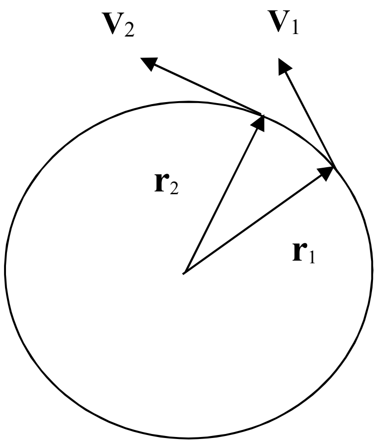
Considerazioni sul moto circolare

Lo studio dei moti circolari, essendo perfettamente definita la traiettoria che il corpo descrive, si presta ad approcci vari.

A) Moto circolare uniforme

1) Approccio classico

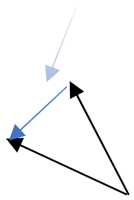
Il vettore velocità, che è sempre tangente alla traiettoria (per qualsiasi moto) ha modulo costante.



$\mathbf{r}_1$ forma l'angolo $\theta_1 = \omega \cdot t$ con la direzione orizzontale assunta come origine degli angoli;
$\mathbf{r}_2$ forma l'angolo $\theta_2 = \omega \cdot (t + \Delta t)$ con la direzione orizzontale; l'angolo formato da $\mathbf{r}_2$ rispetto a $\mathbf{r}_1$ vale $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1 = \omega \cdot \Delta t$.
L'accelerazione media $\boldsymbol{a}_m$ è definita dal rapporto:

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{\Delta t}$$

La accelerazione istantanea è ottenuta calcolando il limite $\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t}$. Il suo modulo, $a(t)$, può essere calcolato considerando che ΔV è la base del triangolo isoscele con lati $V_2 = V_1 = V$ e angolo al vertice uguale a $\omega \cdot \Delta t$:



Essendo perciò: $\frac{1}{2}\Delta V = V \cdot sen(\frac{\omega \cdot \Delta t}{2})$, si trova con facilità:

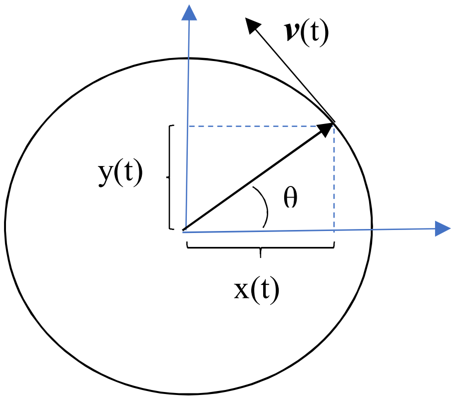
$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} 2V\frac{\omega}{2} \cdot \frac{sen\left(\frac{\omega \Delta t}{2}\right)}{\frac{\omega \Delta t}{2}} = V\omega = \omega^2 r\,,$$

avendo utilizzato la relazione $V = \omega r$, che lega velocità e velocità angolare.

Naturalmente non è dimostrato rigorosamente che $\vec{a}(t)$ sia perpendicolare alla velocità e diretta verso il centro (accelerazione centripeta), anche se ciò si può intuire graficamente.

2) Approccio basato sulla conoscenza delle leggi orarie

Nel moto circolare uniforme è $\theta = \omega t$, essendo ω la velocità angolare costante.



Le leggi orarie x(t) e y(t) sono (vedi figura):

$$\begin{cases} x(t) = r \cdot cos(\omega t) \\ y(t) = r \cdot sen(\omega t) \end{cases}$$

Vettorialmente:

$$\vec{r}(t) = r \cdot [cos(\omega t)\vec{\imath} + se\ \ (\omega t)\vec{\jmath}\,] = r \cdot \hat{r}(t),$$

dove $\hat{r}(t)$ è il versore del vettore posizione $\vec{r}$(t).

Il vettore velocità $\vec{v}(t)$ si ottiene derivando rispetto al tempo il vettore posizione:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \omega\ \ \cdot [-sen(\omega t)\vec{\imath} + co\ \ (\omega t)\vec{\jmath}\,] = \omega r \cdot \hat{\tau}(t),$$

dove $\hat{\tau}(t)$ è il versore tangente alla traiettoria (cioè il versore del vettore velocità).

Notare che $\hat{\tau}(t)$ è perpendicolare a $\vec{r}$(t), come si può verificare dal loro prodotto scalare:

$$\vec{r}(\mathrm{t}) \cdot \hat{\tau}(t).$$

Il vettore accelerazione $\vec{a}(t)$ si ottiene derivando rispetto al tempo il vettore velocità:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \omega^2 r \cdot [-cos(\omega t)\vec{\imath} - se\ \ (\omega t)\vec{\jmath}\,] = -\omega^2 r \cdot \hat{r}(t).$$

Si deduce che il vettore accelerazione è orientato nel verso opposto a quello del vettore posizione e quindi verso il centro della circonferenza: questa circostanza giustifica il nome di **accelerazione centripeta**, indicata anche con il simbolo $\vec{a}_c(t)$.

B) Moto circolare non uniforme

Il moto circolare sia non uniforme, ma sia nota la dipendenza dal tempo di θ, angolo che il vettore posizione $\vec{r}$(t) forma con l'asse x: $\theta(t) = f(t)$, essendo di conseguenza $\omega(t) = \frac{d\theta}{dt} = f'(t)$.

In questo caso si ha:

$$\begin{cases} x(t) = r \cdot \cos[f(t)] \\ y(t) = r \cdot sen[f(t)] \end{cases},$$

da cui:

$$\vec{r}(t) = r \cdot \{ \cos[f(t)]\,\vec{\imath} + sen[f(t)]\vec{\jmath}\,\} = r\,\hat{r}(t).$$

Derivando rispetto al tempo, si ottiene la velocità istantanea:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = rf'(t) \cdot \{-sen[f(t)]\vec{\imath} + \cos[f(t)]\,\vec{\jmath}\,\} = rf'(t)\hat{\tau}(t),$$

con ovvie definizioni del versore radiale $\hat{r}(t)$ e del versore tangente alla traiettoria $\hat{\tau}(t)$, fra loro perpendicolari, come si può verificare dall'annullarsi del prodotto scalare $\hat{\tau}(t) \cdot \hat{r}(t)$.

Derivando rispetto al tempo la velocità istantanea, si riconosce facilmente che l'accelerazione istantanea $\vec{a}(t)$ risulta essere la somma di una parte radiale, l'accelerazione centripeta $\vec{a}_c(t)$, e di una parte tangente alla traiettoria, l'accelerazione tangenziale $\vec{a}_\tau(t)$.

Più in dettaglio:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[rf'(t)\hat{\tau}(t)] = r\left\{f''(t)\hat{\tau}(t) + f'(t)\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right\};$$

avendosi inoltre:

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d}{dt}\{-sen[f(t)]\vec{\imath} + \cos[f(t)]\,\vec{\jmath}\,\} = f'(t)\{-cos[f(t)]\vec{\imath} - \mathrm{sen}[f(t)]\,\vec{\jmath}\,\},$$

risulta che: $\vec{a}_\tau(t) = rf''(t)\,\hat{\tau}(t)$, mentre $\vec{a}_c(t) = r[f'(t)]^2[-\hat{r}(t)]$.

Se il moto è circolare uniforme dalle relazioni precedenti si ricava: $f''(t) = 0$, il che comporta $\vec{a}_\tau(t) = 0$, e $f'(t) = \omega$, da cui segue $\vec{a}_c(t) = r\omega^2[-\hat{r}(t)]$.

Se il moto avviene con accelerazione angolare costante α, poiché è $f(t) = \frac{1}{2}\alpha t^2$,

(oppure, con maggiore generalità, potrebbe essere $f(t) = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$), si ricavano le relazioni seguenti, essendo $f'(t) = \alpha t$ ed $f''(t) = \alpha$:

$$\vec{a}_\tau(t) = r\alpha\,\hat{\tau}(t)$$

$$\vec{a}_c(t) = r[\alpha t]^2[-\hat{r}(t)].$$

Il modulo dell'accelerazione $\vec{a}(t)$ vale $a = \sqrt{(r\alpha)^2 + (r[\alpha t]^2)^2} = r\alpha\sqrt{1 + \alpha^2 t^4}$.

Nel caso di moto qualunque di un corpo su traiettoria **non circolare**, pur non conoscendo le leggi orarie x(t) e y(t), essendo sempre vero che $\vec{v} = v\,\hat{v}$, si può riconoscere che in tutta generalità si ha:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[v\,\hat{v}(t)] = \frac{dv}{dt}\,\hat{v}(t) + v\,\frac{d\hat{v}}{dt} = \cdots = \frac{dv}{dt}\,\hat{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\,\hat{n}\,,$$

dove $\hat{n}$ è il versore normale alla superficie e ρ è il raggio di curvatura della superficie nel punto P in cui il corpo transita nell'istante considerato (raggio del *cerchio osculatore* in P).