INDEX
CALCOLO
SISTEMI
INFORMATICA
ELETTROTECNICA
MECCANICA
MATEMATICA
ELETTRONICA
CHIMICA
PLAY
APPS
PDF
ESAMI DI MATURITÀ
INFO
AGENDA

TRASFORMATA DI LAPLACE

La trasformata di Laplace è una operazione che si esegue sulle funzioni a variabile reale per trasformarle in funzioni a variabile complessa.

Questa operazione, contrariamente a quello che si può pensare, consente di apportare notevoli semplificazioni nei calcoli matematici.

Facciamo considerazioni solo su funzioni del tempo che sono quelle più ricorrenti nello studio dei fenomeni fisici; quindi il tempo viene considerato come variabile reale, indipendente, e le sue funzioni *f(t)* vengono definite per *t>0* considerando nulle le *f(t)* per *t<0*.
Indichiamo con s la variabile complessa $s=\sigma+j\omega$ (pulsazione complessa) e con *F(s)* la funzioni a variabile complessa.

Data una funzione *f(t)* reale e nulla per *t<0*, si definisce trasformata di Laplace della *f(t)* e la si indica con: $F(s)=L[f(t)]$ la seguente funzione

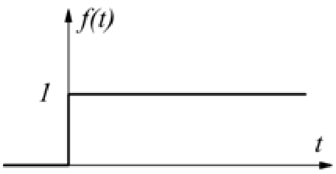
$$\boxed{F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st} f(t)dt}$$

dove $s=\sigma+j\omega$ è la pulsazione complessa.
La f(t) viene moltiplicata per il termine e^{-st} ed integrata rispetto a t tra i limiti $0-\infty$ (la s risulta costante rispetto al tempo t).

Nell'operazione di integrazione il tempo viene a sparire e si ottiene una funzione nella sola variabile s cioè una funzione di una variabile complessa.

1] $f(t)=1$

Si tratta della funzione a gradino unitario, quindi *f(t)=1* per *t>0* ed *f(t)=0* per *t<0*.



$$L[f(t)]=F(s)=\int_0^{\infty} e^{-st}\cdot 1\ dt=\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{s}$$

2] $f(t)=e^{-kt}$

$$L[e^{-kt}]=\int_0^{\infty} e^{-kt}e^{-st}dt=\int_0^{\infty} e^{-(s+k)t}dt=\left[-\frac{1}{s+k}e^{-(s+k)t}\right]_0^{\infty}=\frac{1}{s+k}$$

4] $f(t)=\sin\omega t$

che è riscrivibile come $\sin\omega t=\dfrac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}$

$$L[\sin\omega t]=\int_0^{\infty}\frac{e^{j\omega t}-e^{-j\omega t}}{2j}\cdot e^{-st}dt=\frac{1}{2j}\cdot\left[\int_0^{\infty} e^{j\omega t}\cdot e^{-st}dt-\int_0^{\infty} e^{-j\omega t}\cdot e^{-st}dt\right]=$$

$$=\frac{1}{2j}\cdot\left[\frac{1}{s-j\omega}-\frac{1}{s+j\omega}\right]=\frac{1}{2j}\cdot\frac{s+j\omega-s+j\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

una funzione si può far uso della tabella riportata in questa pagina.

Teoremi sulla trasformata di Laplace

1] La trasformata del prodotto di una funzione per una costante è uguale al prodotto della trasformata della funzione per la costante stessa.

$L[k \cdot f(t)] = k \cdot F(s)$ **con** $F(s) = L[f(t)]$

2] La trasformata di una somma di funzioni è uguale alla somma delle trasformate delle singole funzioni

$L[f_1(t)] = F_1(s)$ *e* $L[f_2(t)] = F_2(s)$

$$L[f_1(t) + f_2(t)] = F_1(s) + F_2(s)$$

quindi sono possibili combinazioni lineari. Teorema della linearità :

$\boxed{L[af_1(t) \pm bf_2(t)] = aF_1(s) \pm bF_2(s)}$ **con a e b costanti.**

3] La trasformata della derivata di una funzione è uguale ad s volte la trasformata della funzione stessa meno il valore che assume la f(t) all'istante t=0. Teorema di derivazione di *f(t)* :

se $L[f(t)] = F(s) \longrightarrow \boxed{L[f'(t)] = sF(s) - f(0)}$

da questa formula si deduce l'espressione della trasformata di Laplace per le derivate seconda, terza, etc..

$$L[f''(t)] = sL[f'(t)] - f'(0) = s[sF(s) - f(0)] - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$$

Esempio:calcolare la trasformata di Laplace di $f(t) = \cos \omega t$ **nota la regola** $L[\sin \omega t] = \dfrac{\omega}{s^2 + \omega^2}$

e sapendo,inoltre che $\cos\omega t = \dfrac{1}{\omega} \cdot \dfrac{d(\sin \omega t)}{dt}$ **si ottiene**

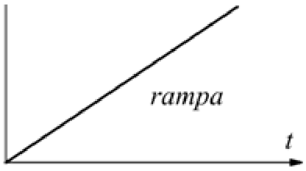
$$L[\cos \omega t)] = \frac{1}{\omega}\left[\frac{s\omega}{s^2 + \omega^2} - \sin(0)\right] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

4] La trasformata dell'integrale di una funzione è uguale alla trasformata della funzione stessa divisa per s. Teorema dell'integrale :

se $L[f(t)] = F(s) \longrightarrow \boxed{L\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}}$

si deduce $L\left[\int_0^t dt \cdot \int_0^t f(t)dt\right] = \dfrac{F(s)}{s^2}$ **e** $L\left[\int_0^t dt \cdot \int_0^t dt \cdot \int_0^t f(t)dt\right] = \dfrac{F(s)}{s^3}$

Esempio: calcolare la L[t] (funzione a rampa).
Tale funzione può essere pensata come



$\int_0 dt$ ma la $L[1] = \frac{1}{s}$ quindi $L[t] = \frac{1}{s^2}$

5] La trasformata di una funzione moltiplicata per t è uguale alla derivata della trasformata della funzione rispetto ad s cambiata di segno. Teorema della derivata di F(s) :

$$se \qquad L[f(t)] = F(s) \longrightarrow \boxed{L\left[t \cdot f(t)\right] = -\frac{dF(s)}{ds}}$$

o anche

$$\boxed{F'(s) = -L[t \cdot f(t)]}$$

infatti dalla definizione di trasformata di Laplace si ha:

$$F'(s) = \frac{d}{ds}\left[\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt\right] = \int_0^\infty (-t) \cdot f(t)e^{-st}dt = -L[f(t)]$$

Esempio: calcolare la $L[t^2]$; se pensiamo che $t^2 = t \cdot t$ e che $L[t] = \frac{1}{s^2}$ **si ha che**

$$L[t \cdot t] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^3}$$

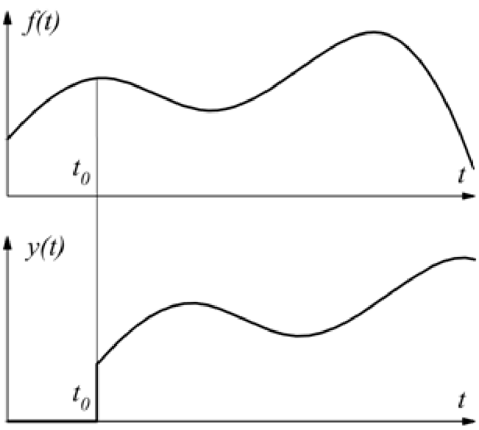
6] Teorema della traslazione :

$$se \qquad L[f(t)] = F(s) \longrightarrow \boxed{L[e^{-kt} \cdot f(t)] = F(s+k)}$$

esempio: calcola la $L[e^{-kt} \cdot t^2]$

Sapendo che $L[t^2] = \frac{2}{s^3} \longrightarrow L[e^{-kt} \cdot t^2] = \frac{2}{(s+k)^3}$

7] Teorema del ritardo :



Data una f(t) viene definita funzione ritardata di durata t_0 la funzione y(t) tale che:

$$\begin{cases} y(t) = 0 & se \quad t < t_0 \\ y(t) = f(t - t_0) & se \quad t \geq t_0 \end{cases}$$

Infatti si dimostra che :

$$se \qquad L[f(t - t_0)] = e^{-t_0 s} \cdot L[f(t)] = F(s) \cdot e^{-t_0 s}$$

posto $x = t - t_0$ **per la definizione di trasformata di Laplace:**

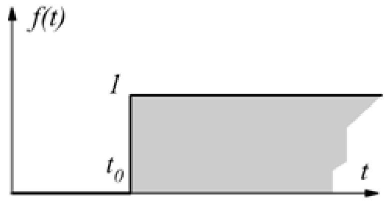
$$L[y(t)] = L[f(t-t_0)] = \int_0 f(t-t_0)e^{-st}dt = \int_0 f(x)e^{-s(x+t_0)}dx$$

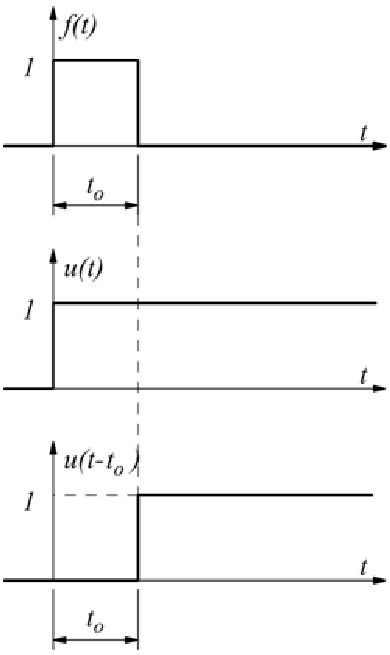
si vede che è nullo il contributo dell'integrale nell'ntervallo [0,t_0] ed essendo dx=dt:

$$L[f(t-t_0)] = \int_0^\infty f(x)\cdot e^{-sx}\cdot e^{-st_0}dx = e^{-st_0}\int_0^\infty f(x)\cdot e^{-sx}dx$$ **ottenendo**

$$\boxed{L[f(t-t_0)] = e^{-st_0}\cdot F(s)}$$

Esempio:Si abbia una funzione a gradino unitario che inizia all'istante t=t_0;





dato che la trasformata del gradino unitario (non traslato) è pari ad 1/s,
quella a gradino traslato è pari a $\frac{e^{-t_0 s}}{s}$.

Questo ultimo teorema è utile per ricavare le espressioni della trasformata di alcune funzioni particolari, prendiamo ad esempio in considerazione la seguente funzione f(t) di tipo impulsivo.

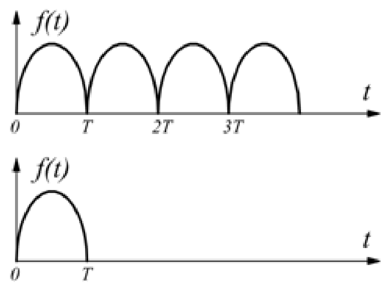
La funzione impulsiva f(t) può essere scritta:

$$f(t) = u(t) - u(t-t_0)$$

$$L[f(t)] = L[u(t)] - L[u(t-t_0)] = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-st_0} = \frac{1-e^{-st_0}}{s}$$

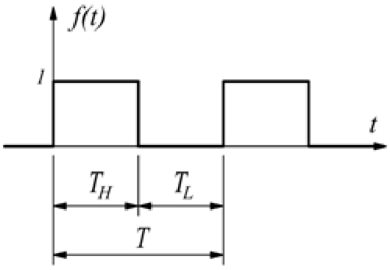
8] Trasformata di funzioni periodiche : Sia f(t) una funzione periodica di periodo T, nulla per t<0 ed f*(t) la funzione corrispondente al primo periodo.

$$\begin{cases} f^*(t) = f(t) & (0 \le t \le T) \\ f^*(t) = 0 & (t > T) \end{cases}$$

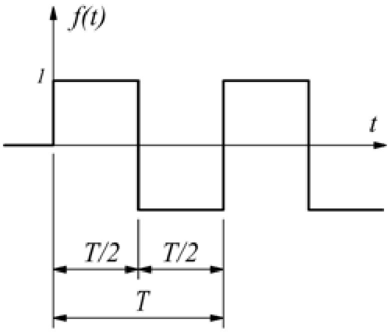


$$se \quad L[f(t)] = F(s) \longrightarrow \boxed{L[f(t)] = \frac{F(s)}{1-e^{-Ts}}}$$

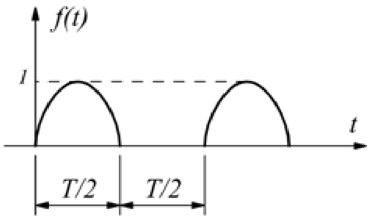
interesse elettronico.



$$F(s)=\frac{(1-e^{-sT_H})}{s(1-e^{-sT})}$$



$$F(s)=\frac{(1-e^{-sT/2})}{s(1+e^{-sT/2})}$$



$$F(s)=\frac{1}{(s^2+1)(1-e^{-sT/2})}$$

Se la F(s) non ha poli nel semipiano destro è anche possibile applicare i seguenti teoremi:

9] Teorema del valore iniziale:

$$\boxed{\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{s\to\infty} sF(s)}$$

10] Teorema del valore finale:

$$\boxed{\lim_{t\to\infty} f(t)=\lim_{s\to 0} sF(s)}$$

ANTITRASFORMATA DI LAPLACE

L'operazione di antitrasformazione, consiste nel risalire da una funzione di variabile complessa , a quella di variabile reale, la cui trasformata coincide con la funzione di partenza.

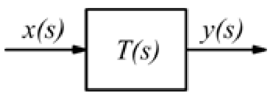
$$L[e^{-kt}\cdot t^2]=\frac{2}{(s+k)^3}$$ **trasformata**

$$L^{-1}\left[\frac{2}{(s+k)^3}\right]=e^{-kt}\cdot t^2$$ **antitrasformata**

non tutte le funzioni a variabile complessa sono antitrasformabili.

Nella teoria dei controlli automatici, la funzione da antitrasformare, può essere una relazione rappresentativa tra una causa ed un effetto , in particolare può esprimere il rapporto fra l'ingresso e l'uscita di un sistema.

$$T(s)=\frac{y(s)}{x(s)}$$



In generale la funzione di trasferimento di un sistema lineare è un rapporto fra due polinomi della variabile s:

$$T(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \ldots + a_1 s + a_0}{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_1 s + b_0} = \frac{N(s)}{D(s)}$$

Le radici del polinomio del numeratore $z_1, z_2, .. z_m$ sono dette zeri e per questi valori la funzione di trasferimento si annulla.
Le radici del polinomio al denominatore $p_1, p_2, .. p_n$ sono dette poli e per questi valori la funzione di trasferimento vale infinito.
Gli zeri o i poli di valore nullo sono chiamati poli e zeri nell'origine In particolare un polo nell'origine introduce una integrazione perché, per il teorema dell'integrale la trasformata dell'integrale di una funzione effettua una divisione per s; uno zero nell'origine, introduce una derivazione (per il teorema della derivata). Noti i poli e gli zeri di una f.d.t. la T(s) può assumere due forme equivalenti dette canoniche.

1a forma canonica.

$$T(s) = \frac{K_o (s - z_1)(s - z_2)(s - z_3) \ldots}{s^j (s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \ldots}$$

con j differenza fra il numero di poli e di zeri nell'origine.

2a forma canonica.

$$T(s) = \frac{K (1 + sT_1)(1 + sT_2)(1 + sT_3) \ldots}{s^j (1 + s\tau_1)(1 + s\tau_2)(1 + s\tau_3) \ldots}$$

dove $T_i = -\frac{1}{z_i}$ $\quad \tau_i = -\frac{1}{p_i}$ **e** $K = K_o \frac{(-z_1)(-z_2)(-z_3)\ldots}{(-p_1)(-p_2)(-p_3)\ldots}$

K=guadagno statico; è il valore della T(s) quando s=0 (supponendo j=0). Le τ_i vengono dette costanti di tempo del sistema.
Nota la f.d.t. T(s) è possibile determinare la risposta y(s) ad una data sollecitazione x(s); infatti:

$$y(s) = T(s) \cdot x(s) \longrightarrow y(t) = L^{-1}\left[T(s) \cdot x(s)\right]$$

Particolare importanza riveste lo studio della risposta di un sistema ad un segnale a gradino unitario con x(t)=1 e x(s)=1/s; si tratta dunque di antitrasformare l'uscita y(s) che risulta essere in definitiva una funzione razionale fratta nella variabile s.

$$y(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

dove N(s) è un polinomio di grado inferiore o uguale a D(s) , questo perché in un sistema reale al tendere ad infinito di s l'uscita deve tendere ad un valore finito (non può aumentare indefinitivamente). In questo contesto risulta utile scomporre la y(s) in frazioni parziali.

$$y(s) = \frac{N(s)}{(s - p_1) \ldots (s - p_n)} = A_0 + \frac{A_1}{(s - p_1)} + \ldots + \frac{A_n}{(s - p_n)}$$

ottenendo con il metodo dei residui

$$A_i = \lim_{s \to p_i} \frac{N(s)}{(s - p_1)..(s - p_i)\ldots} \cdot (s - p_i)$$

A_0 è nullo se il grado n del denominatore è maggiore del grado m del numeratore.
Se m=n si ha A_0=a_m termine noto di $N(s)$.
Se nella formula risulta a_m=b_n=1 valgono le seguenti proprietà.

A] se n≥m+2 la somma dei residui vale zero $\sum_i A_i = 0$

B] se n=m+1 la somma dei residui vale 1 $\sum_i^n A_i = 1$

Risoluzione di una equazione differenziale lineare con la trasformata di Laplace

Data l'equazione differenziale $\frac{d^2x}{dt^2} + 5\frac{dx}{dt} + 4x = e^{-2t}$ **con le condizioni iniziali:**

$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = 0$ **e** $(x)_{t=0} = x(0) = 1$

ricavare la x(t) che soddisfi l'eq. data. Indichiamo $L[x(t)] = X(s)$

trasformando e applicando i teoremi [1] e [2] $L\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + 5L\left[\frac{dx}{dt}\right] + 4L[x] = L\left[e^{-2t}\right]$

Applicando il teorema [3] si ha

$$s^2X(s) - sx(0) - x'(0) + 5[sX(s) - x(0)] + 4X(s) = \frac{1}{s+2}$$

raccogliendo a fattor comune i termini in X(s) $X(s)[s^2 + 5s + 4] = \frac{1}{s+2} + s + 5$ **ottenendo**

$$X(s) = \frac{\frac{1}{s+2} + s + 5}{(s^2 + 5s + 4)} = \frac{s^2 + 7s + 11}{(s+2)(s^2 + 5s + 4)}$$

La x(t) si trova antitrasformando la *X(s)* $x(t) = L^{-1}\left[\frac{s^2 + 7s + 11}{(s+2)(s^2 + 5s + 4)}\right]$ **scomponendo**

$$\frac{s^2 + 7s + 11}{(s+2)(s^2 + 5s + 4)} = \frac{s^2 + 7s + 11}{(s+2)(s+1)(s+4)} = \frac{A}{(s+1)} + \frac{B}{(s+2)} + \frac{C}{(s+4)}$$

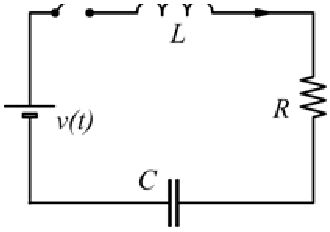
da cui si ricava $A = \frac{5}{3} \quad ; \quad B = -\frac{1}{2} \quad ; \quad C = -\frac{1}{6}$

$$x(t) = L^{-1}\left[\frac{5}{3(s+1)}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{2(s+2)}\right] - L^{-1}\left[\frac{1}{6(s+4)}\right] = \frac{5}{3}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-2t} - \frac{1}{6}e^{-4t}$$

La trasformata di Laplace , fornisce la soluzione direttamente tenendo conto delle condizioni iniziali, mentre col metodo classico occorre trovare prima la soluzione generale e poi imporre le condizioni iniziali.

Applicazione della trasformata di Laplace ai circuiti elettrici

Considerando il circuito disegnato, supponendo che alla chiusura dell'interruttore il condensatore C sia scarico ci proponiamo di scrivere la relazione che lega la corrente i(t) alla tensione applicata v(t) dal momento della chiusura dell'interruttore in poi.

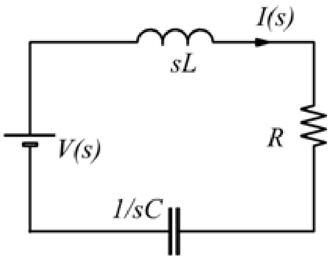


$$v(t) = L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i dt$$ **legge di Kirchoff all'unica maglia**

si eseguono le trasformate di entrambi i membri.

$$V(s) = sLI(s)RI(s) + \frac{1}{sC}I(s) \longrightarrow I(s) = \frac{V(s)}{R + sL + \frac{1}{sC}}$$

quest'ultima può essere scritta direttamente rappresentando il circuito nel modo seguente:



basta sostituire al generatore *v(t)* la *V(s)*, al condensatore la reattanza *1/sC* e all'induttore la reattanza sL; la resistenza deve rimanere invariata. Essendo la V(s) nota si può ottenere la $i(t) = L^{-1}[I(s)]$ **antitrasformando.**

In modo del tutto analogo sarà possibile ottenere altre grandezze di interesse. Ad es. qualora interessasse conoscere l'andamento della v_L(t) applicando la regola del partitore di tensione si potrebbe ottenere:

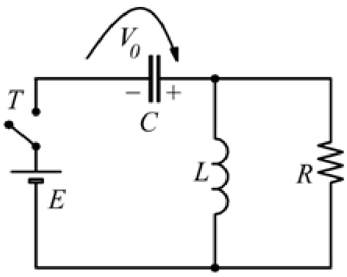
$$V_L(s) = V(s)\frac{sL}{R + sL + \frac{1}{sC}} \longrightarrow v_L(t) = L^{-1}[V_L(s)]$$

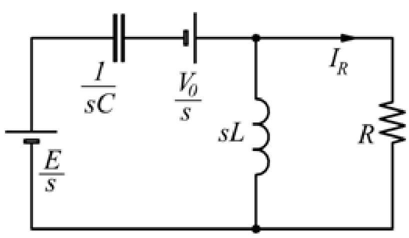
Bisogna fare attenzione se nel circuito già esistono delle cariche iniziali sul condensatore oppure se vi sono delle correnti iniziali nelle induttanze.

Se in una induttanza circola una corrente iniziale i_0, nel circuito in serie alla reattanza sL vi sarà una f.e.m. di valore Li_0 , con il morsetto + nel verso positivo della i_0.

Se un condensatore è inizialmente carico ad una tensione v_0, occorre considerare in serie alla reattanza 1/sC una f.e.m. di valore v_0/s con il morsetto + coincidente con l'armatura positiva del condensatore.

Riassumendo le regole generali per il calcolo simbolico con la trasformata di Laplace:





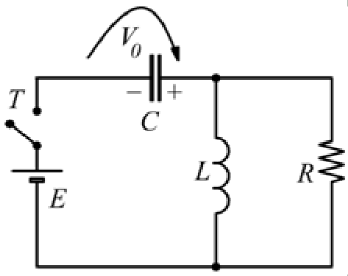
[a] - si sostituiscono tutti i generatori v(t) con f.e.m. continue di valore pari alle trasformate delle v(t).

[c] - si sostituiscono tutte le induttanze L con reattanze di valore sL eventualmente in serie con una f.e.m. di valore Li_0, dove i_0 è la corrente iniziale nell'induttanza.

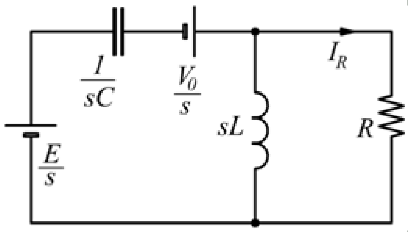
[d] - si sostituiscono tutti i condensatori di capacità C con delle reattanze di valore 1/sC eventualmente in serie con una f.e.m. di valore v_0/s dove v_0 è la tensione iniziale ai capi del condensatore.

[e] - si considerano le correnti e le tensioni così calcolate come le trasformate di Laplace delle effettive grandezze.

Esempio: nel circuito di figura con il condensatore inizialmente carico alla tensione V_0.
Si vuole conoscere l'andamento della corrente nella resistenza R dal momento della chiusura dell'interruttore; coi dati:
E=40V V_0=20V R=200Ω L=1,25H C=5μF



Abbiamo detto che il circuito equivalente è il seguente:
Se *I(s)* è la corrente che circola nella reattanza *1/sC* la corrente $I_R(s)$ sarà data dalla formula:



$$I_R(s) = \frac{I(s)\cdot sL}{R+sL}$$

ma la *I(s)* sarà data dalla somma delle f.e.m. diviso l'impedenza vista dalla *I(s)* stessa.

$$I(s) = \frac{\frac{E}{s}+\frac{V_0}{s}}{\frac{1}{sC}+\frac{R\cdot sL}{R+sL}} = \frac{(E+V_0)}{s}\cdot\frac{R+sL}{\frac{R}{sC}+\frac{L}{C}+RsL}$$ **semplificando**

$$I_R(s) = \frac{(E+V_0)}{s}\cdot\frac{(R+sL)}{\frac{R}{sC}+\frac{L}{C}+RsL}\cdot\frac{sL}{(R+sL)} = \frac{(E+V_0)L}{\frac{R}{sC}+\frac{L}{C}+RsL} = \frac{(E+V_0)sCL}{R+sL+RCLs^2}$$

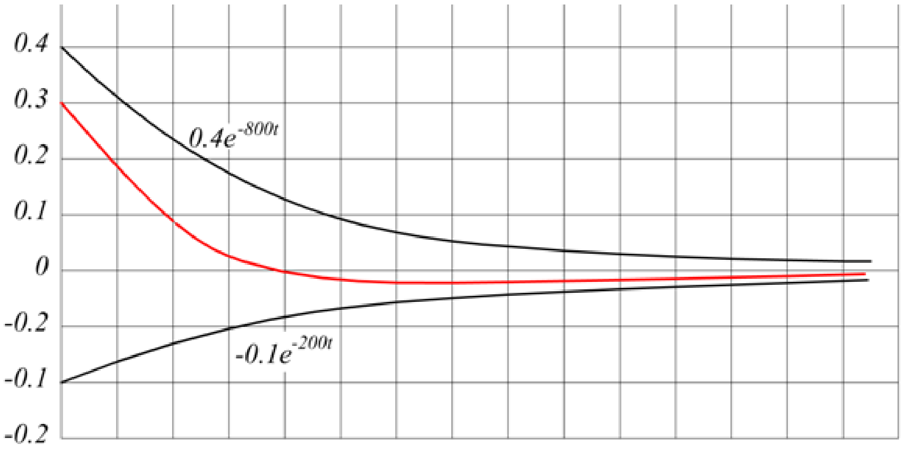
$$I_R(s) = \frac{(E+V_0)}{R}\cdot\frac{s}{s^2+s\frac{1}{RC}+\frac{1}{LC}} = \frac{60}{200}\cdot\frac{s}{s^2+\frac{s}{200\cdot 5\cdot 10^{-6}}+\frac{1}{1{,}25\cdot 5\cdot 10^{-6}}}$$

$$I_R(s) = 0{,}3\cdot\frac{s}{s^2+1000s+160.000} = 0{,}3\cdot\frac{s}{(s+800)(s+200)}$$

poi decomponendo in fattori

$$I_R(s) = 0{,}3\cdot\left[\frac{4/3}{s+800}-\frac{1/3}{s+200}\right] = \frac{0{,}4}{s+800}-\frac{0{,}1}{s+200}$$

antitrasformando si ottiene $i_R(t) = 0{,}4\cdot e^{-800t}-0{,}1\cdot e^{-200t}$



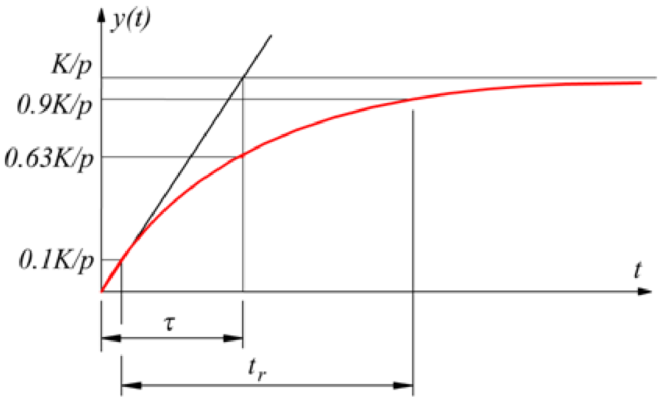
Sistemi del primo ordine

In elettronica, corrispondono formalmente ai filtri del primo ordine, di cui si è già studiata la risposta in frequenza. La funzione di trasferimento ha la forma :

$$T(s) = \frac{K}{s+p}$$

mentre il segnale di ingresso a gradino x(s)=1/s. Si ha dunque:

$$y(s) = T(s) \cdot x(s) = \frac{K}{s(s+p)} \quad \text{antitrasformando} \quad y(t) = \frac{K}{p}(1-e^{-pt})$$



Sistemi del secondo ordine

In elettronica, corrispondono formalmente ai filtri del secondo ordine, di cui si è già studiata la risposta in frequenza. La funzione di trasferimento ha la forma :

$$\boxed{T(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}}$$

mentre il segnale di ingresso a gradino *x(s)=1/s*. Si ha dunque:

$$y(s) = T(s) \cdot x(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{K}{(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)}$$

la sua antitrasformazione dipende dal valore dei poli del trinomio di secondo grado al denominatore. Oltre alla pulsazione naturale ω_n , si notano lo smorzamento ζ e il fattore di

$$Q = \frac{1}{2\zeta}$$

i poli del trinomio valgono $p_{1/2} = -\omega_n(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$

a] per ζ>1 i poli sono reali distinti.

b] per ζ=1 i poli sono reali coincidenti.

c] per ζ<1 i poli sono complessi coniugati.

a] poli reali distinti; si avrà $\begin{cases} p_1 = -\omega_n(\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}) \\ p_2 = -\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}) \end{cases}$

per ogni valore di ζ>1 p_1 e p_2 sono entrambi reali e negativi, la risposta al gradino è:

$$y(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{K}{(s-p_1)(s-p_2)} = \frac{K_0}{s} + \frac{K_1}{s-p_1} + \frac{K_2}{s-p_2}$$ **si ha**

$$y(t) = K_0 + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t}$$ **con**

$$K_0 = \frac{K}{p_1 p_2} \quad ; \quad K_1 = \frac{K}{p_1(p_1 - p_2)} \quad ; \quad K_2 = \frac{K}{p_2(p_2 - p_1)}$$ **notando che**

$$\omega_n^2 = p_1 p_2 \quad ; \quad y(t=0) = 0 \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = K_0 = \frac{K}{p_1 p_2} = \frac{K}{\omega_n^2}$$

b] poli reali coincidenti : si deve avere lo smorzamento ζ=1 , il trinomio al denominatore diventa:

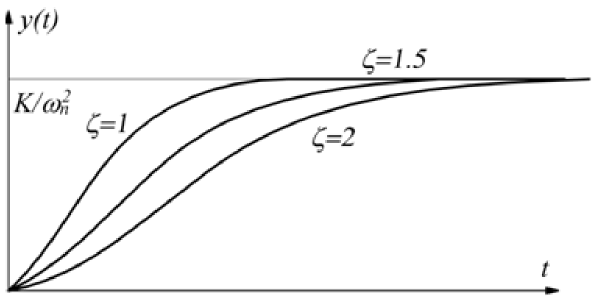
$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = (s + \omega_n)^2$$ **con** $p = p_1 = p_2 = -\omega_n$

La risposta al gradino diventa : $y(t) = K_0 + K_1 e^{pt} + K_2 e^{pt}$

quast'ultima è riscrivibile come: $y(t) = \frac{K}{\omega_n^2}\left[1 - (1 - \omega_n t)e^{-\omega_n t}\right]$

notando che $y(t=0) = 0 \quad ; \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = \frac{K}{\omega_n^2}$

qui la risposta qualitativa per ζ≥ 1 con poli reali



c] poli complessi coniugati : si verifica se ζ<1 , e si ha $\begin{cases} p_1 = -\omega_n(\zeta + j\sqrt{1-\zeta^2}) \\ p_2 = -\omega_n(\zeta - j\sqrt{1-\zeta^2}) \end{cases}$

è possibile dimostrare che la risposta al gradino è:

$$y(t)=\frac{K}{\omega_n^2}\cdot\left[1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\cdot sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t+\phi)\right]\qquad \phi=atg\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

viene quantificato l'overshoot come $M_p=exp\left(-\frac{\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$; $t_p=\frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

quindi all'istante t_p l'uscita vale $y(t_p)=\frac{K}{\omega_n^2}+\frac{K}{\omega_n^2}\cdot M_p$

e il tempo di salita $t_r=\frac{\pi-\phi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$

qui la risposta qualitativa per ζ<1 con poli complessi coniugati