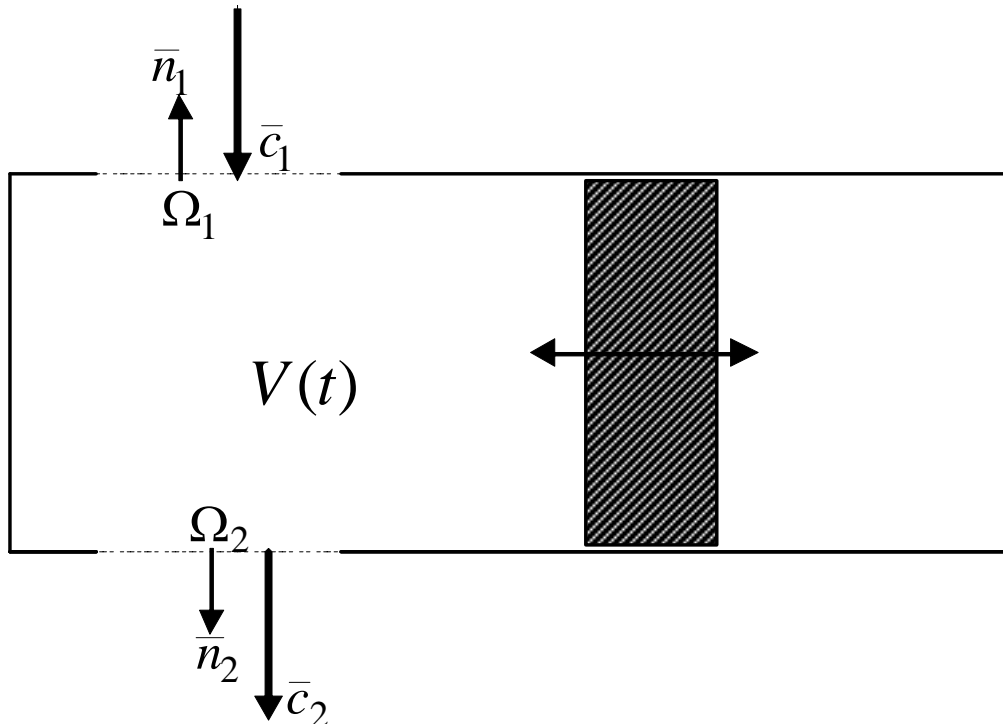


IMPIEGO DELLE EQUAZIONI DI BILANCIO NELLO STUDIO DELLE MACCHINE A FLUIDO

GENERALITÀ

Verranno richiamate, nel seguito, le equazioni di bilancio di grandezze estensive di più diffuso impiego nello studio delle macchine a fluido. Si rimanda, naturalmente, a testi o a corsi specifici di fluidodinamica per la derivazione e la discussione rigorosa di tale equazioni.

Quanto presentato in queste note costituisce un'immediata applicazione delle equazioni della massa, dell'energia e della quantità di moto all'interpretazione di fenomeni di interesse per le macchine e gli impianti motori ed operatori.



Il sistema schematizzato in figura 1, costituisce un caso sufficientemente generale di volume di controllo per il quale definire il bilancio delle grandezze sopra elencate. In esso, il volume è variabile nel tempo grazie alla possibilità di spostamento di una delle pareti solide del sistema. I flussi convettivi hanno luogo attraverso le superfici aperte (1) e (2), intese rispettivamente come sezioni di ingresso e di uscita dal sistema, e sono associati alle velocità, c_1 e c_2 , in un sistema di riferimento assoluto. Nella pratica, anche le superfici di passaggio Ω_1 e Ω_2 potrebbero essere variabili nel tempo in quanto, ad esempio, rappresentative di luci o di aree di flusso attraverso valvole di ingresso o di uscita con apertura periodica.

Si ricorda che la formulazione generale del bilancio *euleriano* di una grandezza estensiva G è basata sul seguente schema;

$$[\text{Variazione nel Tempo}] + [\text{Flussi convettivi e diffusivi}] + [\text{Produzione}] = 0$$

In particolare, una volta definita la grandezza specifica (per unità di massa) $g = G/M$, è possibile generalizzare la stima delle variazioni nel tempo e dei flussi convettivi attraverso le relazioni:

$$[\text{Variazione nel Tempo}] = \frac{dG}{dt} = \frac{d}{dt}(\rho g V) = V \frac{d(\rho g)}{dt} + \rho g \frac{dV}{dt} \quad (1)$$

$$[\text{Flusso Convettivo}] = \rho g \bar{c} \times \Omega \bar{n} \quad (2)$$

In esse, il prodotto ρg rappresenta la specifica di G per unità di volume, mentre il prodotto scalare $\bar{c} \times \Omega \bar{n}$ è la portata volumetrica attraverso una generica superficie di flusso. Dall'orientamento dei vettori si deduce che i flussi in uscita sono positivi.

Le precedenti relazioni sono valide nell'ipotesi in cui una generica proprietà estensiva o intensiva abbia valore uniforme nel volume: tale ipotesi corrisponde a un approccio di primo livello nello studio dei processi nelle macchine a fluido, noto come *zero-dimensionale* o a *parametri concentrati*. Si assume inoltre che le proprietà termo-fluidodinamiche (velocità, densità, grandezze termodinamiche generiche) siano uniformi su ciascuna superficie di flusso, potendo invece variare nel passaggio da una superficie all'altra,

Si osservi anche la variazione nel tempo (1) può essere associata a una variazione instazionaria dello stato termo-fluidodinamico o a una variazione del volume a disposizione del fluido.

Anche i termini di diffusione, in genere associati a gradienti di proprietà intensive, si avvalgono di formulazioni generali, del tipo di quelle riportate nella tabella seguente:

EQUAZIONI DI DIFFUSIONE

| | | | |
|-------------------------|------------------------------|-----------------------------------|-------------------------|
| Massa | $J_i = D \nabla \varphi_i$ | $D =$ Diffusività | <i>Legge di Fick</i> |
| Energia | $\dot{q} = \lambda \nabla T$ | $\lambda =$ Conducibilità Termica | <i>Legge di Fourier</i> |
| Quantità di Moto | $\tau = \mu \nabla \bar{c}$ | $\mu =$ Viscosità Dinamica | <i>Legge di Newton</i> |

Nella tabella, i flussi sono riferiti all'unità di superficie e sono correttamente valutabili solo nel caso di sistemi continui nei quali sia possibile la stima dei gradienti. Nell'approccio a parametri concentrati è possibile solo una stima sintetica di tali flussi.

Infine i termini di produzione della grandezza G sono ovviamente da escludersi nel caso di equazioni di bilancio della massa totale o dell'energia totale; la loro presenza è invece possibile nell'equazione di bilancio di una singola specie o di una singola forma di energia e sono, in tal caso, denominati *termini sorgenti* in quanto rappresentativi di variazioni temporali della grandezza G non associate a fenomeni in stazionari o a flussi.

1. EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA MASSA

Nel caso la grandezza G sia la massa totale di fluido, risulta evidentemente $g = M/M$, per cui l'equazione di bilancio della massa totale, escludendo termini di produzione e diffusione, è formulabile con le relazioni seguenti:

$$M = \rho V \quad (3)$$

$$[\text{Variazione nel Tempo}] = \frac{dM}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dV}{dt} \quad (4)$$

$$[\text{Flusso Convettivo}] = \rho \bar{c} \times \Omega \bar{n} = \rho c \Omega = \dot{m} \quad (5)$$

Nella relazione (4) viene confermato che la variazione temporale di massa può essere associata sia a una trasformazione del fluido (variazione di densità, quindi possibile solo per un fluido comprimibile), sia a una variazione del volume disponibile.

Il flusso convettivo (5) è, in questo caso, la *portata massica* attraverso una generica superficie. Si noti che il prodotto scalare è stato risolto come $c\Omega$ assumendo che la velocità sia normale alla superficie di flusso.

Ne consegue che l'equazione di bilancio della massa totale è esprimibile come:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dV}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 \quad (6)$$

L'equazione (6) mette in quindi in relazione l'accumulo o la diminuzione di massa nel volume di controllo con la differenza tra le portate massiche entranti e uscenti. Vanno espressamente citati alcuni esempi significativi nelle macchine e nei loro componenti:

A) MOTO STAZIONARIO IN UN CONDOTTO:

Tale situazione di flusso viene usualmente considerata per elementi statorici o rotorici di turbomacchine o nel moto attraverso scambiatori (condensatori, rigeneratori, etc.) o camere di combustione a flusso continuo. L'ipotesi di stazionarietà implica che nel sistema non siano presenti pareti mobili che consentano variazioni di volume ($dV/dt = 0$) e che siano comunque da escludersi variazioni temporali delle grandezze termofluidodinamiche. L'equazione (6) si riduce quindi a un'equazione di *continuità*:

$$\dot{m} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \text{cost.}$$

Portata massica :

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & \rho c \Omega = \rho_1 c_1 \Omega_1 = \rho_2 c_2 \Omega_2 = \text{cost.} \end{aligned} \quad (7)$$

L'equazione (7) governa in generale il flusso attraverso condotti a sezione variabile: le variazioni della superficie di flusso Ω comportano variazioni nella velocità e nella densità del fluido. La soluzione completa del problema richiede quindi l'impiego dell'equazione dell'energia e di una relazione di stato del fluido evolvente. Uno degli esempi più frequenti è quello del flusso adiabatico attraverso condotti acceleranti (ugelli) o deceleranti (diffusori) in cui le variazioni di sezione possono provocare aumenti o diminuzioni dell'energia cinetica compensati da variazioni in senso inverso dell'energia potenziale.

Un caso particolare è rappresentato dal flusso incomprimibile in un condotto a sezione variabile. L'equazione (7) si riduce alla:

$$\rho = \text{cost.} \Rightarrow c\Omega = c_1\Omega_1 = c_2\Omega_2 = \text{cost.}$$

Portata volumetrica:

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ \dot{V} &= \dot{V}_1 = \dot{V}_2 = \text{cost.} \end{aligned} \quad (8)$$

In questo caso, le variazioni di velocità seguono, in ragione inversamente proporzionale, quelle di sezione di passaggio

B) PROCESSI DI RICAMBIO DELLA CARICA IN MACCHINE VOLUMETRICHE:

Come è noto, una macchina volumetrica (ad es. : motori alternativi, pompe e compressori alternativi o rotativi) il trasferimento di energia meccanica avviene attraverso le variazioni di volume ($dV/dt \neq 0$) a disposizione del fluido evolvente. Tali variazioni sono usualmente anche destinate, almeno in parte, al trasferimento del flusso da o verso i condotti esterni. Va quindi considerata la forma completa (6) dell'equazione di bilancio della massa:

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d(\rho V)}{dt} = V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dV}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2$$

La variazione temporale della massa contenuta del sistema dipende quindi dal bilancio netto tra le portate in ingresso, \dot{m}_1 , e in uscita, \dot{m}_2 .

Nel seguito si riportano alcuni esempi tipici di macchine alternative.

B.1) Fase di immissione (o aspirazione) in una macchina alternativa.

In una macchina alternativa a *due tempi*, in cui il ciclo di funzionamento si completa in due corse del pistone, una parte della corsa di *discesa* ($dV/dt > 0$) è utilizzata per l'immissione del fluido. In un motore a due tempi ciò è in genere realizzato attraverso l'apertura di una luce di lavaggio e in un compressore alternativo con l'apertura automatica della valvola di ingresso.

In un motore a *quattro tempi* esiste invece un'intera corsa destinata all'aspirazione con apertura della corrispondente valvola.

In ambedue i casi, l'equazione di bilancio della massa si riduce sostanzialmente a:

$$\frac{dM}{dt} = \dot{m}_1 \cong \rho \frac{dV}{dt} > 0 \quad (10)$$

È infatti possibile ritenere, almeno in prima approssimazione, che l'accumulo di massa sia prevalentemente associato all'aumento di volume e non a variazioni di densità del fluido contenuto nel cilindro.

B.2) Fase di scarico in una macchina alternativa.

In una macchina alternativa a due tempi una parte della corsa di *salita* del pistone ($dV/dt < 0$) è utilizzata per la restituzione del fluido all'esterno. In un motore a due tempi ciò è in genere realizzato attraverso l'apertura di una luce di scarico e in un compressore alternativo con l'apertura automatica della valvola di scarico.

In un motore a quattro tempi esiste invece un'intera corsa destinata allo scarico, con apertura della corrispondente valvola.

In ambedue i casi, l'equazione di bilancio della massa si riduce sostanzialmente a:

$$\frac{dM}{dt} = -\dot{m}_2 \cong \rho \frac{dV}{dt} < 0 \quad (11)$$

È infatti possibile ritenere, almeno in prima approssimazione, che lo svuotamento sia prevalentemente associato a diminuzioni di volume e non a variazioni di densità del fluido contenuto nel cilindro.

Nei casi (B.1) e (B.2) fin qui esaminati è quindi possibile affermare che risulta:

$$\dot{m}, \dot{m}_1, \dot{m}_2 \propto \frac{dV}{dt}$$

Quindi le portate in ingresso e in uscita sono proporzionali alla cilindrata della macchina e alla sua velocità di rotazione

B.3) Scarico spontaneo in motori alternativo a quattro e due tempi.

È noto che in un motore alternativo a quattro tempi l'apertura della valvola di scarico viene anticipata rispetto alla posizione del pistone al punto inferiore, allo scopo di sfruttare la differenza tra la pressione nel cilindro e quella nei condotti di scarico per favorire una fuoriuscita spontanea di una parte dei gas combusti. L'ultima parte della corsa di espansione ($dV/dt > 0$) prevede quindi uno svuotamento del sistema ($dM/dt < 0$) secondo modalità differenti da quelle considerate dall'eq. (11). Deve quindi ottenersi una situazione come quella riportata di seguito:

$$\frac{dM}{dt} = V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dV}{dt} = -\dot{m}_2 \quad (12)$$

$$< 0 \quad < 0 \quad > 0 \quad < 0$$

In altri termini, l'effetto della diminuzione di densità del gas all'interno del cilindro ($d\rho/dt < 0$) deve prevalere su quello dell'aumento di volume nella parte finale della corsa di espansione.

Una situazione analoga si verifica in motore a due tempi quando, durante l'ultima frazione della corsa di discesa del pistone, viene scoperta la luce di scarico.

B.4) Immissione o lavaggio forzato in un motore a due o quattro tempi.

Va ricordato che le fasi immissione di aria o di carica fresca in un motore alternativo si completano spesso durante la corsa di salita del pistone. Infatti, in un motore quattro tempi, la chiusura della valvola di aspirazione può essere ritardata rispetto alla posizione di punto morto inferiore del pistone. Ne consegue che l'apertura di tale valvola viene prolungata durante la corsa di salita del pistone.

Analogamente, nei motori a due tempi di costituzione più semplice, la luce di lavaggio rimane aperta in fase di salita del pistone dopo la chiusura di quella di scarico.

In entrambi i casi, è possibile un ulteriore aumento di massa contenuta del cilindro purché si realizzi la condizione:

$$\frac{dM}{dt} = V \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{dV}{dt} = \dot{m}_1 \quad (13)$$

$$> 0 \quad > 0 \quad < 0 \quad > 0$$

Una portata in ingresso al cilindro è quindi resa possibile da un aumento di densità del gas all'interno del cilindro ($d\rho/dt > 0$) il cui effetto sia prevalente su quello di diminuzione di volume durante la corsa di compressione.

B.5) Apertura contemporanea di luci o valvole di ingresso e di scarico.

Va ricordato, per completezza, che il processo di ricambio della carica in un motore a due tempi con luci di lavaggio e di scarico avviene in buona parte attraverso la contemporanea apertura di tali luci (ultima parte della corsa di discesa e prima parte della corsa di salita del pistone).

Nell'equazione di bilancio completa (6) è noto quindi solo il segno della variazione di volume; quello della variazione di massa dipenderà dalla prevalenza di una delle due portate (in ingresso o in uscita) sull'altra.

Una situazione simile ha luogo in un motore quattro tempi durante il periodo di incrocio delle valvole, con contemporanea comunicazione del cilindro con i sistemi di aspirazione e di scarico.

In tutti i casi (B.1 ó B.5) sommariamente citati, va ricordato che oltre alla stima quantitativa della variazione di massa complessiva nel cilindro è di fondamentale importanza la valutazione delle frazioni massiche delle varie specie presenti, allo scopo di verificare l'efficacia del processo di ricambio della carica. Tale valutazione non è inclusa nell'equazione di bilancio della massa totale (6) e nelle varie forme particolari (9 ó 13) ma va eseguita attraverso l'impiego di equazioni di bilancio parziali, come accennato nel seguito.

Bilancio di massa in sistemi multi-componente o multi-fase

$$M = \rho V = \sum_{i=1,n} M_i \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i = \frac{M_i}{M} \quad (\text{frazione massica specie o fase "i" }) \\ \varphi_i = \frac{N_i}{V} \quad (\text{concentrazione specie o fase "i" }) \end{array} \right\}$$

Sistema di Equazioni di Bilancio della Massa

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dM}{dt} = \dot{m}_1 - \dot{m}_2 + V \sum_{i=1,n} J_i \quad (\text{flussi convettivi e diffusivi}) \\ \frac{dM_i}{dt} = \dot{m}_i + J_i V + V \sum_{k=1,m} R_{i,k} \quad ; \quad i = 1, n-1 \quad \begin{array}{l} (J_i = \text{Vel. di diffusione}) \\ (R_{i,k} = \text{Vel. di formazione}) \end{array} \end{array} \right.$$

$$M_n = M - \sum_{i=1,n-1} M_i \quad (\text{Equazione di "chiusura" })$$

(Le velocità di formazione $R_{i,k}$ alle k reazioni che coinvolgono la specie i o alla velocità di condensazione o evaporazione della fase i)

EQUAZIONI DI DIFFUSIONE

| | | | |
|-------------------------|------------------------------|-----------------------------------|-------------------------|
| Massa | $J_i = D \nabla \varphi_i$ | $D =$ Diffusività | Legge di Fick |
| Energia | $\dot{q} = \lambda \nabla T$ | $\lambda =$ Conducibilità Termica | Legge di Fourier |
| Quantità di Moto | $\tau = \mu \nabla \bar{c}$ | $\mu =$ Viscosità Dinamica | Legge di Newton |

2. EQUAZIONE DI BILANCIO DELL'ENERGIA

L'equazione di bilancio dell'energia, ricavata sotto le stesse ipotesi di sistema a parametri concentrati già adottate in precedenza, risponde strettamente al principio di conservazione se nella definizione dell'energia totale vengono considerate tutte le forme di energia significative per il fenomeno allo studio. In problemi di fluidodinamica delle macchine è usuale, salvo limitati casi particolari fare riferimento alle energie specifiche:

- Energia interna termodinamica, u
- Energia cinetica specifica, $c^2/2$
- Energia di posizione rispetto a un livello geodetico di riferimento, $g z$

Va precisato che l'energia interna u non include l'energia di formazione delle specie chimiche. Di conseguenza, la variazione di energia di formazione associata a reazioni chimiche viene considerata come termine sorgente nell'equazione di bilancio.

Da quanto sopra, è quindi possibile definire l'energia totale specifica, funzione dello stato termofluidodinamico istantaneo del sistema, l'energia totale e la relativa variazione nel tempo:

$$e = u + \frac{c^2}{2} + gz \quad ; \quad \text{energia totale specifica}$$

$$E = M \cdot e = \rho V e \quad ; \quad \text{energia totale} \quad (16)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d(Me)}{dt} = e \frac{dM}{dt} + M \frac{de}{dt} \quad ; \quad \text{variazione nel tempo dell'energia totale}$$

Anche nel caso dell'energia totale, E , è quindi possibile affermare che una sua variazione nel tempo all'interno del volume di controllo può derivare sia da un riempimento o svuotamento del sistema, sia da una trasformazione che produca una variazione del livello di energia specifica, e . Si noti inoltre che tutti i termini dell'equazione dell'energia avranno dimensionalmente le caratteristiche di una potenza.

Vanno quindi valutati i flussi convettivi:

Flussi convettivi associati al trasporto dell'energia totale:

$$- \dot{m}_1 e_1$$

$$+ \dot{m}_2 e_2 \quad (17)$$

Flussi convettivi associati al trasporto delle portate volumetriche attraverso le superfici di flusso o le pareti mobili del sistema:

$$\left. \begin{aligned} - p_1 \dot{V}_1 &= - \dot{m}_1 \frac{P_1}{1} \\ + p_2 \dot{V}_2 &= - \dot{m}_2 \frac{P_2}{2} \\ + p \frac{dV}{dt} & \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

Si osservi che i primi due termini, del tipo $\dot{m} \frac{P}{}$, corrispondono in termini di potenza ai lavori di pulsione da tenere in conto nell'equazione dell'energia per sistemi aperti. L'ultimo termine, $p \frac{dV}{dt}$, rappresenta la potenza meccanica trasferita dal sistema all'esterno (o viceversa) per lo spostamento del fluido associato alla variazione di volume, dV . In una macchina volumetrica, tale termine è quindi la potenza scambiata tra il sistema e il primo organo in moto (ad esempio il pistone in una macchina alternativa): un aumento di volume ($dV > 0$) corrisponde a un flusso di energia positivo, in quanto uscente dal sistema, mentre una sua diminuzione ($dV < 0$) costituisce un flusso negativo. Le due situazioni sono quindi tipiche rispettivamente di un comportamento da macchina motrice o operatrice.

Ai flussi convettivi vanno poi aggiunti quelli di parete. Va precisato che tali termini vanno interpretati come segue:

- Un flusso di energia meccanica, P , che può avere luogo se il volume di controllo racchiude insieme di organi mobili di una macchina: ad esempio, l'elemento rotorico di una turbomacchina motrice od operatrice.
- Un flusso di energia termica scambiato con le pareti del sistema, \dot{Q}_w ; questo termine sintetizza l'effetto dei processi globali di scambio termico (radiativi, convettivi e conduttivi) derivanti dalla differenza tra la temperatura T del fluido e quella, T_w , delle pareti solide del sistema. Si è già ricordato che l'ipotesi zero-dimensionale esclude la possibilità di calcolo di gradienti di temperatura, per cui una valutazione attendibile della potenza \dot{Q}_w va affidata a *modelli sintetici di scambio termico*.

Per quanto riguarda il segno dei flussi di parete, si adottano le classiche convenzioni della termodinamica, per cui una potenza meccanica è positiva se trasferita dal sistema all'esterno mentre la potenza termica è positiva se rappresenta un flusso entrante. Sarà quindi:

Flussi di parete:

$$\left. \begin{aligned} + P & \quad (\text{potenza all' albero}) \\ - \dot{Q}_w & \quad (\text{flusso termico di parete}) \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

Va infine considerato, quale termine sorgente nell'equazione di bilancio completa dell'energia, la produzione di energia interna sensibile derivante dallo sviluppo di una reazione chimica all'interno del volume di controllo. Come è noto una reazione esotermica è associata a una diminuzione dell'energia

di formazione nel passaggio dai reagenti ai prodotti con conseguente incremento dell'energia sensibile: è il caso, di interesse per lo studio delle macchine, dei sistemi a combustione interna al fluido evolvente. Il contrario si verifica in reazioni endotermiche, quali ad esempio quelle in alcuni processi di *reforming*, anch'essi di interesse nel campo dei sistemi di conversione dell'energia. Nell'equazione di bilancio dell'energia va quindi incluso un termine del tipo:

Produzione:

$$-\dot{Q}_{chim} \quad (ad\ es.: -\dot{m}_f H_i \quad o \quad \frac{dM_f}{dt} H_i) \quad (20)$$

Si è riportata, a titolo di esempio, la possibilità di valutazione della produzione di energia nel caso di presenza di combustibile. In particolare:

- In un sistema a flusso continuo attraversato dalla portata di combustibile \dot{m}_f , il massimo valore della potenza termica \dot{Q}_{chim} che può essere rilasciata dalla combustione corrisponde allo sfruttamento dell'intero potere calorifico inferiore, H_i , del combustibile (nel caso, quindi, in cui si realizzi una combustione completa durante il passaggio dei reagenti attraverso il sistema)
- In un sistema non stazionario e in assenza di flussi di massa, la potenza termica \dot{Q}_{chim} corrisponde, in ogni istante, alla velocità di combustione e quindi alla velocità di consumo di combustibile $\frac{dM_f}{dt}$ nella miscela reagente.

In entrambi i casi, una stima efficace del termine \dot{Q}_{chim} può essere ottenuta attraverso l'impiego di appropriati *modelli di combustione*. Infine, anche il segno del termine di produzione segue le convenzioni della termodinamica, per cui il rilascio di potenza termica di combustione va considerato come positivo.

L'introduzione di tutti i termini fin qui elencati conduce alla seguente

Equazione Completa di Bilancio dell'energia:

$$\frac{dE}{dt} - \dot{m}_1 e_1 + \dot{m}_2 e_2 - \dot{m}_1 \frac{p_1}{\rho_1} + \dot{m}_2 \frac{p_2}{\rho_2} + p \frac{dV}{dt} + P - \dot{Q}_w - \dot{Q}_{chim} = 0 \quad (21)$$

L'equazione (21) può essere resa di più immediata lettura attraverso alcune trasformazioni:

- In base alla nota relazione tra energia interna ed entalpia ($h = u + p/\rho$) è possibile definire, in analogia all'energia totale anche l'entalpia totale:

$$H = e + \frac{p}{\rho} = h + \frac{c^2}{2} + gz \quad ; \quad \text{entalpia totale specifica} \quad (22)$$

- Vengono raggruppate, in unico termine, \dot{Q} , la potenza termica scambiata con le pareti e quella associata allo sviluppo dire azioni chimiche:

$$\dot{Q} = \dot{Q}_w + \dot{Q}_{chim} \quad (23)$$

- La variazione non stazionaria dell'energia totale viene isolata al primo membro, riportando al secondo tutte le cause possibili di tale variazione.

Si perviene, così, alla seguente

EQUAZIONE DELL'ENERGIA PER SISTEMI NON STAZIONARI:

$$\frac{dE}{dt} = \dot{m}_1 H_1 - \dot{m}_2 H_2 + \dot{Q} - P - p \frac{dV}{dt} \quad (24)$$

Alla luce di tale ultima formulazione dell'equazione dell'energia è possibile, ad esempio, giustificare un aumento dell'energia totale contenuta nel sistema ($dE > 0$) e la velocità, dE/dt , di tale variazione:

- Un bilancio positivo tra i flussi convettivi entranti e uscenti di entalpia totale;
- Un apporto di potenza termica dalle pareti o lo sviluppo di potenza termica da combustione;
- Un apporto di potenza meccanica ($P < 0$) associato alla presenza di una macchina operatrice;
- Una compressione derivante dalla diminuzione del volume di controllo ($dV < 0$)

In modo analogo è, naturalmente, possibile associare le diminuzioni di energia totale nel volume di controllo ($dE/dt < 0$) ai vari termini presenti al secondo membro della (24)

2.1. CASI PARTICOLARI DELL'EQUAZIONE DELL'ENERGIA

L'equazione di bilancio dell'energia nelle formulazioni (21) e (24) include tutte le possibili cause di variazione dell'energia totale del sistema. Casi particolari possono essere dedotti facendo riferimento alle diverse tipologie di macchine o di componenti di impianti di conversione dell'energia. Se ne riportano, nel seguito, alcuni esempi.

A) Sistemi volumetrici non stazionari ($P = 0$; $e \cong u$)

Come più volte ricordato, in tali sistemi i trasferimenti di massa e di energia sono legati a variazioni non stazionarie del volume a disposizione del fluido. Si esclude, quindi, la presenza di altri sistemi di trasferimento dell'energia meccanica ($P=0$) e si assume, in genere, che il contributo prevalente alle variazioni di energia totale sia dato da quelle di energia interna: in altri termini, si ritengono trascurabili eventuali variazioni di energia cinetica e di posizione.

Un tipico esempio è rappresentato dai motori e dalle macchine operatrici alternative. Ambedue i sistemi sono caratterizzati da un ciclo operativo che si realizza in due o quattro corse del pistone e quindi in uno o due giri dell'albero.

Il comportamento è sempre non stazionario ma può essere considerato periodico nel caso di velocità di rotazione, n , costante dell'albero. Il periodo angolare è quindi di 360° o 720° mentre quello temporale è dato da:

$$\tau = \frac{60\varepsilon}{n} \quad (25)$$

in cui ε vale 1,2 a seconda che la macchina sia a 2 o a 4 tempi. All'interno del periodo di funzionamento complessivo, è possibile individuarne uno in cui il sistema opera a valvole o luci chiuse, e un altro in cui esiste almeno una possibilità di comunicazione con l'esterno attraverso flussi convettivi.

A.1) Comportamento da Sistema chiuso $\left(\frac{dM}{dt} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = 0 \right)$

Con le ipotesi precisate in precedenza e in assenza di trasferimenti di massa, le variazioni di energia totale del sistema sono associate esclusivamente a trasformazioni termodinamiche del fluido interno al volume di controllo. Si ricorda che tale situazione è consentita solo da fluidi comprimibili, in quanto in assenza di variazioni di densità del fluido risultano impossibili le variazioni di volume del sistema. L'equazione (24) si riduce a:

$$\frac{dE}{dt} = M \frac{du}{dt} = \dot{Q} - p \frac{dV}{dt} \quad (26)$$

$$\frac{du}{dt} = \frac{\dot{Q}}{M} - p \frac{dv}{dt}$$

La seconda espressione, ottenuta dividendo per la massa totale l'equazione di bilancio dell'energia totale, riconduce alla formulazione dell'equazione di primo principio per i sistemi chiusi. Alcune considerazioni di rilievo sono:

- Nel sistema volumetrico hanno luogo contemporaneamente trasferimenti di energia termica ed energia meccanica; infatti, durante la compressione ($dV < 0$) o l'espansione ($dV > 0$) del fluido, è comunque presente almeno una quota di potenza termica, \dot{Q}_w , trasferita da o verso le pareti. La variazione di energia del sistema e la velocità di tale variazione dipendono quindi dal bilancio netto dei flussi di energia termica e meccanica.
- In un motore alternativo a combustione interna, la velocità di aumento dell'energia interna risulta fortemente incrementata durante lo sviluppo della combustione grazie all'attivazione del termine \dot{Q}_{chim} la cui entità dipende dalla velocità di reazione e dal potere calorifico del combustibile. L'aumento di energia può essere amplificato o attenuato a seconda che il processo di combustione abbia luogo durante la parte finale della corsa di compressione ($dV < 0$) o durante quella di espansione ($dV > 0$).
- La potenza meccanica istantanea scambiata tra fluido e pistone è pari a $(-pdV/dt)$ e dipende quindi dalla pressione istantanea nel volume di controllo e dalla velocità di variazione del volume. Nel caso di una macchina alternativa tale velocità, come è noto, è legata alla velocità di rotazione dell'albero e alla legge di manovellismo, oltre che alle dimensioni effettive associate alla corsa e all'alesaggio del pistone. Il valore medio della potenza meccanica nel periodo di funzionamento definito dalla (25) è dato da:

$$\bar{P} = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} -p \frac{dV}{dt} dt = \frac{n}{60\varepsilon} p_{mi} V \quad (27)$$

in cui V è la *cilindrata* (pari alla differenza tra il volume massimo e quello minimo a disposizione del fluido evolvente). Si ritrova quindi la classica espressione della *potenza indicata* di una macchina alternativa.

A.2) Comportamento da Sistema aperto $\left(\dot{m}_1 \neq \dot{m}_2 \Rightarrow \frac{dM}{dt} \neq 0 \right)$

In presenza di apertura di valvole o luci di immissione o di scarico, e quindi di flussi di massa in ingresso e in uscita, il sistema volumetrico è interessato anche a flussi convettivi di energia. Pertanto, l'equazione di bilancio dell'energia va utilizzata nella forma completa (24):

$$\frac{dE}{dt} = u \frac{dM}{dt} + M \frac{du}{dt} = \dot{m}_1 H_1 - \dot{m}_2 H_2 + \dot{Q} - p \frac{dV}{dt}$$

e va ricordato che la variazione di energia è in questo caso attribuibile sia a trasformazioni termodinamiche del fluido, sia a variazioni di massa a seguito di riempimento o svuotamento del sistema. I casi particolari da analizzare sono gli stessi (B1 ó B5) discussi a proposito dell'equazione di bilancio della massa e non vengono di seguito riportati dettagliatamente. Vanno però segnalate alcune osservazioni:

- In presenza di un flusso convettivo in ingresso ($\dot{m}_1 H_1 > 0$) e in assenza di flussi di massa in uscita il sistema tende ad accumulare energia. In un fase di aspirazione di un motore a quattro tempi, tale tendenza è accentuata dalla presenza di un flusso termico positivo dalle pareti all'aria (o miscela) entrante (infatti, in tale fase, la temperatura media di parete è superiore a quella dei gas entranti). L'accumulo di energia è invece attenuato dalla presenza di un termine negativo ($-p dV/dt$, con $dV > 0$) che è rappresentativa della potenza di pompaggio nella fase di aspirazione.
- Nello stesso caso del motore alternativo a quattro tempi, il flusso di massa e di energia in uscita durante la fase di scarico ($-\dot{m}_2 H_2 < 0$) giustificano una diminuzione di energia totale del sistema ($dE/dt < 0$), incrementata dalla presenza di un flusso termico negativo dai gas alle pareti e parzialmente attenuata dalla potenza di pompaggio (in questo caso è $dV < 0$).

A.3) Impiego combinato delle equazioni di massa ed energia nei sistemi volumetrici

Vanno infine citate due importanti applicazioni del sistema di equazioni non stazionarie di massa ed energia per lo studio delle macchine volumetriche:

- 1) Il sistema costituito dalle equazioni di bilancio della massa (6) e dell'energia (24) - integrato da relazioni di stato delle miscele di gas evolventi e da opportuni modelli per la stima del processo di combustione, dello scambio termico, e del flusso attraverso valvole e luci - costituisce un approccio di primo livello alla simulazione termo-fluidodinamica dei processi in macchine volumetriche e, in particolare, nei motori alternativi a combustione interna. Il metodo è noto come *filling ó emptying* ed è spesso impiegato con successo per una previsione preliminare del comportamento non stazionario di motori anche in configurazione complessa.
- 2) Lo stesso sistema di equazioni può essere impiegato per ricavare, attraverso un procedimento *inverso*, la **legge di rilascio del calore** in un motore a combustione interna. Si parte in questo caso dalla disponibilità di dati sperimentali sulla pressione istantanea nel cilindro in funzione dell'angolo di manovella (e quindi del volume a disposizione dei gas evolventi) e viene ricavato il termine \dot{Q} nell'equazione dell'energia. L'uso di appropriati modelli di scambio termico consente poi di isolare il termine $\dot{Q}_{chim} = \dot{Q} - \dot{Q}_w$. Risulta quindi possibile ricavare informazioni, a partire da dati sperimentali, sulla velocità di sviluppo del processo di combustione e sull'efficienza globale di tale processo.

La legge di bilancio del calore in motori alternativi

A.1) Sistema chiuso $\left(\frac{dM}{dt} = \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = 0 \right)$

Trasformazione dell'equazione dell'energia (per gas ideali)

$$\frac{dE}{dt} = M \frac{du}{dt} = \dot{Q} - p \frac{dV}{dt}$$

$$du = c_v dT$$

(28)

$$dT = \frac{1}{R} (p dv + v dp) \Rightarrow M \frac{du}{dt} = \frac{c_v}{R} (p dV + V dp)$$

Forma finale dell'equazione dell'energia:

$$\frac{c_v}{R} \left(p \frac{dV}{dt} + V \frac{dp}{dt} \right) = \dot{Q} - p \frac{dV}{dt}$$

⇓

$$k p \frac{dV}{dt} + V \frac{dp}{dt} = (k - 1) \dot{Q}$$

(29)

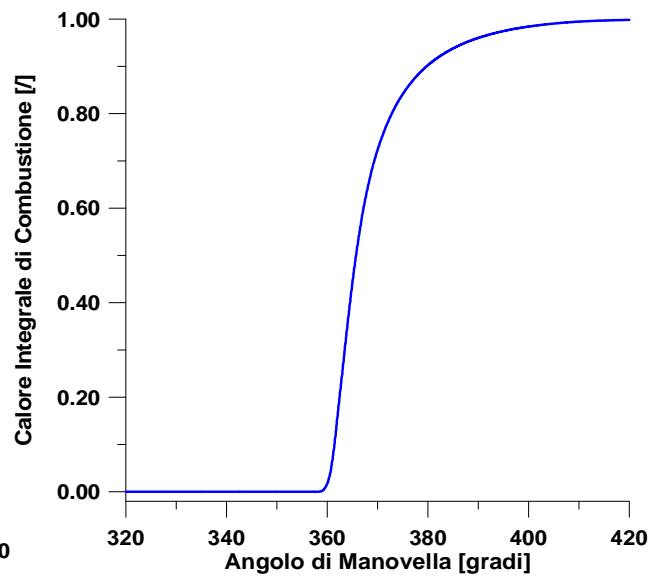
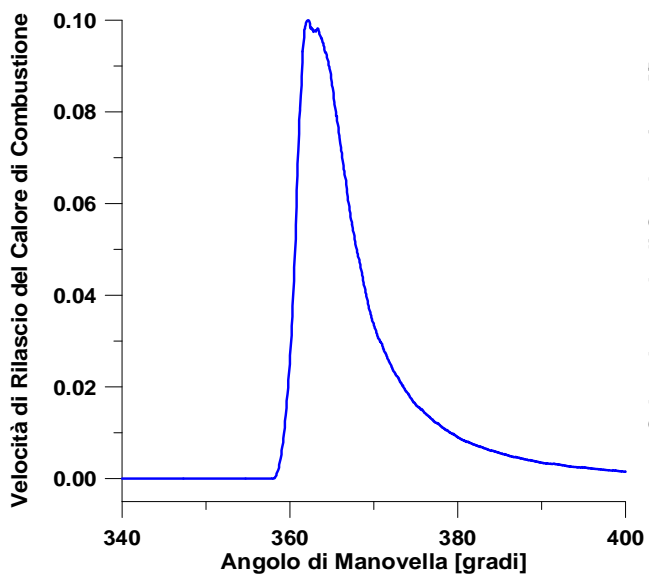
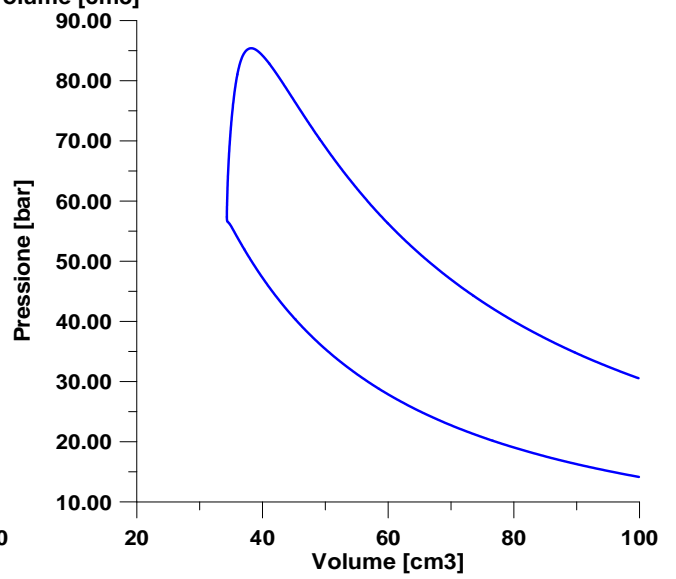
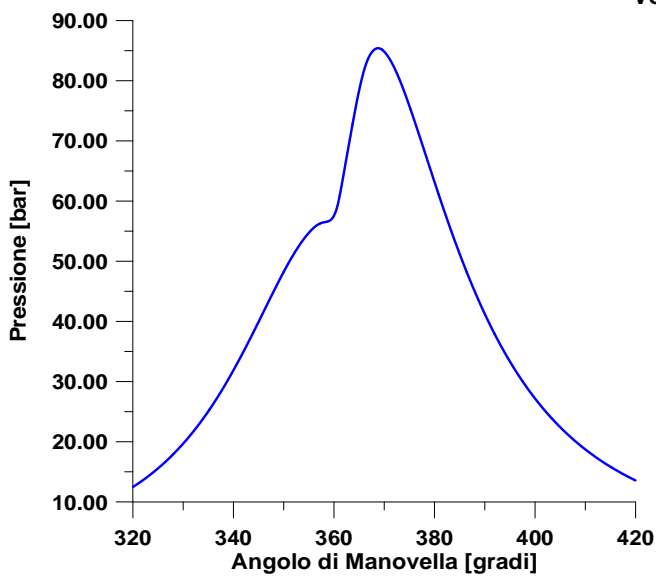
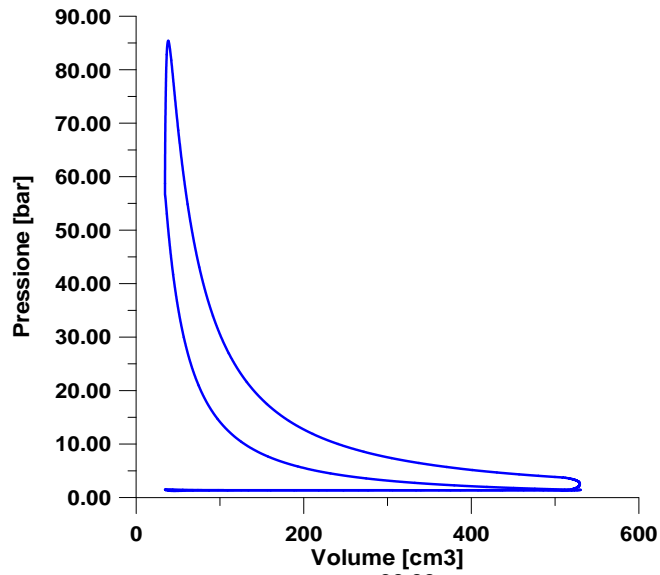
In una macchina alternativa in regime stazionario:

$$\left(\frac{d}{dt} \right) = \left(\frac{d}{d\vartheta} \right) \left(\frac{d\vartheta}{dt} \right) = \omega \left(\frac{d}{d\vartheta} \right)$$

⇓

$$k p \frac{dV}{d\vartheta} + V \frac{dp}{d\vartheta} = (k - 1) \frac{\dot{Q}}{\omega} = (k - 1) \frac{dQ}{d\vartheta}$$

(30)



B) Sistemi stazionari a flusso continuo $\left(\frac{d(\)}{dt} = 0 ; \dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m} \right)$

È il caso di molti componenti di macchine e impianti per i quali, in prima ipotesi, si assume la stazionarietà del flusso che implica quindi la validità dell'equazione di continuità nella forma (7). Si fa riferimento, ad esempio, a:

- Scambiatori di calore e camere di combustione
- Elementi rotorici di turbomacchine, sede di trasferimenti di energia meccanica
- Condotti a sezione variabile con comportamento da ugelli o diffusori

L'equazione di bilancio dell'energia totale (24) si riduce quindi alla forma:

$$\dot{m}(H_2 - H_1) = \dot{Q} - P \quad (31)$$

Diversamente dalla formulazione non stazionaria dell'equazione dell'energia, in cui vengono stimate le variazioni temporali dell'energia totale, la forma stazionaria (31) di tale equazione evidenzia come le variazioni di flusso di energia tra ingresso e uscita dal sistema siano correlate a flussi di energia termica, \dot{Q} , o meccanica, P , il cui segno va è in accordo alle convenzioni della termodinamica già richiamate in precedenza.

La costanza della portata massica attraverso tutte le superfici di flusso rende poi possibile fare riferimento alle energie specifiche, attraverso le relazioni:

$$\begin{aligned} \dot{Q}/\dot{m} &= Q \\ P/\dot{m} &= L \end{aligned} \quad (32)$$

che fanno quindi riferimento alle quantità di energia trasferite, per unità di massa di fluido evolvente, nel modo calore o lavoro. L'equazione dell'energia per sistemi aperti a flusso continuo si riduce quindi a:

$$\begin{aligned} H_2 - H_1 &= Q - L \\ h_2 - h_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) &= Q - L \end{aligned} \quad (33)$$

Si tratta, quindi, di una forma estesa della relazione di primo principio, in quanto al bilancio netto di energia in transito (Q o L) viene associata la variazione dell'entalpia totale. Pertanto, un bilancio positivo dei flussi di energia può contribuire all'incremento di una qualsiasi (o più d'una) delle forme di energia incluse nella definizione di entalpia totale: entalpia termodinamica, energia cinetica, energia di posizione. Al contrario, un bilancio negativo comporta la diminuzione dell'entalpia totale tra uscita e ingresso del sistema e quindi la diminuzione di almeno una delle forme di energia considerate.

Per maggiore chiarezza, vengono di seguito riportati alcuni esempi specifici.

- **Sistema adiabatico che include una macchina operatrice (pompa o compressore).** ($Q = 0$, $L < 0$). In base all'equazione (33), l'apporto di energia meccanica è in grado di incrementare il potenziale termodinamico del fluido, la sua energia cinetica e quella di posizione. L'entità delle tre possibili variazioni di energia non è necessariamente dello stesso ordine di grandezza. Si supponga, ad esempio, che un compressore di aria si realizzi un incremento di temperatura di 100K. Ne consegue un aumento di entalpia di circa 100 kJ/kg. Lo stesso aumento

corrisponderebbe a un sollevamento del fluido di circa 10000 m o a un incremento di velocità di oltre 400 m/s. Va inoltre osservato che mentre le ultime due variazioni sono indipendenti dalla natura del fluido, quella di entalpia è fortemente legata alle sue proprietà termodinamiche

- **Sistema adiabatico che include una macchina motrice (turbina o espansore generico).** ($Q = 0, L > 0$). Il lavoro reso disponibile dal sistema comporta una caduta di entalpia totale e quindi una possibile diminuzione del potenziale termodinamico, dell'energia cinetica e di quella di posizione. Anche in questo caso, differenti tipologie di macchine rendono disponibili lavori specifici di diversi ordini di grandezza:
 - Una turbina a gas o vapore lavora con cadute di entalpia termodinamica dell'ordine delle centinaia o migliaia di kJ/kg
 - Una turbina idraulica che operi sotto un salto geodetico di 1000 m rende disponibile un lavoro specifico teorico di circa 10 kJ/kg
 - Un rotore eolico investito da un flusso di aria a 10 m/s realizzerebbe, al massimo, un lavoro specifico di 0.05 kJ/kg
 Questo tipo di confronti evidenzia come diverse tipologie di macchine motrici necessitino di differenti valori di portata massica di fluido motore per realizzare lo stesso livello di potenza meccanica.
- **Sistema che include uno scambiatore di calore (con sottrazione di calore).** ($Q < 0, L=0$). La sottrazione di calore attraverso le pareti del sistema comporta una caduta di entalpia totale per cui possono verificarsi diminuzioni delle varia forma di energia. In base ai confronti prima riportati sulle possibili differenze tra i vari ordini di grandezza, è usuale ritenere che l'effetto principale dell'asportazione di calore consista nella diminuzione dell'entalpia termodinamica del fluido: come visto, un raffreddamento di 100 K di un kg di aria corrisponde a una caduta di 100 kJ/kg. La condensazione completa di vapore d'acqua saturo secco a 100 C comporta un'asportazione di calore di oltre 2000 kJ/kg.
- **Sistema che include una camera di combustione.** ($Q > 0, L=0$). Il termine prevalente è sicuramente rappresentato dal calore generato dall'ossidazione del combustibile che si traduce, per quanto visto in precedenza, in incremento di entalpia totale. Va solo precisato che l'ordine di grandezza della variazione di energia è legato al potere calorifico del combustibile: si ricorda che quello del metano è di circa 50000 kJ/kg e quindi una miscela stechiometrica aria/metano ($\alpha_{st} \cong 17$) ha a disposizione circa 2700 kJ per kg di miscela reagente. In una camera di combustione di turbina a gas che operi con le usuali dosature ($\alpha \cong 40$) sono a disposizione di ogni kg di miscela oltre 1200 kJ/kg che si traducono, in massima parte, in incremento di entalpia sensibile e quindi di temperatura.
- **Sistema che include un condotto fisso e adiabatico a sezione variabile** ($Q = 0, L=0$). E' il caso degli elementi statorici di turbomacchine motrici ed operatrici o di condotte di alimentazione di turbine idrauliche. L'equazione di bilancio (33) può essere rappresentata come:

$$H_2 = H_1$$

$$h_2 + \frac{c_2^2}{2} + gz_2 = h_1 + \frac{c_1^2}{2} + gz_1 \quad (34)$$

In cui si evidenzia come, in assenza di trasferimenti di energia, sia possibile la conversione di una delle tre forme considerate nelle altra due. Ancora più esplicitamente, le due espressioni seguenti sono rappresentative di processi in condotti acceleranti o deceleranti:

$$\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} = (h_1 - h_2) + g(z_1 - z_2) \quad (\text{condotti acceleranti})$$

$$h_2 - h_1 + g(z_2 - z_1) = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} \quad (\text{condotti deceleranti}) \quad (35)$$

Infatti, in un condotto accelerante, l'incremento di energia cinetica è ottenuto a spese di cadute di energia potenziale (termodinamica o di posizione). In un condotto decelerante, è invece possibile un *recupero* di energia potenziale associato alla diminuzione di energia cinetica.

L'equazione di continuità nella forma (7) indica che le variazioni di velocità del flusso sono ottenute attraverso la variazione delle sezioni di passaggio. Si rimanda, ovviamente, alla trattazione completa del flusso isentropico in ugelli e diffusori per una descrizione dettagliata dei fenomeni.

B.1) Altre forme dell'equazione dell'energia per sistemi stazionari a flusso continuo

L'equazione dell'energia nella forma (33) include la variazione di entalpia termodinamica che, come è noto, è solo in parte riconoscibile come variazione del contenuto di energia meccanica nel fluido. Applicando, infatti, la relazione di Gibbs in forma integrale si ottiene:

$$h_2 - h_1 = \int_1^2 T ds + \int_1^2 v dp \quad (36)$$

Pertanto, nella variazione di entalpia è inclusa un'aliquota di possibile degradazione dell'energia meccanica¹ associata alla generazione di entropia per effetto di fenomeni irreversibili. Tra le cause di maggior interesse nello studio delle macchine va considerata la degradazione dell'energia meccanica per effetto di resistenze passive al moto del fluido. Tale effetto viene sintetizzato in un termine di *lavoro di attrito* che, per sua natura, è intrinsecamente negativo: le forze di attrito, risultanti dalle azioni viscoso fluido-parete, si oppongono infatti al flusso e la corrispondente aliquota di lavoro dissipato dal fluido contro tali forze contribuisce all'aumento di entropia secondo la relazione:

$$\int_1^2 T ds = Q + |L_a| \quad (37)$$

Combinando le relazioni (36) e (37) si ottiene

$$h_2 - h_1 - Q = \int_1^2 v dp + |L_a|$$

Ed è quindi possibile di due formulazioni dell'equazione dell'energia per sistemi aperti stazionari:

¹ L'effettiva entità della degradazione può essere stimata con i metodi dell'analisi exergetica

EQUAZIONE DELL'ENERGIA PER SISTEMI APERTI STAZIONARI:

$$L = h_1 - h_2 + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) + Q \quad (38)$$

Equazione di 1° principio

$$L = \int_2^1 v dp + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) - |L_a| \quad (39)$$

Equazione dell'energia "meccanica"

La forma (38) deriva direttamente dalla (33), essendosi solo isolato il termine di lavoro al primo membro. In tal modo vengono riconfermate le considerazioni precedenti:

- In una macchina motrice ($L > 0$) il lavoro è ottenuto a spese di una caduta di energia, nelle sue varie forme, del fluido. È inoltre evidente che un apporto di calore ($Q > 0$) incrementa il lavoro ottenibile dal sistema. Va ricordato che tale affermazione non contraddice il secondo principio della termodinamica se l'equazione (38) è riferita a una singola trasformazione, e non a un ciclo chiuso di processi termodinamici: nel singolo processo risulta possibile la conversione completa del calore addotto al sistema in lavoro. Al contrario, una sottrazione di calore ($Q < 0$) produrrebbe una riduzione dell'energia meccanica trasferibile all'esterno.
- In una macchina operatrice ($L < 0$) l'apporto di energia meccanica al fluido consente un incremento delle sue varie forme di energia: a parità di incremento dell'entalpia totale del fluido, un apporto di calore ($Q > 0$) consente di ridurre l'aliquota di lavoro, mentre una sottrazione di calore aumenta la necessità di apporto di energia nel modo lavoro. L'equazione (38) può infatti essere più agevolmente interpretata se scritta, per macchine operatrici, come segue:

$$|L| = h_2 - h_1 + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) - Q$$

Le ultime considerazioni sul lavoro di macchina operatrice derivano dalla natura dell'equazione (38) che, in quanto relazione di primo principio, propone la classica equivalenza tra lavoro e calore. Pertanto le due modalità di trasferimento dell'energia possono produrre lo stesso effetto, almeno in termini di variazione di entalpia totale. La già richiamata relazione di Gibbs segnala però che un aumento di entalpia può essere in parte associato a un aumento di entropia che deriva anche da eventuali trasferimenti di calore al sistema. Ne consegue che le trasformazioni subite dal fluido sono differenti a seconda dell'entità del calore trasferito e che, quindi, a una stessa variazione di entalpia corrispondono differenti variazioni del contenuto di energia meccanica del fluido.

L'analisi energetica del sistema va quindi completata con l'esame dell'equazione dell'energia nella forma (39) anche nota come *equazione dell'energia meccanica*. In essa sono presenti esclusivamente termini riconoscibili come δ di prima specie ed è inclusa l'aliquota di energia meccanica degradata per irreversibilità. In analogia a quanto visto in precedenza, sono possibili specifiche interpretazioni per le macchine motrici ed operatrici:

- In una macchina motrice ($L > 0$) il lavoro è ottenuto a spese di una caduta di energia meccanica, nelle varie forme presenti nell'equazione (39); il lavoro di attrito va in detrazione al lavoro ottenibile. Sebbene nell'equazione (39) non sia espressamente presente l'eventuale aliquota di calore trasferito, la sua presenza altera ó come ricordato ó la trasformazione termodinamica e quindi l'integrale di vdp .
- In una macchina operatrice ($L < 0$) l'apporto di energia meccanica al fluido ha lo scopo diretto di incrementare le sue varie forme di energia meccanica. Il lavoro di attrito aumenta la necessità di lavoro da trasferire al sistema. Tali considerazioni risultano più evidenti adattando l'equazione (39) al caso delle macchine operatrici:

$$|L| = \int_1^2 v dp + \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + g(z_2 - z_1) + |L_a|$$

Anche in questo caso, va ricordato che l'eventuale apporto o sottrazione di calore altera il percorso della trasformazione del fluido e quindi l'integrale di vdp .

In entrambi i casi, va sottolineato che anche in assenza di trasferimenti di calore la trasformazione può essere comunque alterata dalla generazione di entropia associata alle cause dissipative prima descritte. Pertanto, il lavoro calcolato con l'equazione (39) deve tenere conto sia del lavoro d'attrito, sia del valore modificato dell'integrale di vdp . Da tali considerazioni discendono le note definizioni dei rendimenti adiabatici e politropici delle macchine motrici e operatrici.

B.2) L'equazione dell'energia meccanica per flussi incomprimibili

L'equazione (39) si presta a un'immediata trasformazione nel caso di flussi incomprimibili. L'ipotesi di densità (ovvero, di volume specifico) costante è applicabile ai liquidi perfetti ma, in pratica, anche al moto di un aeriforme a basso numero di Mach ($M < 0.25$). Si ottiene così la particolare formulazione dell'equazione dell'energia meccanica:

$$L = \frac{p_1 - p_2}{\rho} + \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + g(z_1 - z_2) - |L_a|$$

Equazione dell'energia" meccanica" (40)
per flussi incomprimibili

dalla quale si evidenzia, in modo più diretto, come una caduta di pressione costituisca una disponibilità di energia meccanica per una macchina motrice. Il ruolo della macchina operatrice ($L < 0$) consiste invece nella possibilità di incremento della pressione del fluido, così come di aumento della sua energia cinetica o di posizione.

L'equazione (40) può essere ulteriormente trasformata a seguito della definizione di *pressione totale*:

$$\frac{p_0}{\rho} = \frac{p}{\rho} + \frac{c^2}{2} + gz \quad ; \quad p_0 = p + \rho \frac{c^2}{2} + \rho gz$$

La pressione totale risulta quindi dalla somma della pressione statica, della pressione dinamica e di quella idrostatica. A seguito di tale definizione, l'equazione dell'energia meccanica (40) diviene:

$$L = \frac{P_{01} - P_{02}}{\rho} - |L_a| \quad (\text{per macchine motrici})$$

$$|L| = \frac{P_{02} - P_{01}}{\rho} + |L_a| \quad (\text{per macchine operatrici}) \quad (41)$$

Risulta quindi evidente che una macchina motrice sfrutta la caduta di pressione totale del fluido per generare energia meccanica. Il lavoro ottenuto risulta diminuito in presenza di azioni dissipative. In una macchina operatrice, l'apporto di energia meccanica ha lo scopo di incrementare la pressione totale del fluido ma anche di fare fronte alle resistenze passive al moto, come sintetizzato dal lavoro di attrito.

Un caso particolare è rappresentato dal flusso incomprimibile in condotti fissi ($L = 0$) per i quali le (40) e (41) si riducono a:

$$\frac{P_{02}}{\rho} = \frac{P_{01}}{\rho} - |L_a|$$

$$\frac{p_2}{\rho} + \frac{c_2^2}{2} + gz_2 = \frac{p_1}{\rho} + \frac{c_1^2}{2} + gz_1 - |L_a| \quad (42)$$

Nel moto in un condotto fisso, il fluido tende a conservare la propria pressione totale, a meno delle perdite per attrito. In particolare, è possibile la conversione di pressione dinamica (attraverso variazioni di velocità in condotti a sezione variabile) in pressione statica o idrostatica o viceversa. L'equazione (42), in assenza di effetti dissipativi, si riduce alla nota equazione di Bernoulli.

B.3) La definizione di condizioni totali per flussi comprimibili.

Si è già utilizzata in precedenza la definizione di entalpia totale che, nel caso siano trascurabili i contributi di energia di posizione, si riduce a:

$$H = h + \frac{c^2}{2} \quad \text{entalpia totale specifica}$$

Nel caso del flusso di un fluido comprimibile perfetto, si può definire anche la temperatura totale, T_0 , come:

$$H - h = \frac{c^2}{2} = c_p(T_0 - T) \quad \Rightarrow \quad T_0 = T + \frac{c^2}{2c_p} \quad \text{Temperatura totale}$$

La temperatura totale (o di ristagno) del fluido è quindi quella raggiunta dal fluido se viene rallentato fino alla condizione di velocità nulla, in assenza di scambi di energia con l'esterno.

La corrispondente pressione totale p_0 , già definita per i flussi incomprimibili, è legata alle ipotesi di arresto del flusso in condizioni adiabatiche reversibili. Con tali ipotesi risulta:

$$\frac{c^2}{2} = c_p (T_0 - T) = \int_p^{p_0} v dp \Rightarrow \frac{p_0}{p} = \left(\frac{T_0}{T} \right)^{\frac{k}{k-1}} \quad \text{Pressione totale}$$

Pertanto, in un flusso adiabatico in un condotto fisso, la temperatura e l'entalpia totale si conservano mentre la pressione totale può progressivamente diminuire per effetto di fenomeni dissipativi. Nel solo caso di flusso adiabatico e reversibile valgono le note relazioni di *Rankine ó Hugoniot*:

$$\frac{T_0}{T} = \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{k-1}{k}} = \left(\frac{\rho_0}{\rho} \right)^{k-1} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2$$

In cui M è il *numero di Mach* definito come il rapporto tra la velocità del flusso e la velocità del suono *laplaciana*:

$$a^2 = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s=\text{cost}} = k \frac{p}{\rho} = kRT \quad ; \quad M = \frac{c}{a}$$

Si può verificare che, nel caso di flusso di gas biatomici come quelli prevalentemente costituenti l'aria ($k = 1.4$), fino a $M = 0.3$ il rapporto di densità totale/statica risulta inferiore a 1.1 ed è quindi giustificata l'assunzione semplificata di flusso incomprimibile.

3. EQUAZIONE DI BILANCIO DELLA QUANTITÀ DI MOTO

L'equazione di quantità di moto è di fondamentale importanza per la descrizione dei meccanismi di scambio di lavoro tra fluido e macchina. Si osservi, infatti, che l'equazione dell'energia, nelle sue varie forme, correla il lavoro alle variazioni di energia del sistema senza fornire indicazioni circa le reali modalità di trasferimento dell'energia meccanica. A tale scopo, e in base alla definizione primitiva di lavoro, vanno individuate le forze agenti tra fluido e pareti del sistema: queste, moltiplicate scalarmente per l'eventuale spostamento delle pareti stesse, forniranno il valore del lavoro scambiato.

Un primo esempio si è già ritrovato discutendo l'equazione dell'energia per sistemi aperti: come si ricorderà, il termine (pdV/dt) può essere infatti riconosciuto come potenze meccanica scambiata tra fluido e pareti mobili del sistema. Nel caso di una macchina alternativa con sistema pistone o cilindro, è immediato verificare che la velocità di variazione del volume, dV/dt , può essere scritta come:

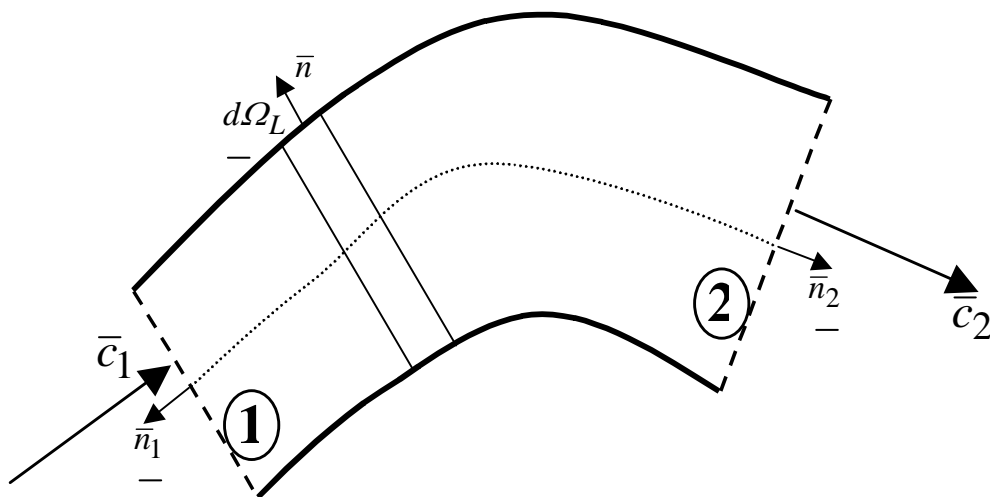
$$\frac{dV}{dt} = \Omega \frac{ds}{dt} \quad (43)$$

In cui Ω è la superficie del pistone e s la sua corsa. Ne consegue, quindi:

$$p \frac{dV}{dt} = p\Omega \frac{ds}{dt} \quad (44)$$

In quest'ultima relazione è possibile riconoscere il prodotto della forza totale agente sul pistone per la sua velocità che, come è noto, è pari alla potenza meccanica trasferita alla parete mobile.

È quindi scopo generale dell'equazione della quantità di moto individuare tutte le forze agenti sul sistema, correlandole alle variazioni delle condizioni di flusso per effetti non stazionari o convettivi. Nella discussione di tale equazione, si farà riferimento al sistema a flusso continuo rappresentato in figura, di forma generica, in cui sono riconoscibili le superfici di flusso, (1) e (2), e le superfici solide laterali.



La quantità di moto totale del sistema racchiuso dalle superfici di controllo citate è data da:

$$\overline{\mathcal{M}} = M\overline{c} \quad \text{Quantità di Moto} \quad (45)$$

In cui M è la massa totale e \overline{c} la velocità media del flusso nel volume di controllo. Trattandosi di una grandezza vettoriale, la corrispondente equazione di bilancio potrà essere scritta in forma vettoriale e poi sviluppata in tre componenti scalari.

È evidente che la **variazione nel tempo** della quantità di moto è data da:

$$\frac{d\overline{\mathcal{M}}}{dt} = M \frac{d\overline{c}}{dt} + \overline{c} \frac{dM}{dt} \quad \text{Variazione nel tempo} \quad (46)$$

Come per le altre grandezze estensive, anche la variazione di quantità di moto può essere quindi dovuta a quella della massa o a un'alterazione della grandezza specifica, in questo caso la velocità media.

Va inoltre osservato che la variazione nel tempo della quantità di moto ha le dimensioni di una forza: tutti i termini dell'equazione di bilancio saranno quindi dimensionalmente omogenei con questa grandezza fisica. Vengono quindi elencati nel seguito:

Flussi Convettivi:

Sono associati al trasporto della quantità di moto specifica (la velocità) da parte delle portate massiche attraverso le superfici di ingresso e uscita. In base alle convenzioni già adottate in precedenza, sarà quindi:

$$\left. \begin{array}{l} -\dot{m}_1\overline{c}_1 \\ +\dot{m}_2\overline{c}_2 \end{array} \right\} \quad \text{Flussi convettivi} \quad (47)$$

Flussi Diffusivi:

I flussi diffusivi di quantità di moto sono rappresentati dalle forze agenti su tutte le superfici, sia quelle di flusso sia quelle solide. Le principali sono elencate di seguito:

$$\left. \begin{array}{l} + p_1\Omega_1\overline{n}_1 \\ + p_2\Omega_2\overline{n}_2 \\ (\text{è trascurato il trasporto di sforzi tangenziali } \tau_1\Omega_1\overline{t}_1, \text{ etc.}) \\ + \iint \overline{\tau} \cdot \overline{n} d\Omega_L = \overline{F}_{par} \left(\begin{array}{l} \text{forza totale del fluido} \\ \text{sulle pareti laterali} \end{array} \right) \end{array} \right\} \quad \text{Flussi diffusivi} \quad (48)$$

Sono quindi state prese in considerazione le forze normali alle superfici di flusso, legate alle pressioni esterne, e la forza totale esercitata dal fluido sulle pareti solide del sistema, \overline{F}_{par} . Quest'ultima è il risultato della complessa distribuzione di flusso all'interno del condotto ed è legata al valore locale delle componenti del tensore degli sforzi, $\overline{\tau}$, che include sia gli sforzi normali sia quelli tangenziali derivanti dal moto viscoso.

Produzione:

Si è già accennato in precedenza alla possibile esistenza di termini sorgente, non giustificabili con i flussi o le variazioni nel tempo della grandezza controllata. Nel bilancio della quantità di moto, può non essere trascurabile il contributo della forza peso (derivante dalla massa totale di fluido contenuta nel volume di controllo). Va quindi considerato il termine:

$$- M\bar{g} \qquad \qquad \qquad \text{Produzione} \qquad \qquad \qquad (49)$$

Il segno di tale forza è giustificato dal fatto che, agendo da sola sul sistema, provocherebbe un'accelerazione concorde con quella di gravità. In tal senso, la forza peso risulta equivalente a un flusso entrante di quantità di moto che va quindi assunto col segno negativo.

Equazione Completa di Bilancio di Quantità di Moto:

Includendo tutti i termini sopra elencati, l'equazione completa di bilancio della quantità di moto, in regime non stazionario, è espressa come:

$$\frac{d\bar{M}}{dt} + \dot{m}_2\bar{c}_2 - \dot{m}_1\bar{c}_1 + p_2\Omega_2\bar{n}_2 + p_1\Omega_1\bar{n}_1 + \bar{F}_{par} - M\bar{g} = 0 \qquad (50)$$
$$\frac{d\bar{M}}{dt} = M \frac{d\bar{c}}{dt} + \bar{c} \frac{dM}{dt} = \dot{m}_1\bar{c}_1 - \dot{m}_2\bar{c}_2 - p_1\Omega_1\bar{n}_1 - p_2\Omega_2\bar{n}_2 - \bar{F}_{par} + M\bar{g}$$

L'equazione è quindi orientata alla determinazione delle variazioni del regime di velocità medio all'interno del volume di controllo, $\frac{d\bar{c}}{dt}$: si ricorda, infatti, che il termine dM/dt deriva direttamente dall'equazione di bilancio della massa. Le variazioni non stazionarie della quantità di moto, e quindi della velocità, sono note una volta individuati i flussi convettivi, le forze di superficie e le forze di massa. La stima dell'accelerazione del fluido è quindi solo formalmente semplice, ma è di fatto resa complessa dalla necessità di valutare correttamente le forze di parete.

3.1 Equazione di Bilancio di Quantità di Moto in regime stazionario

Come già precisato, nello studio preliminare dei componenti di macchine a flusso continuo, è di particolare interesse la formulazione di tutte le equazioni di bilancio in regime stazionario. Nel caso dell'equazione di quantità di moto tale formulazione discende dalla (50): ricordando che l'ipotesi di stazionarietà implica $\dot{m}_1 = \dot{m}_2 = \dot{m}$ e $d\bar{M}/dt = 0$, si ottiene:

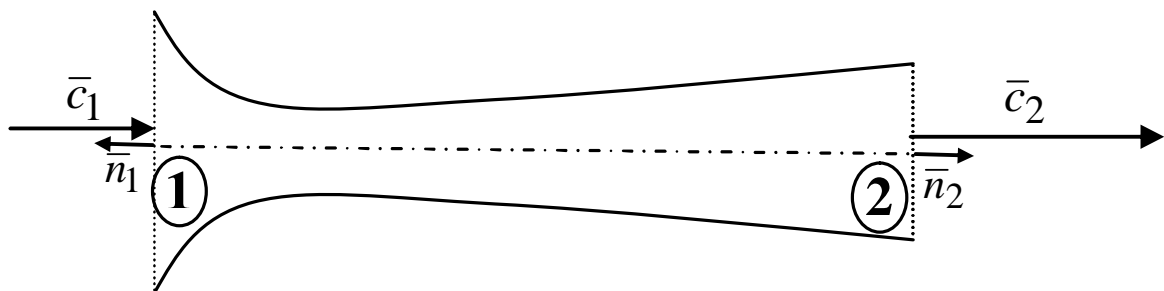
$$\begin{array}{ccccccc} \bar{F}_{par} & = & \dot{m}(\bar{c}_1 - \bar{c}_2) & - & p_1\Omega_1\bar{n}_1 - p_2\Omega_2\bar{n}_2 & - & M\bar{g} \\ \text{Spinta} & & \text{Spinta} & & \text{Spinta} & & \text{Forza di} \\ \text{Totale} & & \text{Dinamica} & & \text{Statica} & & \text{Massa} \end{array} \qquad (51)$$

Si osservi che l'equazione è stata riorganizzata in modo da evidenziare che in questo caso, la forza di parete, la cui stima diretta è notevolmente complessa, può essere dedotta dal bilancio dei flussi in ingresso e uscita e dalla forza di massa, vale a dire di termini di più semplice valutazione. Questo aspetto

costituisce la notevole peculiarità delle equazioni di bilancio stazionarie, che consentono la stima delle azioni scambiate tra fluido e ambiente esterno, in base alle variazioni di condizioni di flusso tra ingresso e uscita dal sistema. Ne sono un esempio le formulazioni (38) e (39) dell'equazione dell'energia e l'equazione (51) della quantità di moto. Va ancora ricordato che quest'ultima è un'equazione vettoriale, per cui vanno tenute in conto gli orientamenti dei vettori velocità e delle normali alle superfici di flusso. In definitiva, la spinta totale esercitata dal flusso sul condotto dipende dalla spinta dinamica (associata alla variazione vettoriale delle velocità), da quella statica e dalle forze di massa. L'importanza relativa dei vari termini va valutata in ogni singolo caso: in particolare, in molte applicazioni con flusso di aeriformi la forza peso può risultare trascurabile.

3.2 Equazione Scalare della Spinta in regime stazionario unidimensionale

Il regime di moto unidimensionale è caratterizzato da velocità del flusso orientate secondo l'asse del condotto (come in figura) e da assenza di gradienti significativi di proprietà in direzione normale all'asse. Si tratta, ovviamente, di un'approssimazione non sempre accettabile: la stessa figura mostra come l'andamento delle pareti del condotto imponga certamente direzioni delle velocità locali inclinate rispetto all'asse del condotto. L'ipotesi di moto unidimensionale è quindi riferita alla velocità medie attraverso ciascuna sezione del condotto e può essere, comunque, accettata solo in uno studio preliminare del flusso nel condotto.



Con tale ipotesi, può essere considerata come significativa la sola componente scalare dell'equazione (51) nella direzione dell'asse del condotto. Ritenendo trascurabili le forze di massa, si ottiene:

$$\begin{array}{rcccl}
 F & = & \dot{m}(c_1 - c_2) & + & p_1\Omega_1 - p_2\Omega_2 \\
 \textit{Spinta} & & \textit{Spinta} & & \textit{Spinta} \\
 \textit{Totale} & & \textit{Dinamica} & & \textit{Statica}
 \end{array} \quad (52)$$

Il segno della spinta totale, F , esercitata dal fluido, così come quello delle sue componenti dinamica e statica sul condotto sarà positivo se il verso della forza è concorde con quello della velocità del flusso. Pertanto, a titolo di esempio:

- In un condotto accelerante, ($c_2 > c_1$) la spinta dinamica sarà orientata in verso opposto alle velocità;
- Nello stesso condotto accelerante, in assenza di trasferimenti di energia con l'esterno, sarà certamente ($p_2 < p_1$): quindi la spinta statica sarà concorde con la velocità del flusso.

L'orientamento della spinta totale dipenderà dal bilancio tra spinta dinamica e spinta statica.

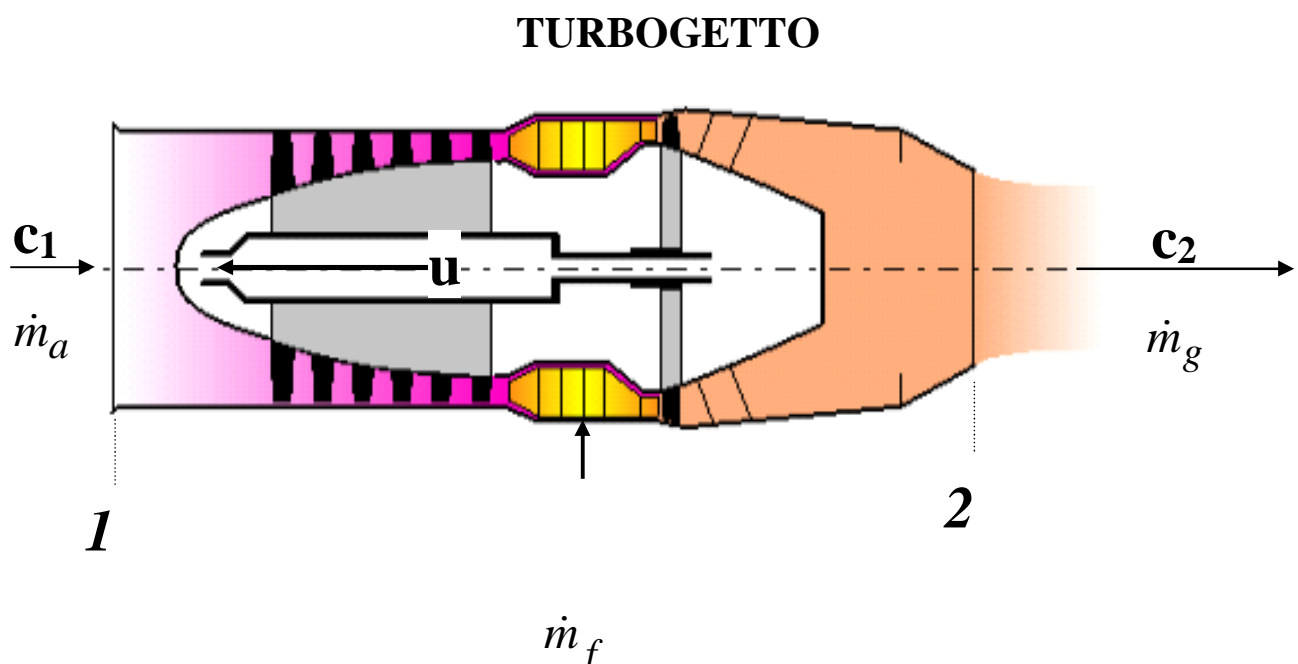
L'equazione (52) è di immediato utilizzo in numerosi casi di interesse per lo studio delle macchine: ad esempio, il condotto in figura potrebbe essere la cassa che racchiude gli elementi statorici e

rotorici di una turbomacchine assiale e la forza totale stimata con la (52) rappresenta la spinta assiale sui supporti dell'albero e quella che sollecita la cassa vincolata allo spazio fisso.

Nell'esempio riportato, la spinta assiale non corrisponde ad alcuno scambio di lavoro tra fluido e macchina, in quanto il condotto non ha componenti di moto in tale direzione. Il trasferimento di energia meccanica andrà quindi valutato attraverso la stima delle forze che agiscono in direzione periferica sul sistema rotorico o, come si vedrà nel seguito, calcolando il momento di tali forze rispetto all'asse di rotazione.

Un primo esempio di calcolo della potenza meccanica trasferita dal fluido al sistema attraverso la stima della spinta assiale è invece rappresentato dal motore aeronautico a getto, per il quale tale spinta agisce nelle direzione del moto del sistema.

3.3 Esempio del turbogetto



Come è noto, il motore a getto schematizzato in figura opera in base alla presenza di un gruppo generatore di gas che, nella sua configurazione più semplice, è costituito da un compressore, una camera di combustione (alimentata con la portata di combustibile \dot{m}_f), e una turbina che eroga la potenza meccanica necessaria all'azionamento del compressore. Tale gruppo è incluso nel volume di controllo racchiuso tra le pareti solide e le superfici di ingresso (1) (lato presa d'aria) e uscita (2) (scarico dei gas combusti dall'ugello posto a valle della turbina). I gas di scarico, dopo l'espansione finale nell'ugello, vengono restituiti all'esterno alla pressione atmosferica e a velocità c_2 decisamente più elevata di quella di ingresso, c_1 , che corrisponde in pratica alla velocità dell'aria esterna. La temperatura dei gas di scarico, e quindi il livello di entalpia sensibile h_2 , è più elevata di quella esterna in quanto i gas sono nelle condizioni di fine espansione di un ciclo termodinamico del tutto analogo a quello realizzato nelle turbine a gas.

Possono essere quindi impostate le equazioni di bilancio della massa, dell'energia e della quantità di moto:

Equazione della Massa

$$\dot{m}_g = \dot{m}_a + \dot{m}_f \quad (53)$$

Assumendo, in prima approssimazione, $\dot{m}_g \cong \dot{m}_a = \dot{m}$ e utilizzando la forma (31) il bilancio dell'energia viene scritto come:

Equazione dell'Energia

$$P = \dot{m}_f H_i - \dot{m}(H_2 - H_1) = \dot{m}_f H_i - \dot{m} \left[\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + (h_2 - h_1) \right] \quad (54)$$

Si è ipotizzato che il potere calorifico del combustibile venga integralmente convertito in calore disponibile per il processo termodinamico. Più correttamente, andrebbe tenuto in conto un rendimento di combustione. L'equazione (54) valuta quindi la potenza meccanica del motore a getto in base alla potenza termica teorica associata al flusso di combustibile e alle perdite del processo termo fluidodinamico: queste ultime sono rappresentate dall'incremento di flussi di energia cinetica e di entalpia sensibile tra uscita e ingresso del sistema. Come più volte, ricordato, si è quindi applicato un bilancio esteso di primo principio al volume di controllo che include il turbogetto. La potenza meccanica deriva da tale bilancio ma non è giustificata in base a un meccanismo di trasferimento dell'energia. Tale meccanismo viene invece rappresentato nell'equazione di quantità di moto, scritta ipotizzando un contributo nullo o trascurabile della spinta statica ($p_1 \Omega_1 \cong p_2 \Omega_2$):

Equazione di Q.d.M (ipotesi di spinta statica nulla)

$$F = \dot{m}(c_1 - c_2) \quad (55)$$

Nelle ipotesi fatte, la spinta totale del flusso sul motore corrisponde alla spinta dinamica e agisce in verso opposto alla velocità del getto in uscita, c_2 . Essendo tale spinta applicata a un sistema in movimento con la velocità u , la potenza meccanica potrà quindi essere espressa dalla relazione:

$$P = -Fu = \dot{m}(c_2 - c_1)u \quad (56)$$

che associa il trasferimento di energia meccanica alla causa diretta, vale a dire la forza applicata al sistema in movimento.

Le stesse equazioni nel sistema di riferimento relativo

Nell'ipotesi di velocità costante del velivolo, u , le stesse equazioni di bilancio possono essere scritte rispetto a un sistema di riferimento inerziale (in quanto in moto rettilineo uniforme rispetto al riferimento assoluto). Un osservatore solidale a tale sistema vede i flussi in ingresso e in uscita secondo *velocità relative*, legate a quelle assolute attraverso la velocità di trascinamento, u , del sistema di riferimento:

$$(c_2 = w_2 + u \quad ; \quad c_1 = w_1 + u) \quad (57)$$



Va ricordato che, in assenza di accelerazioni del sistema di riferimento relativo, le forze valutate in tale sistema sono uguali a quelle stimate nel riferimento assoluto. Risulta, infatti:

$$c_1 - c_2 = w_1 - w_2$$

$$F = \dot{m}(c_1 - c_2) = \dot{m}(w_1 - w_2) \quad (58)$$

L'osservatore relativo quindi vede una forza uguale a quella prima calcolata nel riferimento assoluto, ma non può vedere trasferimenti di energia meccanica, in quanto in moto con la stessa velocità del sistema. Quindi i bilanci di energia nel riferimento assoluto e relativo risultano differenti:

$$\dot{m}_f H_i \eta_b = \begin{cases} P + \dot{m} \left[\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + (h_2 - h_1) \right] & \text{riferimento assoluto} \\ \dot{m} \left[\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + (h_2 - h_1) \right] & \text{riferimento relativo} \end{cases} \quad (59)$$

- Nel riferimento assoluto, la potenza termica netta rilasciata dalla combustione realizza l'erogazione di potenza meccanica, a meno delle perdite per flusso di energia cinetica ed entalpia sensibile
- Nel riferimento relativo, la stessa potenza termica ha come effetto utile l'incremento di flusso di energia cinetica relativa e come effetto secondario la perdita di flusso di entalpia sensibile.

Confrontando le espressioni nei due sistemi di riferimento si ottiene un'ulteriore formulazione della potenza meccanica del motore a getto:

$$P = \dot{m} \left[\frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right] \quad (60)$$

Alla stessa formulazione si può pervenire trasformando l'equazione (56) con le relazioni (57). Sia la forma (56) che quella (60) rappresentano casi particolari dell'equazione di Eulero dello scambio di energia meccanica in sistemi fluidodinamici, applicati a una situazione di sistema in moto rettilineo. La forma più generale, discussa nel seguito, sarà invece anche applicabile a sistemi in rotazione e quindi applicabile allo studio delle turbomacchine.

Il rendimento $\tilde{\theta}$ propulsivo e $\tilde{\theta}$ termo-propulsivo

Il sistema propulsivo si configura, evidentemente, come $\tilde{\theta}$ impianto motore termico in quanto il flusso di energia del combustibile $\dot{m}_f H_i$ viene convertito in potenza propulsiva P .

Lo scambio di energia meccanica è affidato, in questo caso, alla spinta esercitata dal flusso dei gas sul sistema: si tratta quindi di un meccanismo di scambio di energia del tutto simile a quello tipico di una macchina dinamica, in quanto la spinta utile è prevalentemente associata alla variazione delle velocità assolute e relative del flusso.

Come in tutti i sistemi dinamici, va tenuta in conto la tipica **perdita per energia cinetica allo scarico**, che risulta evidente dal confronto delle equazioni (59) e (60). Infatti, nel sistema relativo, l'effetto utile del processo di conversione dell'energia si manifesta come aumento del flusso di energia cinetica relativa:

$$P_w = \dot{m} \left[\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \right]$$

e quindi la potenza propulsiva utile (eq. 60) risulta pari a:

$$P = P_w - \dot{m} \left[\frac{c_2^2 - c_1^2}{2} \right]$$

Nell'ipotesi, abbastanza realistica, che la velocità c_1 , in quanto velocità dell'aria esterna, sia trascurabile rispetto alla velocità di trascinamento (o $\tilde{\theta}$ di volo) u , risulta, evidentemente:

$$(c_1 \cong 0 \quad \Rightarrow \quad w_1 \cong |u|)$$

Pertanto la potenza utile è data, ricordando anche l'espressione della spinta dinamica, da:

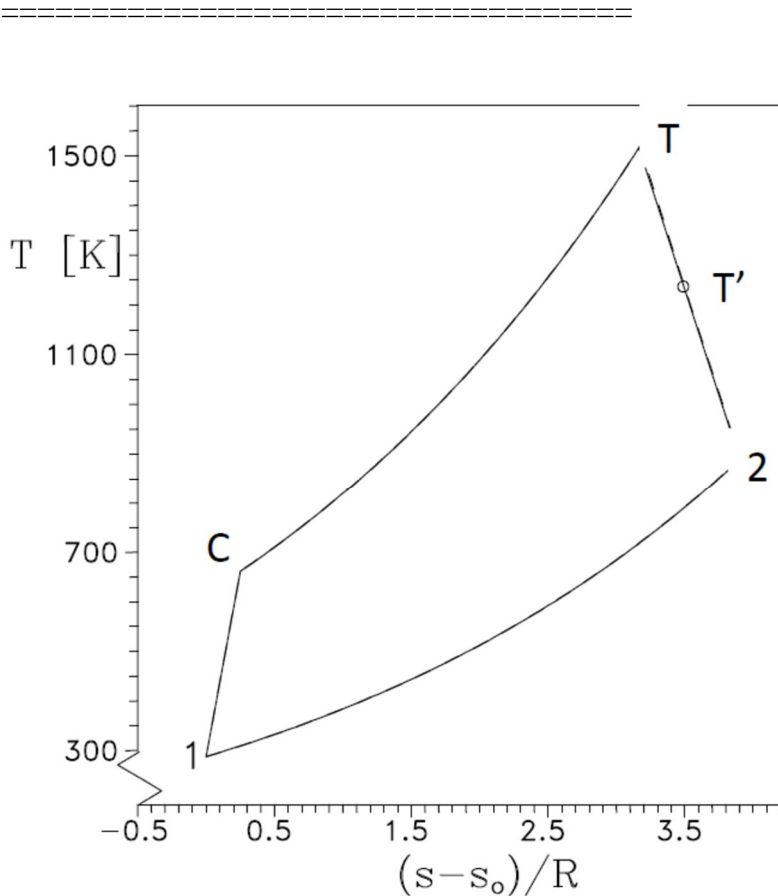
$$P = P_w - \dot{m} \frac{c_2^2}{2} = \dot{m} \left[\frac{w_2^2 - u^2}{2} - \frac{c_2^2}{2} \right] = \dot{m} (w_2 - |u|)$$

La precedente relazione mette in evidenza come il flusso di energia cinetica assoluta allo scarico dal sistema rappresenti una perdita rispetto alla potenza teorica P_w , che tiene conto dell'incremento di energia cinetica relativa generato dal processo di conversione dell'energia del combustibile.

Da tale considerazione nasce la definizione di **rendimento propulsivo**:

$$\text{RENDIMENTO PROPULSIVO} \quad \eta_P = \frac{P}{P_w} = \left[\frac{2(w_2 - |u|)u}{w_2^2 - u^2} \right] = \frac{2|u|}{w_2 + |u|} = \frac{2}{\frac{w_2}{|u|} + 1}$$

Il rendimento propulsivo risulta quindi basso alle ridotte velocità di volo ($u \ll w_2$) e tende all'unità quando la velocità di volo è prossima alla velocità relativa del getto allo scarico, w_2 . Va però ricordato che, per avere una spinta positiva e quindi una potenza propulsiva utile, è necessario che sia $w_2 > |u|$, quindi il rendimento propulsivo unitario corrisponde a una situazione limite di nessun valore pratico. Come già sottolineato, la modalità di scambio di energia di un propulsore a getto è quella tipica di un sistema dinamico: il rendimento propulsivo corrisponde, in pratica, al rendimento di palettatura ideale di una turbomacchina motrice, in quanto ambedue i rendimenti considerano la perdita di energia cinetica allo scarico. Nel caso del sistema propulsivo a getto, il grado di reazione è unitario in quanto il processo di trasformazione dell'energia potenziale in energia cinetica avviene interamente nel sistema mobile.



L'aumento di energia cinetica relativa è il prodotto utile di un ciclo termodinamico che, in modo semplificato è rappresentato dalla figura in alto. In tale ciclo, del tutto simile a un ciclo Brayton tipico delle turbine a gas è possibile riconoscere le fasi:

- 1 ó C : Compressione dell'aria entrante nel sistema (in realtà, parte della compressione viene realizzata dalla presa dinamica che precede il compressore e che consente la conversione dell'energia cinetica in ingresso, $\frac{1}{2}u^2$, in energia potenziale
- C ó T: Fase di adduzione di calore, realizzata attraverso il processo di combustione
- T ó T' Espansione in turbina, il cui lavoro viene interamente ceduto al compressore sia per compensare il lavoro della fase C ó 1, sia per vincere le perdite meccaniche.
- T' ó 2 : Fase "utile" del ciclo con la conversione della caduta di entalpia in energia cinetica relativa.
- 2 ó 1 : È la fase di restituzione del calore, corrispondente alla caduta di entalpia h_2 ó h_1

Pertanto, come in tutti gli impianti motori termici è possibile individuare un rendimento globale che, nel caso del motore a getto, è denominato rendimento termo-propulsivo. Tale rendimento tiene conto e quindi definito come:

$$\text{RENDIMENTO TERMO-PROPULSIVO} \quad \eta_{TP} = \frac{P}{\dot{m}_f H_i}$$

e tiene conto di tutte le perdite che intervengono nel processo di conversione dell'energia:

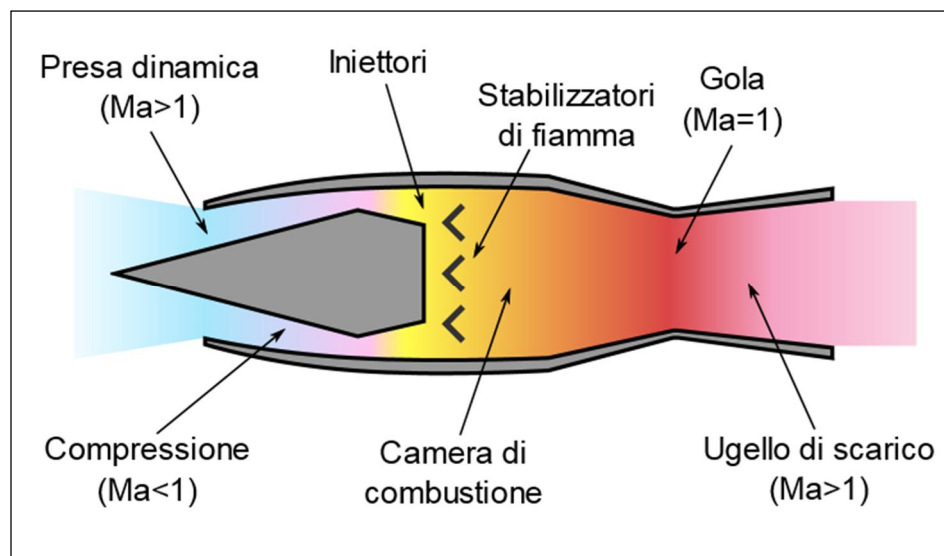
- Perdite di combustione
- Perdite meccaniche del gruppo turbina - compressore
- Perdita termodinamica
- Perdita di energia cinetica allo scarico

Va ricordato che il prodotto utile del ciclo termodinamico è rappresentato dall'incremento di flusso di

energia cinetica relativa $\dot{m} \left[\frac{w_2^2 - u^2}{2} \right]$, che si traduce in potenza propulsiva attraverso il rendimento

propulsivo prima definito. Viene quindi definito anche un rendimento termico del motore a getto, dato da:

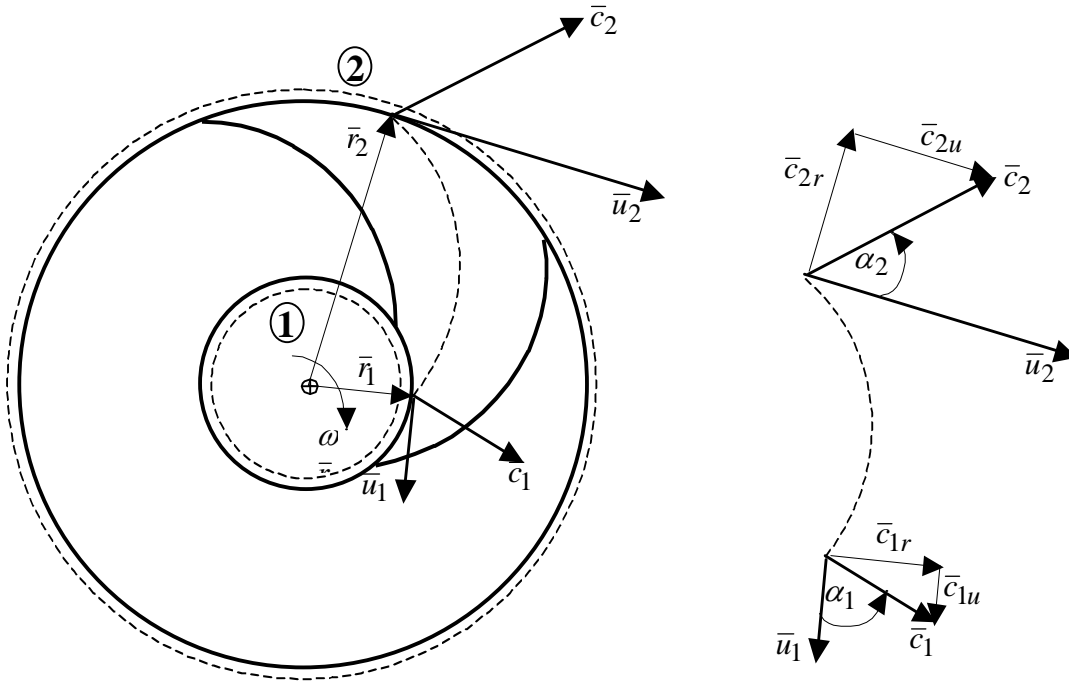
$$\text{RENDIMENTO TERMICO} \quad \eta_T = \frac{\dot{m} \frac{w_2^2 - u^2}{2}}{\dot{m}_f H_i} = \frac{\eta_{TP}}{\eta_P}$$



Esempio di **RAMJET** o **Stato-Reattore**. In questo caso, la compressione si realizza interamente nella presa dinamica e l'espansione avviene unicamente nell'ugello transonico

4. EQUAZIONE DI BILANCIO DEL MOMENTO DI QUANTITÀ DI MOTO (In Regime Stazionario)

Questa equazione viene ricavata per un volume di controllo che include il rotore di una turbomacchina: nel caso in figura si tratta di una macchina a flusso radiale centrifugo di cui, per completezza, si è rappresentata anche la forma della palettatura.



In realtà, la formulazione delle equazioni di bilancio, in analogia a quanto visto in precedenza, prescinde dalla geometria interna del sistema e valuta, in regime stazionario, esclusivamente i flussi attraverso le sezioni di ingresso e uscita (1) e (2). L'equazione di bilancio di quantità di moto, trascurando le forze di massa e l'azione di sforzi tangenziali sulle superfici (1) e (2) viene riportata nella forma (51), con il calcolo esplicito delle forze totali di parete:

Forza Totale dal Bilancio di Quantità di Moto:

$$\begin{aligned} \bar{F} &= \dot{m}\bar{c}_1 - \dot{m}\bar{c}_2 - p_1 \bar{n}_1 - p_2 \bar{n}_2 = \\ &= \bar{F}_{c_1} - \bar{F}_{c_2} - \bar{F}_{p_1} - \bar{F}_{p_2} \end{aligned} \quad (61)$$

La forza \bar{F} è la risultante di tutte le azioni esercitate dal flusso sulla palettatura ed è valutata in base alle variazioni di flussi convettivi nel riferimento assoluto e delle azioni di pressione sulle due superfici aperte. Ai fini della valutazione del trasferimento di energia meccanica in un sistema in rotazione è fondamentale il calcolo del momento esercitato dalla forza totale rispetto all'asse di rotazione. L'equazione (61) viene quindi trasformata attraverso il prodotto vettoriale di ciascuna componente per il raggio orientato di applicazione (\bar{r}_1 e \bar{r}_2 in figura). Si ottiene, in tal modo, il *bilancio stazionario del momento di quantità di moto*:

Momento delle Forze rispetto all'asse di rotazione:

$$\overline{\mathbf{M}}_o = \overline{\mathbf{F}}_{c_1} \times \overline{\mathbf{r}}_1 - \overline{\mathbf{F}}_{c_2} \times \overline{\mathbf{r}}_2 - \overline{\mathbf{F}}_{p_1} \times \overline{\mathbf{r}}_1 - \overline{\mathbf{F}}_{p_2} \times \overline{\mathbf{r}}_2 \quad (62)$$

La componente del momento $\overline{\mathbf{M}}_o$ di interesse per lo scambio di lavoro tra fluido e macchina è evidentemente quella diretta secondo l'asse di rotazione, quindi nella direzione del vettore velocità angolare $\overline{\omega} = \omega \overline{\mathbf{i}}_x$. Del resto i vettori della velocità del flusso sono caratterizzati da tre componenti:

Componenti della velocità assoluta:

$$\overline{\mathbf{c}} = \overline{c}_x \overline{\mathbf{i}}_x + \overline{c}_r \overline{\mathbf{i}}_r + \overline{c}_u \overline{\mathbf{i}}_u = c_x \overline{\mathbf{i}}_x + c_r \overline{\mathbf{i}}_r + c_u \overline{\mathbf{i}}_u$$

assiale radiale tangenziale

Per ciascuna delle quali è possibile stimare il contributo al momento sull'asse di rotazione:

$$\begin{aligned} \overline{\mathbf{c}} \times \overline{\mathbf{r}} &= \overline{c}_x \overline{\mathbf{i}}_x \times \overline{\mathbf{r}} + \overline{c}_r \overline{\mathbf{i}}_r \times \overline{\mathbf{r}} + \overline{c}_u \overline{\mathbf{i}}_u \times \overline{\mathbf{r}} = c_u r \overline{\mathbf{i}}_x \\ &\equiv \mathbf{0} \quad \quad \quad \equiv \mathbf{0} \end{aligned}$$

Va precisato che i momenti delle componenti assiale e radiale si annullano per motivi differenti: infatti, il momento della componente \overline{c}_r si annulla per parallelismo mentre quello della \overline{c}_x si annulla a causa della simmetria assiale del sistema: infatti a ogni vettore \overline{c}_x che esercita momento rispetto all'asse corrisponde un vettore in posizione simmetrica che esercita momento opposto. In ogni caso, il momento esercitato da ciascuna componente assiale è orientato perpendicolarmente al piano contenente l'asse e il raggio orientato e quindi non dà contributo nella direzione della velocità angolare.

Infine, le forze di pressione non danno momento rispetto all'asse di rotazione in quanto perpendicolari alle superfici (1) e (2) e quindi parallele ai raggi orientati:

$$\overline{\mathbf{F}}_p \times \overline{\mathbf{r}} \equiv \mathbf{0}$$

In base alle considerazioni precedenti, è possibile esprimere direttamente il modulo del momento esercitato dal flusso rispetto all'asse di rotazione:

Modulo del momento risultante (del fluido sull'asse di rotazione):

$$\mathbf{M}_o = \dot{m} c_{1u} r_1 - \dot{m} c_{2u} r_2 = \dot{m} (c_{1u} r_1 - c_{2u} r_2) \quad (63)$$

La stima corretta del momento \mathbf{M}_o implica che siano rispettate le convenzioni sui segni:

- Le componenti tangenziali, c_{1u} e c_{2u} , delle velocità assolute sono positive se orientate nello stesso verso delle velocità periferiche, u_1 e u_2 .
- Il segno del momento risultante \mathbf{M}_o risulta dal bilancio tra i prodotti $c_{1u} r_1$ e $c_{2u} r_2$. Pertanto risulta importante sia la variazione di componente tangenziale della velocità, sia quella di raggio.

Un valore positivo di M_o indicherà un'azione motrice del flusso sul rotore, un valore negativo un'azione resistente.

Di fatto, l'equazione (63) valuta semplicemente il momento rispetto all'asse cui non necessariamente corrisponde un trasferimento di energia: infatti, in caso di velocità angolare nulla tale momento va inteso semplicemente come sollecitazione trasmessa dal rotore ai suoi vincoli. Per sistemi in rotazione è invece possibile passare alla stima del trasferimento di energia meccanica:

Potenza trasferita dal fluido alla macchina:

$$(u = r \quad \text{velocità periferica})$$

$$P = M_o \omega = \dot{m}(c_{1u}u_1 - c_{2u}u_2) \tag{64}$$

In base a quanto già discusso in merito al segno del momento M_o , la potenza meccanica sarà effettivamente trasferita dal fluido alla macchina (situazione, quindi, da macchina motrice) se risulta $c_{1u}u_1 > c_{2u}u_2$; in caso contrario M_o rappresenterà il momento resistente opposto dal flusso alla rotazione della macchina e la potenza sarà negativa, come si verifica per le macchine operatrici. Grazie alle ipotesi di regime di moto del fluido e di rotazione della macchina stazionari, è poi possibile passare dalla potenza al lavoro per unità di massa:

Lavoro trasferito dal fluido alla macchina:

$$L = \frac{P}{\dot{m}} = u_1 c_{1u} - u_2 c_{2u} = u_1 c_1 \cos \alpha_1 - u_2 c_2 \cos \alpha_2 \tag{65}$$

EQUAZIONE DI EULERO PER LE TURBOMACCHINE

In questa equazione sono quindi evidenziati gli elementi indispensabili al trasferimento di energia meccanica tra fluido e macchina:

- Ricordando che le velocità periferiche sono date da $u = r \omega$, la possibilità di scambio di lavoro è strettamente legata alla velocità di rotazione della macchina. Tale caratteristica è peculiare delle *macchine dinamiche*: si ricorda che nelle macchine volumetriche l'entità del lavoro dipende unicamente dalle pressioni e dalle variazioni di volume, indipendentemente dalla velocità degli organi mobili.
- Analogamente, nessuno scambio di lavoro è possibile in assenza di velocità del flusso: si tratta di un'altra caratteristica tipica di una macchina dinamica, come già osservato nel caso del motore a getto, per il quale le azioni tra fluido e pareti del sistema sono possibili solo in presenza di variazioni di velocità del flusso (eq. 55 e 56). Nel caso delle turbomacchine va ancora precisato che, ai fini del trasferimento di lavoro, almeno una delle due velocità di ingresso o di uscita deve avere una componente non nulla nella direzione della velocità periferica: infatti una situazione con $c_{1u} = c_{2u} = 0$ renderebbe nullo il lavoro calcolato con la (65)
- Più in generale, lo scambio di lavoro risulta possibile solo se si verifica:

$$u_1 c_{1u} \neq u_2 c_{2u} \Rightarrow \begin{cases} r_1 \neq r_2 \\ c_{1u} \neq c_{2u} \end{cases}$$

Il trasferimento di energia meccanica tra fluido e macchina è reso quindi possibile da almeno una delle due condizioni:

- Il passaggio del flusso da un raggio di ingresso a uno di uscita differente;
- La variazione della componente tangenziale della velocità assoluta tra ingresso e uscita dal sistema mobile

Come più volte osservato, si conferma che l'equazione di Eulero per le turbomacchine, in analogia a tutte le altre equazioni di bilancio euleriano fin qui discusse, consente la valutazione delle azioni tra fluido e macchina esclusivamente in base alle variazioni di velocità, del flusso e della macchina, utili all'applicazione della (65). Nessuna indicazione viene data invece sulla forma dei condotti rotorici che realizzino la situazione di scambio di lavoro riassunta da questa equazione. Informazioni aggiuntive sono ottenibili solo attraverso il ricorso alla rappresentazione delle velocità del flusso relativo, attraverso le quali è possibile pervenire a ulteriori formulazioni dell'equazione delle turbomacchine rispetto alla forma primitiva (65).

4.1 Lo studio delle turbomacchine nel riferimento relativo

Al par. 3.3, si è già mostrato come le equazioni di quantità di moto e dell'energia vadano scritte diversamente se le velocità del flusso sono quelle osservate in un sistema di riferimento relativo, quindi solidale con il sistema mobile. Nell'esempio del turbogetto, il sistema relativo è però di tipo inerziale e quindi le forze stimate in tale sistema sono le stesse valutate nel sistema di riferimento assoluto (eq. 58). Nel caso delle turbomacchine, il sistema mobile animato da velocità angolare e quindi le sue velocità di trascinamento (le velocità periferiche u) sono variabili con la posizione radiale, r , e ó a parità di raggio ó variano di direzione lungo una circonferenza. Ne consegue:

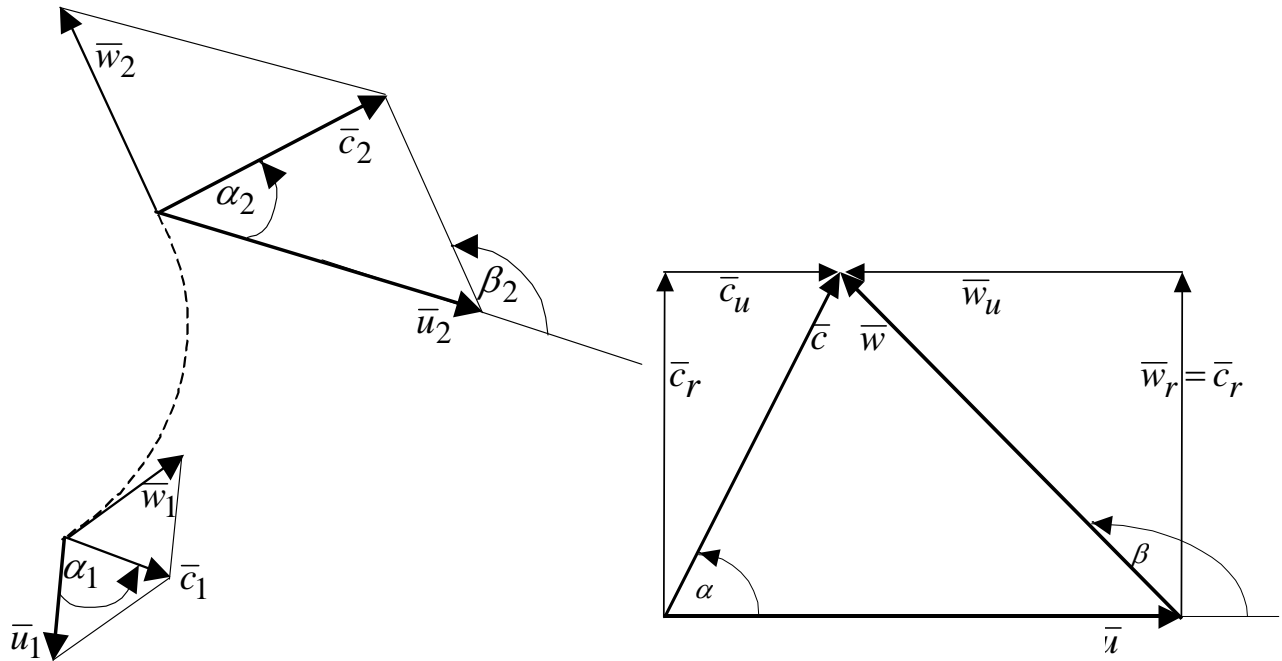
- Il sistema di riferimento non è inerziale, in quanto ad ogni raggio vengono descritte traiettorie curvilinee soggette quindi ad accelerazioni centripete
- Nel passaggio da una posizione radiale ad una diversa, varia la velocità dell'osservatore relativo e lo spostamento richiede un lavoro contro le forze centripete.
- Le traiettorie osservate nel riferimento assoluto sono differenti da quelle nel moto relativo: si ricorda, ad esempio, che una traiettoria assoluta rettilinea risulta affetta da curvatura se osservata rispetto al sistema in rotazione, a causa delle accelerazioni apparenti di Coriolis.

Triangoli di Velocità:

Il disegno dei condotti rotorici di una turbomacchine richiede quindi la conoscenza delle velocità del flusso nel sistema di riferimento relativo. Il condotto rotorico dovrà infatti avere andamento e curvatura tali da garantire le traiettorie desiderate dl fluido rispetto alla macchina in rotazione. Le velocità relative, w , sono legate a quelle assolute, c , dalla nota regola di composizione:

$$\bar{c} = \bar{w} + \bar{u} \Rightarrow \begin{cases} c_x = w_x \\ c_r = w_r \\ c_u = w_u + u \end{cases} \quad (66)$$

Che consente la costruzione dei *triangoli di velocità* in ingresso e in uscita:



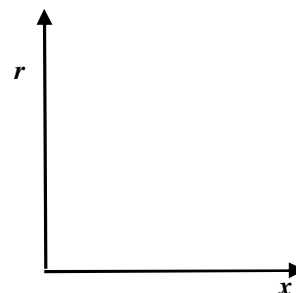
Generalmente, il disegno preliminare della palettatura rotorica procede secondo la sequenza:

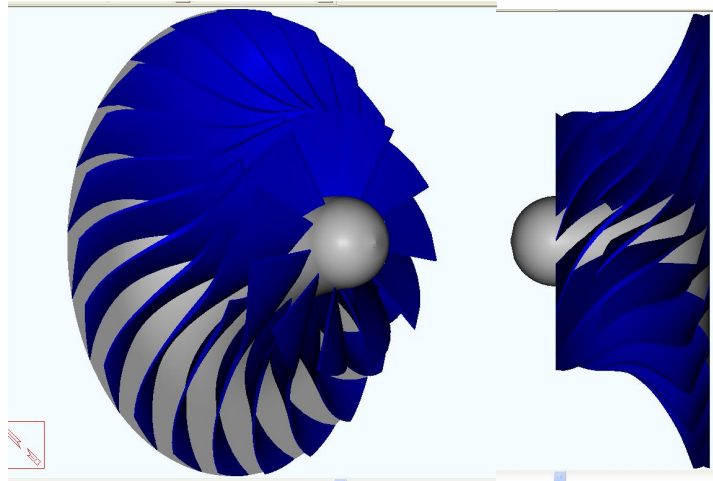
- 1) Le condizioni di flusso nel moto assoluto in ingresso alla macchina (sezione (1)) sono note, in quanto determinate dal calcolo di condotti a monte; nota la velocità periferica al bordo di ingresso, u_1 , è possibile quindi ricavare la velocità relativa, w_1 , e in base alla direzione di tale velocità si determina l'inclinazione del bordo di ingresso della pala.
- 2) L'inclinazione del bordo di uscita (sezione (2)) può essere determinata in modo analogo, partendo dalle condizioni fissate per la velocità assoluta di scarico, c_2 , e quindi, in base alla velocità periferica u_2 , ricavando la velocità relativa w_2 .

Per quanto riguarda le componenti della velocità assoluta e relativa va precisato che:

- Le componenti radiali e assiali sono utili allo smaltimento della portata. Infatti, in una macchina a flusso puramente radiale, come quella nella figura precedente, le normali alle superfici di ingresso e uscita hanno orientamento radiale. In una macchina a flusso misto, illustrata nelle figura successiva, l'orientamento delle due superfici può invece variare da radiale ad assiale o viceversa. In figura è rappresentato un compressore centrifugo con ingresso assiale e scarico radiale: in una qualunque sezione intermedia, la cui normale ha un'inclinazione compresa tra quella assiale e quella radiale, la velocità di smaltimento della portata sarà data dalla componente meridiana:

$$\bar{c}_m = \bar{c}_x + \bar{c}_r \quad \Rightarrow \quad c_m = \sqrt{c_x^2 + c_r^2}$$





- Le componenti tangenziali, c_u e w_u , sono invece responsabili delle azioni esercitate dal flusso nella direzione del moto della macchina e quindi dei trasferimenti di energia meccanica, come confermato dalle equazioni (63 ó 65). Si osservi però che tali componenti sono differenti nei riferimenti assoluto e relativo. Quindi il momento M_o , valutato con la (63) in base alla variazione di flusso di momento di quantità di moto nel riferimento assoluto è differente da quello calcolabile in modo analogo nel riferimento relativo. Utilizzando le relazioni (66) risulta infatti:

$$M_o = \dot{m}(c_{1u}r_1 - c_{2u}r_2) = \dot{m}(w_{1u}r_1 - w_{2u}r_2) + \dot{m}\omega(r_1^2 - r_2^2) \quad (66)$$

Tale situazione è quindi differente da quella vista nel caso del motore al getto, per il quale la spinta dinamica può essere indifferentemente calcolata con la variazione di velocità assolute o relative (eq. 58). Come più volte ricordato, il sistema di riferimento relativo associato al moto del rotore non è inerziale e quindi anche il calcolo delle forze e dei momenti conduce a risultati differenti da quelli del riferimento assoluto.

La differenza nel calcolo del momento rispetto all'asse è rappresentata dal termine $\dot{m}\omega(r_1^2 - r_2^2)$ che si annulla (se si escludono le soluzioni banali $\dot{m} = 0$; $\omega = 0$) solo se risulta $r_1 = r_2 = r$. Tale situazione si verifica in un'importante categoria di turbomacchine, quelle assiali, per le quali si ammette ó in prima approssimazione ó che il flusso si svolga su superfici cilindriche coassiali all'asse di rotazione.

4.2 Un'ulteriore Formulazione dell'Equazione di Eulero

Dai triangoli di velocità illustrati in precedenza, la velocità relativa w è calcolabile una volta noti i moduli della velocità assoluta e periferica, c e u , e l'angolo α compreso tra i vettori orientati:

$$w^2 = c^2 + u^2 - 2uc \cos \alpha$$

Tale relazione consente di trasformare la formulazione primitiva dell'equazione di Eulero (65), in un'altra di particolare interesse. Va innanzitutto osservato che risulta:

$$uc \cos \alpha = uc_u = \frac{c^2}{2} - \frac{w^2}{2} + \frac{u^2}{2}$$

Ed è quindi possibile trasformare i termini rappresentativi dello scambio di lavoro nelle turbomacchine:

$$L = u_1 c_{1u} - u_2 c_{2u} = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \quad (67)$$

Questa formulazione consente di individuare il contributo delle velocità assolute e relative del flusso e di quella periferica del rotore allo scambio di lavoro tra fluido e macchina. Complessivamente, l'entità del lavoro scambiato dipende dalle variazioni di energia cinetica nel moto assoluto, in quello relativo e nel moto della macchina. Ciascuno dei termini della (67) può presentare, naturalmente, segno positivo o negativo e la loro somma darà luogo al valore del lavoro L , nonché al suo segno caratteristico di turbomacchina motrice od operatrice. Nel seguito si illustreranno le situazioni più frequenti per le due tipologie di macchina.

1) Turbomacchina motrice

In base alla (67), il lavoro positivo è dato da:

$$L = \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$$

La situazione più favorevole per il lavoro positivo è data, ovviamente, da un contributo positivo da parte di ciascun termine. Dovrà essere, quindi:

- $c_1 > c_2$. In tal modo, viene sfruttata la diminuzione di energia cinetica nel moto assoluto per la sua conversione in energia meccanica disponibile. Peraltro, si vedrà nel seguito che in una turbina è sempre opportuno minimizzare l'energia cinetica, $c_2^2/2$, allo scarico dal rotore.
- $w_2 > w_1$. Il flusso relativo deve essere invece accelerato dall'ingresso verso l'uscita. Si vedrà nel seguito che l'aumento dell'energia cinetica relativa contribuisce alla realizzazione di una caduta di entalpia termodinamica direttamente nei condotti rotorici.
- $u_1 > u_2$. Infine, il lavoro di macchina motrice è favorito se il flusso procede da una sezione di ingresso collocata a un raggio maggiore a una di uscita caratterizzata da un raggio inferiore ($r_1 > r_2$); ne consegue che la maggior parte delle turbomacchine motrici radiali è a flusso *centripeto*. Anche l'aliquota di variazione dell'energia cinetica associata alla velocità periferica si traduce in una caduta di entalpia del fluido. Tale variazione, può essere interpretata come lavoro delle forze centripete sul flusso:

$$\int_{r_1}^{r_2} r \omega^2 dr = \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$$

Come detto, tale lavoro risulterà positivo nel caso di flusso centripeto.

2) Turbomacchina operatrice

Il lavoro di macchina operatrice è negativo. In base alla (67), il suo valore assoluto è dato da:

$$|L| = \frac{c_2^2 - c_1^2}{2} + \frac{w_1^2 - w_2^2}{2} + \frac{u_2^2 - u_1^2}{2}$$

In questo caso, ai fini di un contributo positivo da parte di ciascun termine, dovrà essere:

- $c_2 > c_1$. Una parte del lavoro trasferito dalla macchina al fluido è quindi convertito in aumento di energia cinetica del fluido
- $w_1 > w_2$. Il flusso relativo deve essere decelerato dall'ingresso verso l'uscita. Si vedrà nel seguito che la diminuzione dell'energia cinetica relativa contribuisce alla realizzazione di un aumento di entalpia termodinamica direttamente nei condotti rotorici.
- $u_2 > u_1$. Infine, il lavoro di macchina motrice è favorito se il flusso procede da una sezione di ingresso collocata a un raggio minore a una di uscita caratterizzata da un raggio maggiore ($r_2 > r_1$); per tale motivo, le turbomacchine operatrici radiali sono a flusso *centrifugo*. Anche l'aliquota di variazione dell'energia cinetica associata alla velocità periferica si traduce in un aumento di entalpia del fluido. Tale variazione, può essere interpretata come lavoro delle forze centripete sul flusso. In questo caso, il verso del moto del fluido è discorde con quello delle forze centripete e quindi la corrispondente aliquota di lavoro è negativa.

4.3 Il confronto tra equazione di Eulero ed equazione dell'energia

Si ricorda che l'equazione di Eulero per le turbomacchine, nelle varie forme fin qui presentate, nasce da un bilancio di quantità di moto o di momento di quantità di moto applicato a un volume di controllo che include il rotore della turbomacchina. L'equazione nasce quindi dalla valutazione diretta delle azioni motrici o resistenti esercitate dal fluido sulla macchina. Per lo stesso volume di controllo può essere formulata l'equazione dell'energia. In accordo alla forma (38) di tale equazione, e ritenendo trascurabili i termini di energia di posizione, si può scrivere:

$$\begin{aligned}
 \text{Equazione dell'energia : } \quad L = H_1 - H_2 + Q &= \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + h_1 - h_2 + Q \\
 \text{Equazione di Eulero : } \quad L &= \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}
 \end{aligned} \tag{68}$$

Dal confronto tra le due equazioni si ottiene:

$$h_1 - h_2 + Q = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \tag{69}$$

Le variazioni di energia cinetica nel moto relativo e in quello del rotore sono quindi correlate a quelle di entalpia e all'eventuale trasferimento di calore. Nel caso più frequente di turbomacchina a flusso adiabatico sarà:

$$h_1 - h_2 = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \quad (70)$$

La variazione positiva o negativa di entalpia deriva, quindi, dalle variazioni di velocità relativa e di velocità periferica, come prima discusso per le macchine motrici ed operatrici.

Pertanto il lavoro scambiato tra fluido e rotore della turbomacchina sarà, in base all'equazione dell'energia, associato in parte a variazione di energia cinetica assoluta e in parte a variazione di energia potenziale (nelle ipotesi fatte, la sola entalpia termodinamica). Quest'ultima variazione è correlabile, attraverso l'equazione (69) o la (70), al campo di moto nel sistema di riferimento del rotore.

La ripartizione tra la quota di energia potenziale e quella di energia cinetica che contribuiscono al lavoro è fornita dalla definizione generale del *grado di reazione del rotore*:

$$\text{Grado di Reazione : } R = \frac{h_1 - h_2}{L} = 1 - \frac{\frac{c_1^2 - c_2^2}{2}}{L} = \frac{\frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}}{\frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2}} \quad (71)$$

La definizione di grado di reazione (71) è applicabile sia alle turbomacchine motrici, sia alle operatrici: infatti nei due casi cambiano i segni del numeratore e del denominatore, ma quello del grado di reazione rimane invariato. Valori particolari del grado di reazione sono:

- $R = 0$. In questo caso risulta ($h_1 - h_2 = 0$). Lo scambio di lavoro è quindi interamente affidato alla variazione dell'energia cinetica assoluta. La conversione tra energia cinetica assoluta e energia potenziale termodinamica avviene interamente nei condotti statorici. Nel caso delle macchine motrici, la *turbina* viene definita *ad azione*.
- $R = 1$. La turbomacchina viene definita *a reazione pura*. E' evidentemente, $h_1 - h_2 = L$ e la conversione tra energia potenziale e energia cinetica si realizza interamente nei condotti rotorici: le energie cinetiche sono quindi quelle associate alle velocità relative e alle periferiche.

Un ulteriore confronto può essere condotto tra l'equazione dell'energia meccanica (39) e l'equazione di Eulero:

$$\begin{aligned} \text{Equazione dell'energia meccanica : } L &= \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \int_2^1 v dp - |L_a| \\ \text{Equazione di Eulero : } L &= \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \end{aligned} \quad (72)$$

In questo caso, è possibile un'interpretazione più diretta del ruolo delle variazioni di energia cinetica nel riferimento della macchina in rotazione:

$$\int_2^1 v dp - |L_a| = \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} + \frac{u_1^2 - u_2^2}{2} \quad (73)$$

Questa relazione evidenzia come le variazioni di energia cinetica osservate nel riferimento rotorico siano direttamente legate alla variazione integrale del potenziale meccanico del fluido, vdp , a meno delle dissipazioni di energia meccanica derivanti dal lavoro di attrito tra fluido e condotti, come discusso in precedenza. Anche questa relazione conduce a una definizione di grado di reazione:

$$R' = \frac{\int_2^1 v dp}{L} \quad (74)$$

In questo caso, viene dato rilievo all'incidenza della variazione di energia meccanica del fluido per compressione o espansione rispetto al lavoro totale. A titolo di esempio:

- In una turbomacchina con ($R\phi = 0$) la compressione o l'espansione del fluido avviene solo nei condotti statici: lo scambio di lavoro si realizza solo attraverso variazioni dell'energia cinetica assoluta
- In una turbomacchina ad elevato valore del grado di reazione $R\phi$, la maggior parte della compressione o dell'espansione del fluido ha luogo direttamente nei condotti rotorici.

È evidente che le definizioni (73) e (74) restituiscono lo stesso risultato numerico ($R = R\phi$) solo nel caso di un processo ideale privo di effetti dissipativi ($L_a = 0$).

4.4 I parametri totali nel moto relativo

In analogia a quanto visto per il moto assoluto, è possibile definire i parametri totali di flusso nel moto relativo; partendo dalla relazione (70) nel flusso adiabatico relativo è possibile osservare la conservazione dell'entalpia totale relativa secondo la relazione:

$$H_{r1} = h_1 + \frac{w_1^2}{2} - \frac{u_1^2}{2} = H_{r2} = h_2 + \frac{w_2^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} \quad (75)$$

La definizione generale di entalpia relativa e il suo legame con quella assoluta sono quindi:

$$\begin{aligned} H &= h + \frac{c^2}{2} && \text{entalpia totale assoluta} \\ H_r &= h + \frac{w^2}{2} - \frac{u^2}{2} = H - u c_u && \text{entalpia totale relativa} \end{aligned} \quad (76)$$

A partire da tale definizione è poi possibile calcolare temperatura e pressione totale relative, in maniera analoga a quanto visto per i parametri totali nel moto assoluto.

4.5 Esempi di stadi e triangoli di velocità di turbomacchina assiale

Nelle turbomacchine assiali si assume, in prima approssimazione, che il flusso appartenga a superfici cilindriche il cui asse coincide con quello di rotazione della macchina. Pertanto le velocità periferiche in ingresso e in uscita da ciascun elemento rotorico sono uguali tra loro ($u_1 = u_2$) ed è quindi possibile riferirsi a un'unica velocità periferica, u . Inoltre, le velocità del flusso nei riferimenti assoluto e relativo saranno caratterizzate dalle sole componenti assiale e tangenziale. Tutte le equazioni fin qui viste vanno quindi modificate in base a queste semplificazioni e, risulta, in particolare:

$$\bar{c} = \bar{w} + \bar{u} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_x = w_x \\ c_u = w_u + u \end{cases} \quad (77)$$

$$\text{Equazione di Eulero :} \quad L = \begin{cases} u(c_{1u} - c_{2u}) = u(w_{1u} - w_{2u}) \\ \frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2} \end{cases} \quad (78)$$

$$\text{Grado di Reazione :} \quad R = \frac{h_1 - h_2}{L} = 1 - \frac{\frac{c_1^2 - c_2^2}{2}}{\frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}} = \frac{\frac{w_2^2 - w_1^2}{2}}{\frac{c_1^2 - c_2^2}{2} + \frac{w_2^2 - w_1^2}{2}} \quad (79)$$

In base alla prima formulazione dell'equazione di Eulero (78), l'entità del lavoro scambiato dipende da due fattori fondamentali:

- La velocità periferica
- La *deviazione* del flusso, rappresentata dalla variazione delle componenti tangenziali, c_u e w_u , tra ingresso e uscita del condotto rotorico. In base alla (77) la variazione osservata nel riferimento assoluto è uguale a quella nel riferimento relativo: $\Delta c_u = \Delta w_u$.

Osservando gli esempi, riportati nel seguito, di palettature e triangoli di velocità di stadi di turbomacchina assiale, è evidente che la deviazione del flusso rotorico avviene in verso contrario a quello della velocità periferica, nel caso di una turbina; nel caso di compressore assiale, la deviazione è invece concorde con la rotazione della macchina e quindi con la velocità periferica. La deviazione è provocata dalla forma e dalla curvatura delle pale; la reazione del flusso sulla palettatura è valutabile attraverso il bilancio di quantità di moto in direzione periferica:

$$F_u = \dot{m}(c_{1u} - c_{2u}) = \dot{m}(w_{1u} - w_{2u}) = \dot{m}\Delta w_u$$

La forza F_u rappresenta quindi la spinta dinamica nella direzione della velocità periferica; è quindi possibile valutare il trasferimento di energia meccanica, ritrovando l'equazione di Eulero nella prima forma (78):

$$P = F_u u = \dot{m} u \Delta w_u$$

$$L = \frac{P}{\dot{m}} = u \Delta w_u$$

Il termine Δw_u è quindi fortemente rappresentativo delle *azioni aerodinamiche* scambiate tra fluido e palettatura. La realizzazione di tali forze richiede un accurato disegno del profilo delle pale e al crescere della loro entità aumentano le sollecitazioni sulle pale. Del resto, anche l'aumento della velocità periferica provoca un incremento di sollecitazioni, associate questa volta alle forze centrifughe cui è soggetta la pala. Ricordando che l'accelerazione centrifuga vale $r\omega^2 = u^2/r$, l'importanza relativa tra le forze aerodinamiche e quelle centrifughe può essere stimata attraverso il *coefficiente di carico*:

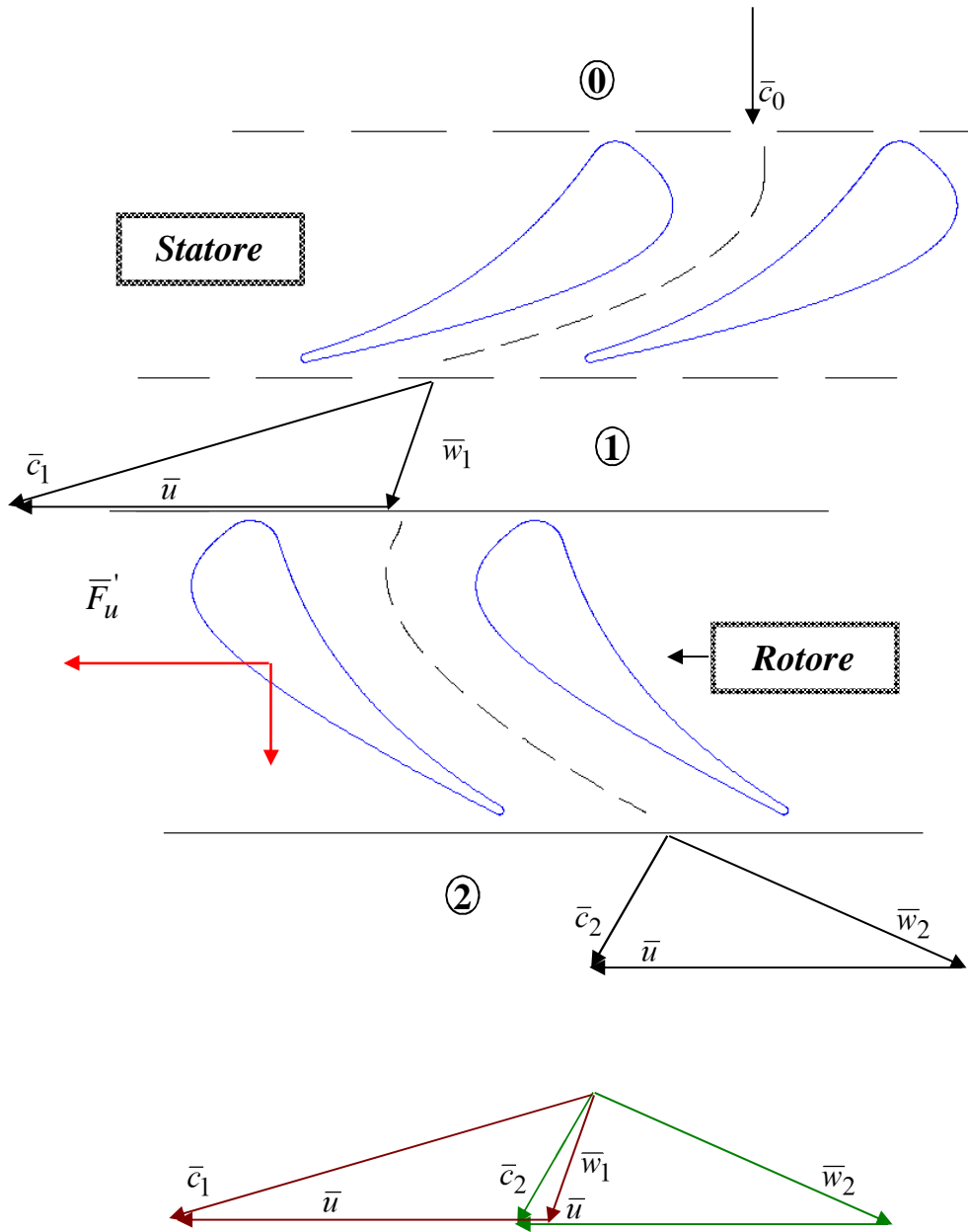
$$\psi = \frac{L}{u^2/2} = \frac{2\Delta w_u}{u}$$

La seconda forma dell'equazione di Eulero (78) evidenzia poi come nella macchina assiale non venga utilizzato il termine $\frac{u_1^2 - u_2^2}{2}$; lo scambio di lavoro risulta quindi ridotto rispetto a turbomacchine a flusso

radiale, a meno di non ricorrere ad accelerazioni (o decelerazioni) nel flusso assoluto e relativo più accentuate. Tale soluzione comporta comunque un aumento del carico aerodinamico ed è più rischiosa nel caso di compressori assiali. Dalla definizione di grado di reazione (79) si osserva, infatti, come una decelerazione nel flusso relativo ($w_1 > w_2$) comporti un aumento di entalpia e quindi (a meno delle perdite per attrito) di pressione del fluido. Tale aumento, sia nei condotti rotorici sia in quelli statorici, deve essere limitato dalla necessità di evitare l'insorgere di fenomeni di separazione dello strato limite; di conseguenza lo stadio di compressore assiale realizza in genere salti di pressione (o rapporti di compressione) decisamente inferiori a quelli ottenibili da un compressore centrifugo.

Anche nello stadio di turbina assiale a gas o a vapore, la caduta di entalpia rotorica (così come quella statorica) va controllata in relazione a possibili accelerazioni eccessive del flusso relativo (o assoluto nello statore) con conseguente realizzazione di flussi transonici: tale situazione è comunque frequente in turbine ad elevate prestazioni ma comporta una progettazione ancora più accurata dei profili delle pale e può presentare maggiori problemi nella regolazione della macchina: Si ricorda infatti che un condotto con scarico supersonico si adatta a variazioni di condizioni estreme attraverso la formazione di onde d'urto.

A) Stadio di Turbina Assiale



B) Stadio di Compressore Assiale

