R}^{(e)} = \bar{R}^{(a)} + \bar{R}^{(v)}$$

In un riferimento non inerziale devono, invece, esser considerate anche le forze di inerzia dovute alla accelerazione di trascinamento e quelle dovute alla accelerazione di Coriolis.

Per un sistema a massa distribuita, il momento delle forze di inerzia rispetto ad un asse  $t$ , rispetto al quale il sistema ruota, vale:

$$M_0^{(i)} = I_{tt} \frac{d\omega}{dt}$$

Se si indicano con:

$\vec{R}^{(i)}$  il risultante delle forze di inerzia

$\vec{M}_0^{(i)}$  il risultante dei momenti delle forze di inerzia.

le equazioni cardinali della dinamica si possono scrivere:

$$\vec{R}^{(i)} + \vec{R}^{(a)} + \vec{R}^{(v)} = 0 \tag{2.10}$$

$$\vec{M}_0^{(i)} + \vec{M}_0^{(a)} + \vec{M}_0^{(v)} = 0$$

Queste ultime esprimono il principio di d'Alembert: "In ogni istante lo stato di moto di un sistema meccanico può essere considerato come uno stato di equilibrio se, tra le forze che lo determinano, compaiono anche le forze di inerzia".

Le equazioni cardinali della dinamica consentono dunque di scrivere, per un sistema meccanico, le equazioni che esprimono la condizione di equilibrio dinamico, che vengono dette equazioni del moto del sistema. Esse sono utilizzate per studiare il comportamento dinamico del sistema e consentono di determinare:

- la legge del moto del sistema se sono note le forze che agiscono su di essa;
- le forze che agiscono nel sistema se è noto il moto di quest'ultima.

#### **Esempio 2.IV**

Una massa (supposta puntiforme) di 5 Kg è sottoposta all'azione di tre forze come indicato in fig.2.20 Le tre forze valgono:

$$F_1 = 10 \text{ N}; \quad F_2 = 5 \text{ N}; \quad F_3 = 5 \text{ N}; .$$

Determinare la sua accelerazione.

Occorre innanzi tutto determinare  $\vec{R}^{(e)}$ :

$$R_x^{(e)} = F_1 \cos 45 - F_2 \cos 30 = 7,07 \text{ N} - 4,33 \text{ N} = 2,74 \text{ N}$$

$$R_y^{(e)} = -F_1 \sin 45 - F_2 \sin 30 + F_3 = -7,07 \text{ N} - 2,5 \text{ N} + 5 \text{ N} = -4,57 \text{ N}$$

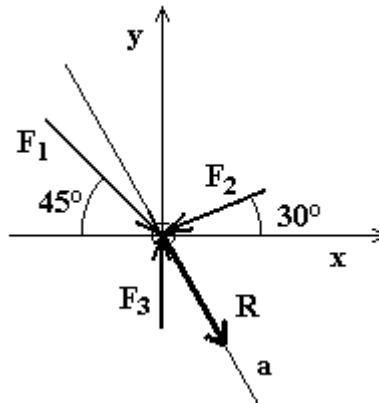


Fig.2.20

da cui:

$$\vec{R}^{(e)} = \sqrt{\vec{R}_x^{(e)2} + \vec{R}_y^{(e)2}} = 5,33 \text{ N}$$

tale risultante agisce lungo una direzione (indicata con a) che forma, con l'asse della x un angolo pari a:

$$\alpha = \text{arc tg } \frac{R_x}{R_y} \cong -59^\circ$$

La massa avrà, lungo tale direzione, una accelerazione pari a:

$$a = 5,33 \text{ N} / 5 \text{ kg} = 1,07 \text{ m s}^{-2}$$

### Esempio 2.V

Sulla massa dell'esempio precedente agiscono resistenze passive il cui risultante è pari a 10 N nella direzione del moto e verso opposto. Se essa si muove con un'accelerazione pari a  $4 \text{ m/s}^2$ , calcolare la forza attiva ad essa applicata. Dalla I equazione cardinale della dinamica:

$$\vec{R}^{(a)} = \vec{R}^{(i)} + \vec{R}^{(v)}$$

dove le reazioni vincolari sono rappresentate, nel nostro caso, dalle resistenze passive e le forze di inerzia valgono, naturalmente:

$$R^{(i)} = - m a = 5 \cdot 4 = 20 \text{ N}$$

Pertanto, la forza attiva applicata alla massa è pari a:

$$R^{(a)} = 20 + 10 = 30 \text{ N}$$

### Esempio 2.VI

Un motore elettrico è collegato ad un organo di macchina come schematicamente mostrato in fig. 2.21.

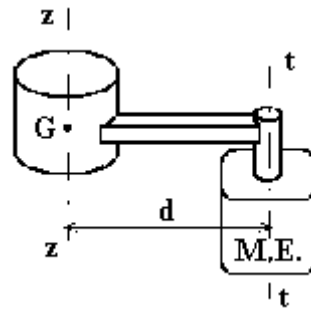


Fig. 2.21

In fig. 2.22 è riportate le dimensioni dell'organo di macchina.

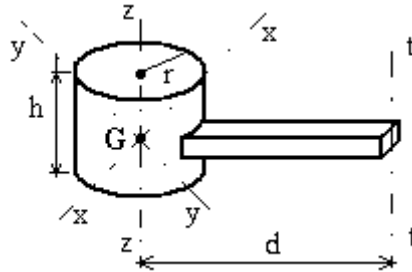


Fig. 2.22

Sono noti:

$$r = 50 \text{ mm} ; h = 200 \text{ mm} ; d = 400 \text{ mm} ; \delta = 7,8 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3.$$

Si determini:

- Il momento delle forze esterne da applicare all'asse  $t$  affinché esso acceleri con una accelerazione angolare pari a  $4 \text{ rad/s}^2$ , nell'ipotesi che il momento delle forze d'attrito sia trascurabile.
- La potenza erogata dal motore elettrico quando, nelle condizioni sopra descritte, ruota ad una velocità di  $3000 \text{ giri/min}$ .

Si trascuri il momento di inerzia di massa dell'organo di collegamento tra il cilindro e l'albero motore.

Dalla II equazione cardinale della dinamica:

$$\vec{M}^{(a)} = \vec{M}^{(i)} + \vec{M}^{(v)}$$

dove le reazioni vincolari sono state, nel nostro caso, ritenute trascurabili ed il momento delle forze di inerzia vale:

$$M^{(i)} = - I_{tt} d\omega/dt$$

Con i dati assegnati risulta (v. par. 2.3.2):

$$\rho_{zz}^2 = r^2/2 = (50 \cdot 10^{-3})^2/2 = 1,25 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$$

$$m = \text{Vol.} \times \delta = \pi r^2 h \delta = \pi (50 \cdot 10^{-3})^2 200 \cdot 10^{-3} 7,8 \cdot 10^3 = 12,25 \text{ kg}$$

$$I_{ZZ} = m \times \rho_{ZZ}^2 = 12,25 \times 1,25 \cdot 10^{-3} = 0,0153 \text{ kg m}^2$$

$$I_{tt} = I_{ZZ} + m d^2 = 0,0153 + 12,25 (400 \cdot 10^{-3})^2 = 1,975 \text{ kg m}^2$$

E quindi:

$$M = 1,975 \cdot 4 = 7,9 \text{ Nm}$$

La potenza può essere calcolata immediatamente ricordando che:

$$P = M \omega$$

Nel caso in esame risulta:  $\omega = 2\pi n/60 = 6,28 \cdot 3000/60 = 314 \text{ rad/s}$ , per cui:

$$P = 7,9 \text{ Nm} \cdot 314 \text{ rad/s} = 2481 \text{ W} \approx 2,5 \text{ kW}$$

## 2.8 TEOREMA DEL MOTO DEL BARICENTRO

Come è noto la prima equazione cardinale della dinamica si può scrivere nella forma:

$$-m\vec{a}_G + \vec{R}^{(a)} + \vec{R}^{(v)} = 0$$

Tale equazione esprime il teorema del moto del baricentro:

*“Il baricentro G di un sistema di punti materiali si muove come un punto di massa uguale alla massa m di tutto il sistema sotto l’azione di una forza pari, istante per istante, al risultante delle forze esterne agenti sul sistema”.*

Ciò significa che, per conoscere il moto del baricentro G, al posto del sistema, è possibile considerare il punto materiale G nel quale è concentrata tutta la massa.

Se il sistema è rigido, dal moto del baricentro è possibile conoscere il moto traslatorio di tutti i punti del sistema.