INTRODUZIONE ALLA RELATIVITÀ SPECIALE:
Dalla seconda legge di Newton a $E = mc^2$

8 marzo 2017

Piano della presentazione

Trasformazioni di Lorentz

Red Shift

Relatività e leggi di Newton

Galileo

Seconda Legge di Newton

Energia relativistica

$E = mc^2$

quadri-velocità e quadri-impulso

Conservazione del 4-impulso

Fissione

Centrale nucleare

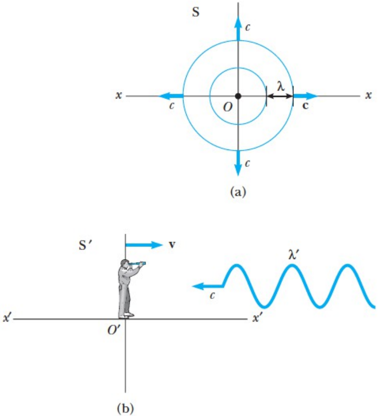
Trasformazioni di Lorentz

$$
\begin{aligned}
t' &= \gamma(t - \frac{vx}{c^2}) \qquad \{x_0' = \gamma(x_0 - \beta x)\} \\
x' &= \gamma(x - vt) \qquad \{x' = \gamma(x - \beta x_0)\} \\
y' &= y \\
z' &= z \\
\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} =: \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}
\end{aligned}
$$

Per $\frac{v}{c} \ll 1$, $\beta \sim 0$, $\gamma \sim 1$ e riotteniamo le usuali trasformazioni di Galileo!!

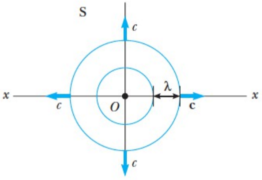
Red Shift

- Consideriamo una sorgente luminosa, a riposo in S che emette luce di lunghezza d'onda λ e frequenza ν (in S).
- Vogliamo calcolare la lunghezza d'onda λ' e la frequenza ν' che vede un osservatore S' che si muove verso S con velocità v

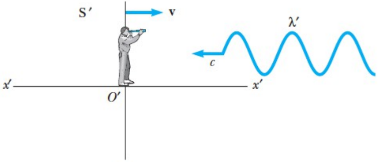


Red Shift

- Consideriamo una sorgente luminosa, a riposo in S che emette luce di lunghezza d'onda λ e frequenza ν (in S).
- Vogliamo calcolare la lunghezza d'onda λ' e la frequenza ν' che vede un osservatore S' che si muove verso S con velocità v

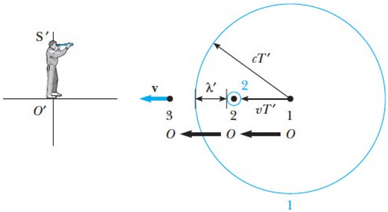


(a)

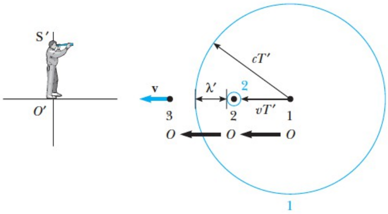


(b)

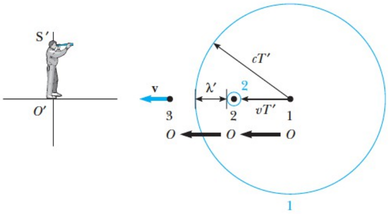
- Se T' è il tempo (misurato in S') che intercorre tra l'emissione di due fronti d'onda,
- nello stesso tempo la sorgente si è mossa verso S' di un tratto vT' di modo che la distanza tra due massimi sarà: $\lambda' = cT' - vT'$.
- Ricordando che $\lambda'\nu' = c$ otteniamo
- $\nu' = \frac{c}{(c-v)T'}$



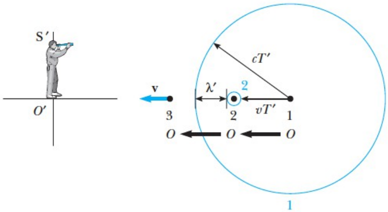
- Se T' è il tempo (misurato in S') che intercorre tra l'emmissione di due fronti d'onda,
- nello stesso tempo la sorgente si è mossa verso S' di un tratto vT' di modo che la distanza tra due massimi sarà: $\lambda' = cT' - vT'$.
- Ricordando che $\lambda'\nu' = c$ otteniamo
- $\nu' = \frac{c}{(c-v)T'}$



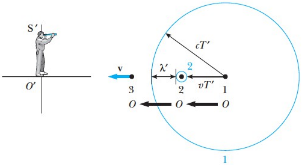
- Se T' è il tempo (misurato in S') che intercorre tra l'emissione di due fronti d'onda,
- nello stesso tempo la sorgente si è mossa verso S' di un tratto vT' di modo che la distanza tra due massimi sarà: $\lambda' = cT' - vT'$.
- Ricordando che $\lambda'\nu' = c$ otteniamo
- $\nu' = \frac{c}{(c-v)T'}$



- Se T' è il tempo (misurato in S') che intercorre tra l'emissione di due fronti d'onda,
- nello stesso tempo la sorgente si è mossa verso S' di un tratto vT' di modo che la distanza tra due massimi sarà: $\lambda' = cT' - vT'$.
- Ricordando che $\lambda'\nu' = c$ otteniamo
- $\nu' = \frac{c}{(c-v)T'}$

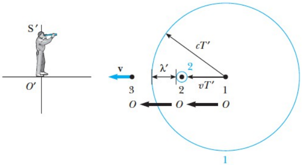


- Ma $T' = \gamma T$
- $\nu' = \frac{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-(v/c)}\nu$ da cui:
- $\nu' = \frac{\sqrt{1+(v/c)}}{\sqrt{1-(v/c)}}\nu$
- $\nu_{oss.} = \frac{\sqrt{1+(v/c)}}{\sqrt{1-(v/c)}}\nu_{sorgente}$



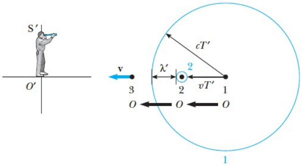
Notiamo che in questo caso: la sorgente si avvicina, $\nu_{oss} > \nu_{sorgente}$; nel caso opposto: la sorgente si allontana, $\nu_{oss.} = \frac{\sqrt{1-(v/c)}}{\sqrt{1+(v/c)}}\nu_{sorgente}$ e $\nu_{oss} < \nu_{sorgente}$.

- Ma $T' = \gamma T$
- $\nu' = \frac{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-(v/c)}\nu$ da cui:
- $\nu' = \frac{\sqrt{1+(v/c)}}{\sqrt{1-(v/c)}}\nu$
- $\nu_{oss.} = \frac{\sqrt{1+(v/c)}}{\sqrt{1-(v/c)}}\nu_{sorgente}$



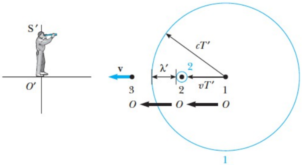
Notiamo che in questo caso: la sorgente si avvicina, $\nu_{oss} > \nu_{sorgente}$; nel caso opposto: la sorgente si allontana, $\nu_{oss.} = \frac{\sqrt{1-(v/c)}}{\sqrt{1+(v/c)}}\nu_{sorgente}$ e $\nu_{oss} < \nu_{sorgente}$.

- Ma $T' = \gamma T$
- $\nu' = \frac{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-(v/c)}\nu$ da cui:
- $\nu' = \frac{\sqrt{1+(v/c)}}{\sqrt{1-(v/c)}}\nu$
- $\nu_{oss.} = \frac{\sqrt{1+(v/c)}}{\sqrt{1-(v/c)}}\nu_{sorgente}$



Notiamo che in questo caso: la sorgente si avvicina, $\nu_{oss} > \nu_{sorgente}$; nel caso opposto: la sorgente si allontana, $\nu_{oss.} = \frac{\sqrt{1-(v/c)}}{\sqrt{1+(v/c)}}\nu_{sorgente}$ e $\nu_{oss} < \nu_{sorgente}$.

- Ma $T' = \gamma T$
- $\nu' = \frac{\sqrt{1-(v^2/c^2)}}{1-(v/c)}\nu$ da cui:
- $\nu' = \frac{\sqrt{1+(v/c)}}{\sqrt{1-(v/c)}}\nu$
- $\nu_{oss.} = \frac{\sqrt{1+(v/c)}}{\sqrt{1-(v/c)}}\nu_{sorgente}$



Notiamo che in questo caso: la sorgente si avvicina, $\nu_{oss} > \nu_{sorgente}$; nel caso opposto: la sorgente si allontana, $\nu_{oss.} = \frac{\sqrt{1-(v/c)}}{\sqrt{1+(v/c)}}\nu_{sorgente}$ e $\nu_{oss} < \nu_{sorgente}$.

Redshift delle galassie

La luce emessa dalle galassie contiene una distribuzione continua di lunghezze d'onda perché la galassia contiene milioni di stelle che emettono in tutte le frequenze. All'interno di questo spettro continuo si possono individuare delle linee strette in corrispondenza della radiazione assorbita da gas più freddo all'interno della galassia. In particolare una nube di atomi di calcio ionizzato produce un forte assorbimento intorno a $394nm$ per una galassia a riposo rispetto alla terra. Nel caso della galassia Hydra, a 200 anni luce dalla terra, questo assorbimento si trova a $475nm$. A che velocità si muove rispetto alla terra?

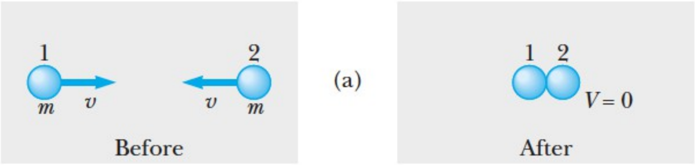
Siccome $\lambda_{oss} > \lambda_{sorgente}$ e $\lambda\nu = c$, Hydra si sta allontanando. In questo caso

$$\begin{aligned}
\nu_{oss.} &= \frac{\sqrt{1-(v/c)}}{\sqrt{1+(v/c)}}\nu_{sorgente} \text{ da cui} \\
\lambda_{oss.} &= \frac{\sqrt{1+(v/c)}}{\sqrt{1-(v/c)}}\lambda_{sorgente} \\
\frac{v}{c} &= \frac{\lambda^2_{oss.} - \lambda^2_{sorgente}}{\lambda^2_{oss.} + \lambda^2_{sorgente}} \text{ ossia} \\
\frac{v}{c} &= \frac{475^2 - 394^2}{475^2 + 394^2} = 0.185
\end{aligned}$$

dunque Hydra si sta allontanando da noi a una velocità $v = 0.185c = 5.54 \cdot 10^7 m/s$

Relatività e leggi di Newton

Le trasformazioni di Lorentz mettono in crisi la conservazione dell'impulso. Consideriamo il seguente urto anelastico:



Nel centro di massa (S) abbiamo:

prima dell'urto $\mathbf{p}_1 = mv\mathbf{u}_x$; $\mathbf{p}_2 = -mv\mathbf{u}_x$ e quindi

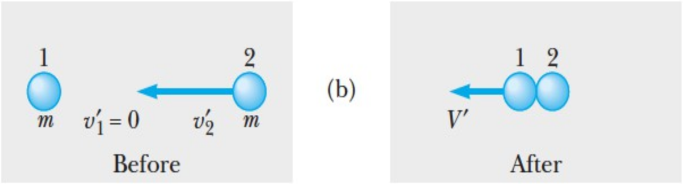
$$\mathbf{p}_{tot}^{prima} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = \mathbf{0};$$

la conservazione dell'impulso implica che dopo l'urto la velocità nel sistema S sia 0:

$$\mathbf{p}_{tot}^{dopo} = \mathbf{p}_{tot}^{prima} = 0$$

e quindi, nel centro di massa le due masse si uniscono e restano ferme!

Analizziamo lo stesso urto in un riferimento che si muova da sinistra a destra con velocità v, avremo:



Galileo

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1' = 0, \text{ e } \mathbf{v}_2' = (-v - v)\mathbf{u}_x' &= -2v\mathbf{u}_x' \text{ di modo che} \\
\text{prima dell'urto } \mathbf{p}_{tot}^{\prime prima} &= -2mv\mathbf{u}_x', \\
\text{mentre dopo l'urto: } \mathbf{V}' &= -v\mathbf{u}_x' equindi \\
\mathbf{p}_{tot}^{\prime dopo} &= -2mv\mathbf{u}_x'
\end{aligned}
$$

dunque la legge della conservazione degli urti è verificata in meccanica Newtoniana. Facciamo la stessa analisi ma stavolta usiamo le trasformazioni di Lorentz nel passaggio da S a S':

Lorentz

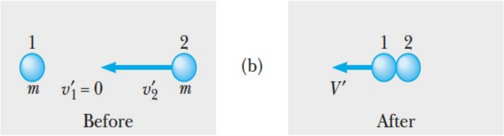
Dovremo usare le leggi di composizione delle velocità:

$$
\begin{aligned}
u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - \left(\frac{u_x v}{c^2}\right)} \\
u'_y &= \frac{u_y}{\gamma\left[1 - \left(\frac{u_x v}{c^2}\right)\right]} \\
u'_z &= \frac{u_z}{\gamma\left[1 - \left(\frac{u_x v}{c^2}\right)\right]}
\end{aligned}
$$

Dove u_x e v sono i moduli della velocità del corpo e del sistema di riferimento rispettivamente.

avremo:

$$
\begin{aligned}
v_1' &= \frac{v_1 - v}{1 - \left(\frac{v_1 v}{c^2}\right)} = \frac{v - v}{1 - \left(\frac{v_1 v}{c^2}\right)} = 0 \\
v_2' &= \frac{v_2 - v}{1 - \left(\frac{v_2 v}{c^2}\right)} = \frac{-v - v}{1 - \left(\frac{(-v) v}{c^2}\right)} = \frac{-2v}{1 + \left(\frac{v^2}{c^2}\right)} \\
V' &= \frac{V - v}{1 - \left(\frac{V v}{c^2}\right)} = \frac{0 - v}{1 - \left(\frac{(0) v}{c^2}\right)} = -v
\end{aligned}
$$



dunque in S' avremo:

$$\mathbf{p}'^{prima}_{tot} = mv'_1 + mv'_2 = m(0) + m\frac{-2v}{1+\left(\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{-2mv}{1+\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}$$

$$\mathbf{p}'^{dopo}_{tot} = 2mV' = -2mv$$

ossia l'impulso non è conservato!!!

Impulso relativitico

Affinché lo sia dobbiamo porre

$$\mathbf{p} = \gamma m \mathbf{u} = \frac{m\mathbf{u}}{\sqrt{1 - (u^2/c^2)}}$$

dove m è la massa a riposo, ossia la massa misurata nel riferimento solidale alla particella, e $\mathbf{u}$ è la velocità della particella rispetto al riferimento S in cui si vuole analizzare il moto.

Verifichiamo in S:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_{tot}^{prima} &= \gamma_1 m v_1 + \gamma_2 m v_2 = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_1^2}{c^2}}} m v_1 + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v_2^2}{c^2}}} m v_2 \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} m v + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{(-v)^2}{c^2}}} m(-v) = 0 \\
\mathbf{p}_{tot}^{dopo} &= \gamma M V = 0
\end{aligned}$$

OK

Nel riferimento S':

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}'^{prima}_{tot} &= \gamma_1 m v'_1 + \gamma_2 m v'_2 \\
&= m(0) + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{-2v}{1+\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)}} m \left(\frac{-2v}{1 + \left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\right) \\
&= \frac{-2mv}{1 - \frac{v^2}{c^2}} \\
\mathbf{p}'^{dopo}_{tot} &= \gamma M V' = \frac{-2mv}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}
\end{aligned}
$$

NON SI TROVA!!!

Seconda Legge di Newton (relativistica)

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(\gamma m \mathbf{u})$$

nel limite di piccole velocità: $u \ll c$ riotteniamo l'usuale 2^a legge di Newton!
Ma l'accelerazione di una particella soggetta a una forza costante (diretta lungo **u**) è datat da:

$$a = \frac{F}{m}\left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{3/2}$$

e quindi per $u \to c$ tende a zero: non possibile accelerare una particella a una velocità maggiore o uguale a c!!

Esempi

Un elettrone si muove a una velocità $v = 0.8c$, calcolare il suo impulso classicamente e relativisticamente: (massa dell'elettrone $m = 9.11 \cdot 10^{-31} kg$

$$p_{class.} = mu = 9.11 \cdot 10^{-31}(0.8)3 \cdot 10^{8} = 2.186 \cdot 10^{-22} kgm/s$$

$$p_{rel.} = \gamma mu = \frac{9.11 \cdot 10^{-31}(0.8)3 \cdot 10^{8}}{\sqrt{1 - 0.8^2}} = 3.644 \cdot 10^{-22} kgm/s$$

Quindi nel caso relativistico si ha un 70% in più!!

Energia relativistica

La modifica della espressione dell'impulso implica una modifica della forma relativistica dell'energia cinetica. Infatti (assumendo tutto diretto lungo x):

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx \\ &\quad \text{se la particella è accelerata da 0 a } u, \\ &= m \int_{x_1}^{x_2} \frac{dv}{dt} dx = m \int_0^u v\, dv = \frac{1}{2} m u^2 \end{aligned}$$

Ma relativisticamente

$$\begin{aligned} W &= \int_{x_1}^{x_2} F dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dp}{dt} dx \\ \frac{dp}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{mu}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} = \frac{m\frac{du}{dt}}{[1-(u^2/c^2)]^{3/2}} \\ & \text{ossia, se la particella è accelerata da 0 a } u, \\ W &= \int_{x_1}^{x_2} \frac{m\frac{du}{dt}}{[1-(u^2/c^2)]^{3/2}} u dt = m \int_0^u \frac{u du}{[1-(u^2/c^2)]^{3/2}} \\ W &= \left(\frac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} \right)_0^u = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} - mc^2 \end{aligned}$$

Energia cinetica relativistica

Ricordando che il teorema lavoro-energia stabilisce che *il lavoro fatto da una forza su una particella è uguale alla variazione di energia cinetica della particella* concludiamo che l'energia cinetica relativistica della particella che si muove a velocità u è:

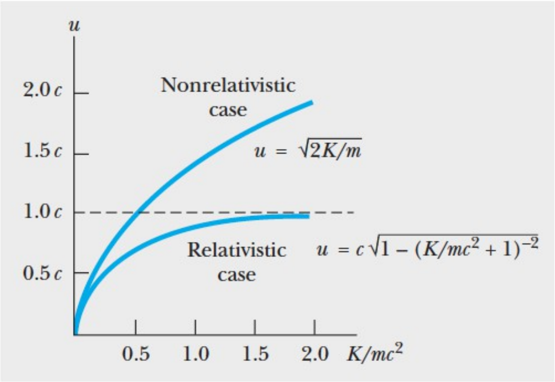
$$K = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(u^2/c^2)}} - mc^2$$

Energia cinetica relativistica

Nel caso $u \ll c$, ricordando che $(1-x^2)^{-1/2} \sim 1 + \frac{1}{2}x^2 + \ldots$ abbiamo

$$K \sim mc^2 \left(1 + \frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2} + \ldots\right) - mc^2 = \frac{1}{2}mu^2$$

che è la vecchia espressione dell'energia cinetica.



Energia relativistica

Notiamo che l'energia cinetica si può scrivere:

$$K = \gamma mc^2 - mc^2,$$

il secondo pezzo non dipende in alcun modo dalla velocità, per questo si chiama **energia a riposo** della particella. La somma dell'energia cinetica e dell'energia a riposo è quello che chiamiamo **energia totale della particella**:

$$E = K + mc^2 = \gamma mc^2$$

Equazione di Einstein sull equivalenza tra massa ed energia.

Invariante relativistico

Da $E = \gamma mc^2$ e $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{u}$ otteniamo

$$(mc^2)^2 \quad = \quad E^2 - p^2c^2$$

e, siccome m e c sono invarianti per trasformazioni di Lorentz anche $E^2 - p^2c^2$ deve essere invariante

Massa a riposo ed energia a riposo

Quando si dice l'elettrone ha massa (a riposo) $0.5 MeV$ in realtà si pensa all' **energia a riposo**:

$$m_e c^2 = 9.11 \cdot 10^{-31} kg (3 \cdot 10^8 m/s)^2 = 8.20 \cdot 10^{-14} J$$

$$= \frac{8.20 \cdot 10^{-14} J}{1.60 \cdot 10^{-19} J} eV = 0.511 \cdot 10^6 eV = 0.511 MeV$$

quindi

$$m_e = 0.511 \left(\frac{MeV}{c^2} \right) = \frac{0.51 \cdot 10^6 eV 1.6 \cdot 10^{-19} J}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2} = 9.1 \cdot 10^{-31} Kg$$

Un elettrone viaggia a velocità $u = 0.8c$, calcolare energia totale ed energia cinetica:

$$\begin{aligned} E_{tot} &= \gamma mc^2 = \frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}} 0.511 MeV = 0.852 MeV; \\ K &= E - mc^2 = 0.852 - 0.511 = 0.341 MeV \end{aligned}$$

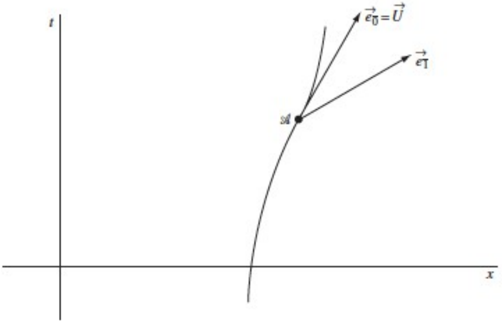
Supponiamo ora di avere un protone ($m_p c^2 = 938 MeV$) con la stessa energia cinetica, a che velocità si muoverà? Quanto vale la sua energia? E il suo impulso?

$$
\begin{aligned}
K &= \gamma m_p c^2 - m_p c^2 \text{ quindi} \\
\frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}} &= \frac{K}{m_p c^2} + 1 = 1 + \frac{0.341}{938} = 1.00036 \\
u &= \frac{\sqrt{-1+1.00036^2}}{1.00036} c = 0.027c \\
E_{tot} &= \gamma m_p c^2 = 1.00036 \cdot 938 = 938.341 MeV \\
p &= \gamma m_p u = 1.00037 \left(938 \frac{MeV}{c^2}\right) 0.027c \\
&= 25.335 \left(\frac{MeV}{c}\right)
\end{aligned}
$$

quadri-velocità e quadri-impulso

Nella 3-geometria di Galileo definiamo velocità il vettore tangente alla traiettoria della particella.

Nella 4-geometria definiamo la quadri-velocità come il vettore tangente alla linea di universo, e lungo c nel riferimento solidale alla particella



In questo modo:

$$\begin{aligned} U^0 &= \gamma c, \qquad p^0 = mU^0 \\ U^1 &= \gamma v \qquad p^1 = mU^1 \end{aligned}$$

e

$$E/c = p^0 = \gamma mc \sim c + \frac{1}{2}mv^2$$

cioè energia a riposo più energia cinetica Galileiana

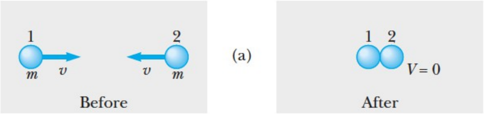
Conservazione del 4-impulso

In un urto il 4-impulso totale è conservato $p_\mu \equiv (p_0, \mathbf{p}) \equiv (E, \mathbf{p})$ con $E = \gamma mc^2$, $\mathbf{p} = \gamma m\mathbf{u}$, e $(mc^2)^2 = E^2 - p^2c^2$:

$$
\begin{aligned}
P_\mu^{tot,prima} &= P_\mu^{tot,dopo} \\
P_0^{tot,prima} &= P_0^{tot,dopo} \Longrightarrow E^{tot,prima} = E^{tot,dopo} \\
\mathbf{P}^{tot,prima} &= \mathbf{P}^{tot,dopo}
\end{aligned}
$$

Torniamo all'analisi dell'urto e chiediamoci quanto vale la massa a riposo della particella che si forma dopo l'urto?: La conservazione della componente 0 del 4-impulso richiede (nel centro di massa dove, dopo l'urto, le particelle sono ferme)

$$\begin{aligned} E^{tot,prima} &= E^{tot,dopo} \text{ ossia} \\ \gamma_1 m_1 c^2 + \gamma_2 m_2 c^2 &= Mc^2 \text{ da cui, poiché} \\ \gamma_1 = \gamma_2 =: \gamma, & \qquad m_1 = m_2 = m \\ M &= \gamma(2m) = \frac{2m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned}$$



Nel riferimento S':

$$
\begin{aligned}
\mathbf{p}'^{prima}_{tot} &= \gamma_1 m v'_1 + \gamma_2 m v'_2 \\
&= m(0) + \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{-2v}{1+\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\right)}} m \left(\frac{-2v}{1+\left(\frac{v^2}{c^2}\right)}\right) \\
&= \frac{-2mv}{1-\frac{v^2}{c^2}} \\
\mathbf{p}'^{dopo}_{tot} &= \gamma M V' = \gamma(\gamma(2m))(-v) = -2\gamma^2 m v = \\
&\quad \frac{-2mv}{1-\frac{v^2}{c^2}}
\end{aligned}
$$

SI TROVA!!!

Fissione

Consideriamo un nucleo radioattivo (a riposo) che decade in più (3) particelle di massa m_i e velocità u_i. La conservazione della energia relativistica totale implica

$$\begin{aligned} Mc^2 &= \sum_i \gamma_i m_i c^2 \\ &= \gamma_1 m_1 c^2 + \gamma_2 m_2 c^2 + \gamma_3 m_3 c^2 \end{aligned}$$

Siccome $\gamma > 1$, $M > m_1 + m_2 + m_3$ e la "perdita di massa" $M - (m_1 + m_2 + m_3)$ appare come energia di moto dei "prodotti di disintegrazione":

$$Q = [M - (m_1 + m_2 + m_3)]c^2 = \Delta m c^2$$

Centrale nucleare

In una centrale nucleare un nucleo di uranio decade in rubidio +cesio secondo la seguente reazione:

$$^{236}_{92}U \rightarrow ^{90}_{37}Rb + ^{143}_{55}Cs + 3^{1}_{0}n,$$

quanto vale l'energia di disintegrazione?

$$\begin{aligned}
M_U &= 236.045u; M_{Rb} = 89.915u; M_{Cs} = 142.927u; M_n = 1.009u \\
\Delta m &= 236.045 - (89.915u + 142.927 + 3 \cdot 1.009) = 0.177u \\
&= 0.177 \cdot 1.660 \cdot 10^{-27} Kg = 2.946 \cdot 10^{-28} Kg \\
& \quad \text{quindi l' energia prodotta sarà} \\
Q &= \Delta mc^2 = 0.177(931.5 \frac{MeV}{c^2}) = 164.88 MeV
\end{aligned}$$

Quindi, se teniamo conto che in $1Kg$ di uranio ci sono $N = 2.55 \cdot 10^{24}$ nuclei, otteniamo che $1Kg$ di uranio può fornire circa

$$\begin{aligned} E &= NQ = 164.88 \cdot 2.55 \cdot 10^{24} = 4.20 \cdot 10^{26} MeV \\ &= 4.20 \cdot 10^{26} (4.45 \cdot 10^{-20} KWh/MeV) \\ &= 1.87 \cdot 10^{7} KWh \end{aligned}$$