Esercizi di elettrostatica (prima parte)

Esercizi di elettrostatica: forza di coulomb, campo elettrico.

1. Date tre cariche elettriche puntiformi identiche ($+Q$) poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato L, determinare la forza elettrica che agisce su ciascuna carica, esprimendo il risultato in coordinate cartesiane. [Nota: svolgere l'esercizio prendendo in considerazione l'interazione diretta tra cariche elettriche (Forza di Coulomb).]

2. Svolgere l'esercizio precedente senza prendere in considerazione la Forza di Coulomb, ma utilizzando il concetto di campo elettrico.

3. Date tre cariche elettriche puntiformi positive ($+Q$) poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato L, determinare il lavoro che è necessario compiere per portare una delle cariche al centro del triangolo.

4. Date due cariche elettriche puntiformi opposte, $+q$ nel punto di coordinate $(0,0,+a/2)$ e $-q$ nel punto di coordinate $(0,0,-a/2)$ determinare il campo elettrico in un generico punto $\mathrm{P} \equiv (x,0,0)$ dell'asse x.

5. Data una distribuzione uniforme di cariche elettriche (densità lineare di carica $+\lambda$) su di un filo rettilineo infinito, determinare il campo elettrico in un generico punto P. [Nota: per filo infinito si intende un filo la cui lunghezza L è grande rispetto alle altre dimensioni lineari presenti nel problema: in un sistema di coordinate cilindriche con il filo sull'asse z e l'origine nel suo punto medio, vale $L \gg r_\mathrm{P}$ ed $L \gg z_\mathrm{P}$, dove $\mathrm{P} \equiv (r_\mathrm{P}, \vartheta_\mathrm{P}, z_\mathrm{P})_\mathrm{cil}$.]

6. Data una distribuzione uniforme di cariche elettriche (densità lineare di carica $+\lambda$) su di un filo disposto a forma di anello di raggio R, determinare il campo elettrico in un generico punto P posto sull'asse di simmetria dell'anello, a distanza z_{P} dal suo centro.
7. Dato un anello di raggio R su cui è distribuita, in maniera uniforme, una carica elettrica positiva $+q$ ed una carica puntiforme del medesimo valore posta sull'asse di simmetria dell'anello a distanza z_{P} dal suo centro, determinare (senza fare uso del terzo principio della dinamica) la forza elettrica che l'anello carico esercita sulla carica puntiforme.
8. Dato un anello di raggio R su cui è distribuita, in maniera uniforme, una carica elettrica positiva $+q$ ed una carica puntiforme del medesimo valore posta sull'asse di simmetria dell'anello a distanza z_{P} dal suo centro, determinare (senza fare uso del terzo principio della dinamica) la forza elettrica che la carica puntiforme esercita sull'anello carico.
9. Descrivere il moto di un punto materiale (massa m, carica elettrica $-q$) lanciata all'origine con velocità iniziale $\vec{v}_0 \equiv (v_{0x}, 0, v_{0z})$, in una regione di spazio in cui è presente un campo elettrostatico uniforme $\vec{E} \equiv (0, 0, E)$.

Esercizi di elettrostatica: potenziale, lavoro, energia.

10. Data una distribuzione uniforme di cariche elettriche (densità lineare di carica $+\lambda$) su di un filo disposto a forma di anello di raggio R, determinare il campo elettrico in un generico punto P posto sull'asse di simmetria dell'anello, a distanza z_{P} dal suo centro. [Nota: utilizzare l'espressione del campo elettrico sull'asse di un anello carico determinata in un precedente esercizio e la relazione tra potenziale e campo elettrico.]

11. Svolgere l'esercizio precedente utilizzando l'espressione del potenziale di una carica puntiforme ed il principio di sovrapposizione per il potenziale.

12. Determinare il potenziale elettrostatico di una barretta di lunghezza L uniformemente carica (densità lineare di carica $+\lambda$), in un punto a distanza L da un'estremità della barretta, su di un asse che contiene la barretta.

13. Date tre cariche elettriche puntiformi positive ($+Q$) poste ai vertici di un triangolo equilatero di lato L, determinare il lavoro che è necessario compiere per portare una delle cariche al centro del triangolo. [Nota: utilizzare la relazione tra lavoro e differenza di potenziale.]

14. Sono dati una distribuzione lineare uniforme di carica $+\lambda$ su di un anello di raggio R ed un punto materiale di massa m e carica $+Q$ posto sull'asse dell'anello a distanza R dal suo centro ed inizialmente fermo. Si determini la velocità con cui il punto materiale, lasciato libero, raggiunge il centro dell'anello.

Esercizi di elettrostatica: applicazioni della legge di Gauss.

15. “Carica puntiforme”. Determinare, facendo uso della “legge di Gauss”, il campo elettrico di una carica puntiforme q posta nell'origine. [Nota: è una situazione banale, ma è utile per rendersi conto di come la “legge di Gauss” ci permette di determinare il modulo del vettore campo elettrico, a patto che conosciamo già l'andamento delle linee di campo e riusciamo a scegliere una “superficie gausiana” opportuna.]

16. “Filo infinito”. Determinare, facendo uso della “legge di Gauss”, il campo elettrico di una distribuzione uniforme di carica λ su di un filo rettilineo infinito. [Nota: come in altri casi, dal punto di vista fisico, “infinito” vuol dire una grandezza fisica (ad es. la lunghezza del filo) è “molto grande” rispetto ad altre (ad es. la distanza del punto considerato dal punto medio del filo).]

17. “Strato piano”. Determinare, facendo uso della “legge di Gauss”, il campo elettrico di una distribuzione uniforme di carica σ su di un piano infinito. [Nota: come in tutte le altre applicazioni della legge di Gauss, si faccia attenzione alla scelta della “superficie gaussiana” (la superficie chiusa cui si applica la legge di Gauss).]

18. “Sfera uniformemente carica”. Determinare, facendo uso della “legge di Gauss”, il campo elettrico prodotto da una carica elettrica q distribuita uniformemente in tutto il volume di una sfera. [Nota: è importante osservare che, per i soli punti esterni alla sfera, il campo elettrico è identico a quello che si avrebbe se la carica fosse “concentrata” nel centro della sfera.]

19. “Guscio sferico carico”. Determinare, facendo uso della “legge di Gauss”, il campo elettrico prodotto da una carica elettrica q distribuita uniformemente su di una superficie sferica. [Nota: è interessante osservare come il campo elettrico all'interno della sfera è nullo.]

20. “Guscio cilindrico carico”. Determinare, facendo uso della “legge di Gauss”, il campo elettrico prodotto da una carica elettrica q distribuita uniformemente su di una superficie cilinrdrica.

21. “Doppio strato carico”. Determinare il campo elettrico prodotto da due piani infiniti carichi con densità $+\lambda$ e $-\lambda$ posti tra loro paralleli, a distanza d l'uno dall'altro. [Nota: si noti come il campo elettrico è “confinato” nella zona di spazio tra le due superfici cariche. È il modello che utilizzeremo per descrivere il “condensatore piano”.]

22. “Doppio guscio cilindrico”. Determinare il campo elettrico nell'intercapedine tra due superfici cilindriche coassiali cariche con densità di carica di supeficie $+\sigma$ e $-\sigma$. [Nota: si osservi che in questo caso il campo è “confinato” nell'intercapedine tra le due superfici cilindriche. È il modello che utilizzeremo per descrivere il “condensatore cilindrico”.

23. “Doppio guscio sferico”. Determinare il campo elettrico nell'intercapedine tra due superfici sferiche concentriche cariche con densità di carica di supeficie $+\sigma$ e $-\sigma$. [Nota: si osservi che in questo caso il campo è “confinato” nell'intercapedine tra le due superfici sferiche ed ha un volume finito. È il modello che utilizzeremo per descrivere il “condensatore sferico”.]

Esercizi di elettrostatica: il dipolo elettrico.

24. Determinare il momento di dipolo di una distribuzione costituita dalle seguenti cariche puntiformi: $Q_1=-Q$ in $P_1\equiv(-L/2,-L/2)$, $Q_2=+2Q$ in $P_2\equiv(-L/2,+L/2)$ e $Q_3=-Q$ in $P_1\equiv(+L/2,+L/2)$. [Nota: Esercizio utile per esercitarsi ad applicare vari procedimenti. 1) applicare la definizione di dipolo elettrico, 2) considerare la distribuzione data come la sovrapposizione di due dipoli, 3) utilizzare il "metodo dei centri di carica" (tanto le cariche positive quanto quelle negative sono sostituite da un'unica carica posta nei rispettivi "centri di carica").]

25. Date due cariche elettriche puntiformi opposte, $+q$ in $(+a,0,+a)$ e $-q$ in $(-a,0,-a)$, determinare il valore del potenziale elettrico nel punto $P\equiv(+10\,a,0,0)$ considerando la distribuzione data a) come due cariche puntiformi e b) come un dipolo elettrico. Determinare poi l'errore relativo che si commette utilizzando l'"approssimazione di dipolo".

26. Determinare il lavoro necessario per spostare un dipolo $\vec{p}$, parallelo e concorde all'asse y, dalla posizione individuata dal vettore $\vec{r}_i\equiv(R,+45.0^o)_{\text{pol}}$ alla posizione individuata dal vettore $\vec{r}_f\equiv(R,-135.0^o)_{\text{pol}}$, in presena di una carica elettrica puntiforme Q posta nell'origine.

Meccanica (richiami)

Terzo principio della dinamica	$\vec{F}_{2\leftarrow1}=-\vec{F}_{1\leftarrow2}$
Prima equazione cardinale della dinamica	$\vec{F}^{(\text{est})}_{tot}=M_{tot}\;\vec{a}_{\text{c.m.}}$
Prima e seconda equazione della statica	$\vec{F}^{(\text{est})}_{tot}=0 \qquad \vec{M}^{(\text{est})}_{\Omega\,tot}=0$
Lavoro compiuto da una forza	$L_{\text{A B}}=\int_{\text{A}}^{\text{B}}\vec{F}\cdot\text{d}\vec{r}$
Lavoro compiuto da una forza conservativa	$L_{\text{A B}}=-\Delta U_{\text{A B}}$
Forza di interazione gravitazionale	$\vec{F}_{g\,2\leftarrow1}=-G_U\;\frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}\;\hat{r}_{1\rightarrow2}$
Forza peso (sulla Terra)	$\vec{F}_p=m\;\vec{g}_n$
Energia potenziale della forza peso (sulla Terra)	$U_p(h)=m\;g_n\;h$
Forza elastica (di Hook)	$\vec{F}_H=-k_H\;\Delta\vec{l}$
Energia potenziale della forza elastica	$U_H(\Delta l)=\frac{1}{2}\;k_H\;\Delta l^2$
Tensione di una fune	$\vec{T}_f=T\;\hat{u}_T$
Reazione normale di un vincolo	$\vec{F}_N=F_N\;\hat{u}_N$
Forza di attrito statico	$\vec{F}_s=\mu_s\;F_N\;\hat{u}_T$
Forza di attrito dinamico	$\vec{F}_d=-\mu_d\;F_N\;\hat{v}$
Forza di attrito viscoso (regime di Stokes)	$\vec{F}_v=-\gamma\;\eta\;\vec{v}$
Energia cinetica	$K=\frac{1}{2}\;M_{tot}\;v_{\text{c.m.}}^2+\frac{1}{2}\;I_c\;\omega^2$
Teorema dell'energia cinetica	$L_{\text{A B}}=\Delta K_{\text{A B}}$
Bilancio energetico (energia meccanica)	$E_{\text{B}}=E_{\text{A}}+L_{\text{AB}}^{(\text{n.c.})}$

Elettrostatica

Forza di interazione elettrostatica (Forza di Coulomb)	$\vec{F}_{e\,2\leftarrow1}=k_0\;\frac{q_1 q_2}{r_{12}^2}\;\hat{r}_{1\rightarrow2}$
Principio di sovrapposizione (per la Forza di Coulomb)	$\vec{F}_{e\,1\leftarrow\{2,3,\dots\}}=\vec{F}_{e\,1\leftarrow2}+\vec{F}_{e\,1\leftarrow3}+\cdots$
Campo elettrico (definizione)	$\vec{E}=\frac{\vec{F}_e}{q}$
Campo elettrostatico (di una carica puntiforme)	$\vec{E}(\vec{r})=k_0\;\frac{Q}{r^2}\;\hat{r}$
Principio di sovrapposizione (per il campo elettrico)	$\vec{E}_{Q_1,Q_2,\dots}(\vec{r})=\vec{E}_{Q_1}(\vec{r})+\vec{E}_{Q_2}(\vec{r})+\cdots$
Teorema di Gauss (per E)	$\Phi_{\vec{E}}=Q^{(\text{int})}/\varepsilon_0$
Lavoro compiuto dal campo elettrico	$L_{\text{A B}}=q\int_{\text{A}}^{\text{B}}\vec{E}\cdot\text{d}\vec{r}$
Proprietà integrali del campo elettrico (flusso, Teorema di Gauss)	$\oiint_{\mathcal{S}=\partial\mathcal{V}}\vec{E}\cdot\hat{u}_N\,\text{d}\,\mathcal{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\;\iiint_{\mathcal{V}}\rho\,\text{d}\,\mathcal{V}$
Proprietà integrali del campo elettrostatico (circuitazione)	$\oint_{\mathcal{L}}\vec{E}\cdot\hat{u}_T\,\text{d}\,\mathcal{L}=0$
Potenziale scalare (definizione)	$V(\text{P})=-\int_{\Omega}^{\text{P}}\vec{E}\cdot\text{d}\vec{r}$
Potenziale scalare (di una carica puntiforme)	$V(\vec{r})=k_0\;\frac{Q}{r}$
Lavoro compiuto dal campo elettrico	$L_{\text{A B}}=-q\,\Delta V_{\text{AB}}$
Energia potenziale di una distribuzione di cariche	$U=\sum_{i,j=1\dots N,i=j}k_0\;\frac{q_i q_j}{r_{ij}}$
Momento di dipolo elettrico	$\vec{p}=\sum_{i=1}^{N}q_i\;\vec{r}_i$
Potenziale di dipolo (elettrico)	$V_{\text{dip.}}=k_0\;\frac{\vec{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$
Momento meccanico agente su un dipolo elettrico	$\vec{M}_{\text{dip.}}=-\vec{E}\times\vec{p}$
Energia potenziale di un dipolo elettrico	$U_{\text{dip.}}=-\vec{E}\times\vec{p}$

Elettrostatica (formulazione differenziale)

Propr. diff. del campo elettrico (divergenza)	$\text{div}\,\vec{E}=\rho/\varepsilon_0$
Propr. dif. del campo elettrostatico (rotore)	$\text{rot}\,\vec{E}=0$
Propr. diff. del potenziale scalare (gradiente)	$\vec{E}=-\text{grad}\,V$
Propr. diff. del potenziale scalare (Eq. di Poisson)	$\nabla^2 V=-\rho/\varepsilon_0$
Propr. diff. del potenziale scalare (Eq. di Laplace)	$\nabla^2 V=0$

Costanti fisiche (meccanica, termodinamica)

Costante di gravitazione universale	$G_u=6.67408\;10^{-11}\;\text{m}^3/\text{kg}\,\text{s}^2$
Massa a riposo dell'elettrone	$m_e=9.10938356\;10^{-31}\;\text{kg}$
Massa a riposo del neutrone	$m_n=1.674927471\;10^{-27}\;\text{kg}$
Massa a riposo del protone	$m_p=1.672621898\;10^{-27}\;\text{kg}$
Raggio di Bohr	$a_0=0.52917721067\;10^{-10}\;\text{m}$
Costante di Plank	$h=6.626070040\;10^{-34}\;\text{J}\,\text{s}$
Costante di stato dei gas perfetti	$R=8.3144589\;\text{J}/\text{mol}\,\text{K}$
Numero di Avogadro	$N_A=6.022140857\;10^{23}\;1/\text{mol}$
Costante di Boltzmann	$k_B=1.38064852\;10^{-23}\;\text{J}/\text{K}$
Costante di massa atomica	$m_u=1.660539040\;10^{-27}\;\text{kg}$
Volume molare (a 273.15K, 101.325kPa)	$V_m=22.413962\;\text{L}/\text{mol}$

Costanti astronomiche/terrestri

Massa della Terra	$M_T=5.97219\;10^{24}\;\text{kg}$
Raggio medio della Terra	$R_T=6.373044737\;10^{6}\;\text{m}$
Accelerazione normale di gravità	$g_n=9.80665\;\text{m}/\text{s}^2$
Massa della Luna	$M_L=7.3476730\;10^{22}\;\text{kg}$
Raggio medio della Luna	$R_L=1.7375\;10^{6}\;\text{m}$
Distanza media Terra-Luna	$R_{\text{T-L}}=3.844\;10^{8}\;\text{m}$
Pressione atmosferica standard	$p_{\text{atm}}=1.01325\;10^{5}\;\text{Pa}$

Costanti fisiche (elettromagnetismo)

Velocità della luce nel vuoto	$c=2.997924580\dots0\;10^{8}\;\text{m}/\text{s}$
Costante dielettrica del vuoto	$\varepsilon_0=8.854187817\;10^{-12}\;\text{F}/\text{m}$
Permealilità magnetica del vuoto	$\mu_0=1.2566370614\;10^{-6}\;\text{N}/\text{A}^2$
Carica elettrica elementare	$e=1.6021766208\;10^{-19}\;\text{C}$
Costante di Coulomb (nel vuoto)	$k_e=8.987551788\;10^{9}\;\text{N}\,\text{m}^2/\text{C}^2$