Prova di metà corso Fisica Generale I – Prof. L. Marrucci – 28/04/2017

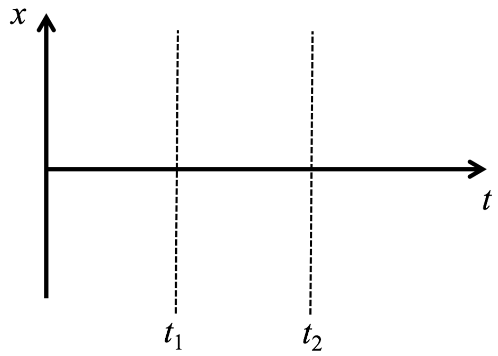
<u>Istruzioni</u>: *Questi fogli, oltre a contenere le domande, contengono lo spazio per riportare le risposte finali e la copia "in bella" del vostro svolgimento. Quindi* ***tutte le risposte, insieme ai passaggi principali della loro derivazione, vanno riportate in modo ordinato negli spazi vuoti di questi fogli****. I passaggi e le risposte riportati in altri fogli non verranno presi in considerazione. Il tempo a disposizione è di 2 ore; non è consentito l'uso di libri o appunti e il cellulare deve essere rigorosamente spento (pena l'annullamento della prova); è consentito l'uso della calcolatrice.*

<u>Nota sul punteggio</u>: *Il punteggio prevede 8 punti assegnati in automatico, un totale di 11 punti per domande di livello base, 8 punti per domande di livello medio e 3 punti per domande di livello avanzato.*

NOME e COGNOME:

MATRICOLA:

1) Tracciare nel grafico riportato a fianco la curva della legge oraria di un moto unidimensionale che parte da $x = 0$ per $t = 0$, è rettilineo uniforme con velocità positiva dal tempo 0 fino al tempo t_1 e poi risulta uniformemente decelerato fino a invertire completamente il verso della velocità al tempo t_2 per poi continuare di moto rettilineo uniforme. [*livello base; punti 2*]



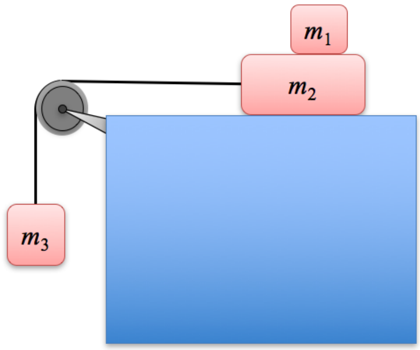
2) Riportare l'enunciato completo del secondo principio della dinamica o di Newton (nella sua forma con le forze o senza, come preferite voi) [*livello base; punti 2*]

3) Enunciare la legge di conservazione dell'energia meccanica, valida in assenza di forze dissipative, specificando la definizione matematica completa dei termini che vi compaiono [*livello medio; punti 2*]

4) Scrivere l'espressione <u>vettoriale</u> della legge di forza che caratterizza la forza viscosa su un corpo che si muove a bassa velocità in acqua (nota: non è necessario dettagliare la costante caratteristica) [*livello base; punti 2*]

5) Una molecola oscilla di moto armonico con un periodo di 6.28×10^{-8} s e un'ampiezza dell'oscillazione pari a 12 nm. Calcolare la massima accelerazione della molecola durante l'oscillazione. [*livello base; punti 2*]

6) Nel sistema di tre blocchi rappresentato in figura, il blocco 2 è collegato mediante un filo inestensibile di massa trascurabile al blocco 3 tramite una carrucola ideale, anch'essa di massa trascurabile. I blocchi hanno le seguenti masse: m_1 = 1.0 kg, m_2 = 4.0 kg e m_3 = 2.0 kg. Tra il blocco 2 e il suo piano di appoggio non c'è attrito, mentre c'è attrito tra il blocco 1 e il blocco 2. Assumendo in particolare che l'attrito statico sia sufficiente a impedire al blocco 1 di scivolare sul blocco 2, calcolare la tensione T del filo. [*livello base; punti 3*]



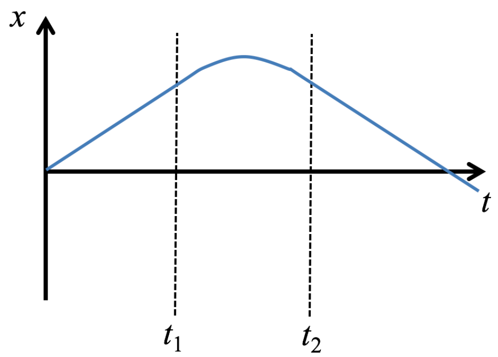
7) Continuazione del problema precedente. Il blocco 2 viene ora sostituito con uno più leggero. Assumendo che il coefficiente d'attrito statico tra i blocchi 1 e 2 sia μ_s = 0.4, quant'è il minimo valore della massa m_2 sotto il quale il blocco 1 inizia a slittare sul blocco 2? [*livello medio; punti 3*]

8) Continuazione del problema precedente. Ponendo ora m_2 = 1.0 kg e sapendo che il modulo dell'accelerazione del blocco 2 risulta pari a 5.5 m/s^2, quanto vale il coefficiente d'attrito dinamico μ_d tra i blocchi 1 e 2? [*livello medio; punti 3*]

9) Le curve “paraboliche” sono curve utilizzate negli autodromi nelle quali la strada è inclinata lateralmente in modo da consentire la percorrenza della curva a maggiore velocità senza che l’auto perda aderenza. Supponendo che una data curva in versione orizzontale, non inclinata, consenta una velocità massima di 250 km/h quando il coefficiente d’attrito statico tra i pneumatici e la strada è $\mu_s = 0.8$, calcolare di quanto è necessario inclinare la strada nella curva per consentire la stessa velocità massima per un coefficiente d’attrito dimezzato pari a $\mu_s = 0.4$. [*livello avanzato; punti = 3*]

SOLUZIONI

1) Tracciare nel grafico riportato a fianco la curva della legge oraria di un moto unidimensionale che parte da $x = 0$ per $t = 0$, è rettilineo uniforme con velocità positiva dal tempo 0 fino al tempo t_1 e poi risulta uniformemente decelerato fino a invertire completamente il verso della velocità al tempo t_2 per poi continuare di moto rettilineo uniforme. [*livello base; punti 2*]



2) Riportare l'enunciato completo del secondo principio della dinamica o di Newton (nella sua forma con le forze o senza, come preferite voi) [*livello base; punti 2*]

Formulazione con le forze. Dato un corpo 1 interagente con altri corpi 2, 3, …, la sua accelerazione è determinata da $\vec{a}_1 = \frac{1}{m_1}\vec{F}_{1,tot}$ (legge fondamentale della dinamica) dove m_1 è la massa del corpo 1 e $\vec{F}_{1,tot}$ è la forza totale sul corpo 1, a sua volta fissata da una funzione (legge di forza) della posizione, velocità e altre proprietà dei corpi interagenti. Inoltre, si ha $\vec{F}_{1,tot} = \vec{F}_{1,2} + \vec{F}_{1,3} + \vec{F}_{1,4} + \cdots$ dove $\vec{F}_{1,i}$ è la forza che agirebbe sul corpo 1 se questo fosse in presenza del solo corpo i (principio di sovrapposizione).

3) Enunciare la legge di conservazione dell'energia meccanica, valida in assenza di forze dissipative, specificando la definizione matematica completa dei termini che vi compaiono [*livello medio; punti 2*]

L'enunciato è il seguente: $E_{mec} = E_K + U(\vec{r}) = cost.$ dove i termini che vi appaiono sono definiti come segue:

Energia cinetica: $E_k = ½\, mv^2$

Energia potenziale: $U(\vec{r}) = L_{\vec{r}\to O}$ dove O è un punto di riferimento fisso e L è il lavoro totale delle forze.

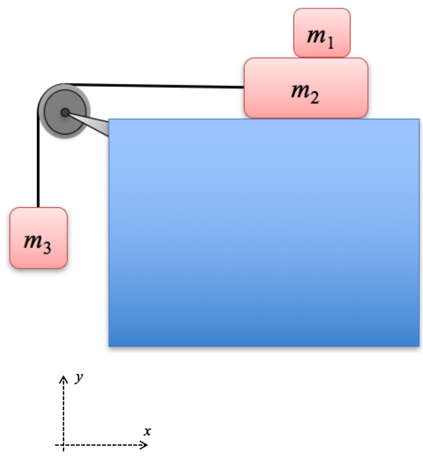
4) Scrivere l'espressione vettoriale della legge di forza che caratterizza la forza viscosa su un corpo che si muove a bassa velocità in un fluido (nota: non è necessario dettagliare la costante caratteristica) [*livello base; punti 2*]

$$\vec{F} = -b\vec{v}$$

5) Una molecola oscilla di moto armonico con un periodo di 6.28×10^{-8} s e un'ampiezza dell'oscillazione pari a 12 nm. Calcolare la massima accelerazione della molecola durante l'oscillazione. [*livello base; punti 2*]

$a_{max} = \omega^2 A = (2\pi/T)^2 A = (1 \times 10^8)^2 \times 12 \times 10^{-9} = 1.2 \times 10^8$ m/s^2

6) Nel sistema di tre blocchi rappresentato in figura, il blocco 2 è collegato mediante un filo inestensibile di massa trascurabile al blocco 3 tramite una carrucola ideale, anch'essa di massa trascurabile. I blocchi hanno le seguenti masse: m_1 = 1.0 kg, m_2 = 4.0 kg e m_3 = 2.0 kg. Tra il blocco 2 e il suo piano di appoggio non c'è attrito, mentre c'è attrito tra il blocco 1 e il blocco 2. Assumendo in particolare che l'attrito statico sia sufficiente a impedire al blocco 1 di scivolare sul blocco 2, calcolare la tensione T del filo. [*livello base; punti 3*]



Le eq. fondamentali per i 3 corpi sono le seguenti (già per componenti, con assi x e y orizzontale e verticale per tutti i corpi):

$$T - m_3 g = m_3 a_{3y}$$
$$-T - A_x = m_2 a_{2x} \quad , \quad N_2 - N_1 - m_2 g = m_2 a_{2y} = 0$$
$$A_x = m_1 a_{1x} \quad , \quad N_3 - m_1 g = m_1 a_{1y} = 0$$

dove abbiamo usato il fatto che il modulo della tensione ai capi del filo è lo stesso e abbiamo chiamato A_x la forza d'attrito sul corpo 1, per cui quella sul corpo 2 è $-A_x$. La condizione vincolare sulla lunghezza del filo impone $a_{2x} = a_{3y}$ mentre la condizione di non slittamento del corpo 1 sul corpo 2 porta alla condizione $a_{1x} = a_{2x}$ (perché 1 e 2 si muovono insieme). Combinando queste relazioni si ottiene l'accelerazione del corpo 2: $a_{2x} = -\frac{m_3 g}{m_1+m_2+m_3}$

e quindi la tensione del filo: $T = -(m_1 + m_2)a_{2x} = \frac{m_3(m_1+m_2)g}{m_1+m_2+m_3} = 14.0$ N

7) Continuazione del problema precedente. Il blocco 2 viene ora sostituito con uno più leggero. Assumendo che il coefficiente d'attrito statico tra i blocchi 1 e 2 sia μ_s = 0.4, quant'è il minimo valore della massa m_2 sotto il quale il blocco 1 inizia a slittare sul blocco 2? [*livello medio; punti 3*]

Usando le relazioni algebriche trovate nella domanda precedente, la forza d'attrito statico tra i corpi 1 e 2 (agente sul corpo 1) è data da $A_x = m_1 a_{1x} = m_1 a_{2x} = -\frac{m_3 m_1 g}{m_1+m_2+m_3}$, mentre la forza normale tra i corpi 1 e 2 è $N_1 = m_1 g$ (in modulo).

Il punto di "rottura" per la forza d'attrito statico è $|A_x| = \mu_s N_1$, da cui, sostituendo e risolvendo per m_2, otteniamo

$m_2 = \left(\frac{1-\mu_s}{\mu_s}\right) m_3 - m_1 = 2.0$ kg che rappresenta il valore minimo della massa perché inizi lo slittamento

8) Continuazione del problema precedente. Ponendo ora m_2 = 1.0 kg e sapendo che il modulo dell'accelerazione del blocco 2 risulta pari a 5.5 m/s^2, quanto vale il coefficiente d'attrito dinamico μ_d tra i blocchi 1 e 2? [*livello medio; punti 3*]

Le equazioni fondamentali sono le stesse del punto (6), ma non vale più la relazione $a_{1x} = a_{2x}$ perché i corpi 1 e 2 adesso slittano tra loro. Al posto del vincolo di non slittamento, adesso vale la legge di forza dell'attrito dinamico, che è la seguente:

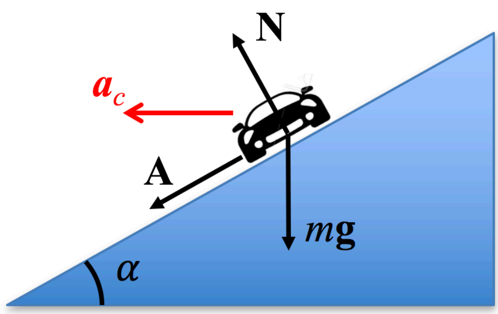
$A_x = -\mu_d N_1$ (dove A_x è la forza che agisce sul corpo 1, quella sul corpo 2 è $-A_x$)

Risolvendo le equazioni si ottiene $a_{2x} = -\frac{m_3 - \mu_d m_1}{m_2+m_3} g$ da cui, risolvendo per μ_d si ottiene

$$\mu_d = \frac{m_3}{m_1} + \frac{m_2+m_3}{m_1}\left(\frac{a_{2x}}{g}\right) = \frac{m_3}{m_1} - \frac{m_2+m_3}{m_1}\left(\frac{a_2}{g}\right) = 0.32$$

Le curve "paraboliche" sono curve utilizzate negli autodromi nelle quali la strada è inclinata lateralmente in modo da consentire la percorrenza della curva a maggiore velocità senza che l'auto perda aderenza. Supponendo che una data curva in versione orizzontale, non inclinata, consenta una velocità massima di 250 km/h quando il coefficiente d'attrito statico tra i pneumatici e la strada è $\mu_s = 0.8$, calcolare di quanto è necessario inclinare la strada nella curva per consentire la stessa velocità massima per un coefficiente d'attrito dimezzato pari a $\mu_s = 0.4$. [*livello avanzato; punti = 3*]

Uno schema delle forze in azione durante la curva è riportato nel disegno a fianco (le forze sono in nero).
La combinazione di queste forze deve generare l'accelerazione centripeta $\boldsymbol{a}_c$ indicata nel disegno in rosso (che è orientata verso il centro dell'arco di cerchio descritto dall'auto in curva). Se la curva è percorsa a velocità scalare costante non vi è accelerazione tangenziale.



Considerando la legge fondamentale della dinamica (2° principio) parallelamente al piano (asse x) e perpendicolarmente ad esso (asse y) otteniamo le seguenti relazioni:

$$A + mg\ \sin\alpha = ma_c \cos\alpha = m\frac{v^2}{R}\cos\alpha$$

$$N - mg\cos\alpha = ma_c\sin\alpha = m\frac{v^2}{R}\sin\alpha$$

dove abbiamo indicato con R il raggio di curvatura della curva. La massima velocità in curva si raggiunge quando l'attrito raggiunge il massimo, ossia $A = \mu_s N$. Risolvendo le equazioni si ottiene:

$$v_{max} = \sqrt{Rg\left(\frac{\mu_s\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu_s\sin\alpha}\right)}$$

Per $\alpha = 0$ (strada orizzontale) da questa espressione si trova $v_{max,0} = \sqrt{Rg\mu_s}$. Ora chiamiamo il coefficiente d'attrito ridotto $\mu_s' = \mu_s/2$. Poniamo quindi la condizione che la velocità massima nelle due condizioni (strada orizzontale e attrito maggiore e strada inclinata e attrito minore) sia la stessa:

$$v_{max,0,\mu_s} = v_{max,\alpha,\mu_s'}$$

Sostituendo le formule trovate prima per la velocità massima otteniamo

$$\sqrt{Rg\mu_s} = \sqrt{Rg\left(\frac{\mu_s'\cos\alpha + \sin\alpha}{\cos\alpha - \mu_s'\sin\alpha}\right)}$$

Dividendo numeratore e denominatore del termine dentro la radice a destra per cosα si ottiene un'equazione per la tanα, la cui soluzione ci fornisce la risposta:

$$\alpha = \tan^{-1}\frac{\mu_s - \mu_s'}{1 + \mu_s\mu_s'} = 17°$$