grafo 3.5 [equazioni (3.91) ÷ (3.98)] nel caso delle oscillazioni forzate. Si vede che il campo di frequenze per le onde sinusoidali è lo stesso sia nel caso delle onde progressive sia in quello delle onde stazionarie; esso si estende da ω_{min} a ω_{max}, dove:

$$\omega^2_{min} = \frac{g}{l} \equiv \omega_0^2\,, \qquad \omega^2_{max} = \frac{g}{l} + \frac{4K}{M}\,. \tag{17}$$

Onde esponenziali in un sistema aperto. Per frequenze eccitatrici inferiori al taglio delle basse frequenze, ω_0, si può congetturare che la legge di dispersione per un sistema aperto forzato sarà anche in questo caso uguale a quella per un sistema chiuso. La congettura si rivela corretta. Perciò, nel caso di un sistema aperto di pendoli accoppiati, che si estende da $z=0$ a $z=+\infty$ e viene eccitato in $z=0$ alla frequenza $\omega < \omega_0$, si ha:

$$\psi(z, t) = Ae^{-\kappa z} \cos \omega t, \qquad z = na, \tag{18}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \frac{4K}{M} \sinh^2 \frac{1}{2} \kappa a\,. \tag{19}$$

Onde esponenziali a zigzag. In maniera analoga, per una frequenza di eccitazione inferiore alla frequenza di taglio superiore, si ottengono le *onde esponenziali a zigzag*:

$$\psi(z, t) = A(-1)^n e^{-\kappa z} \cos \omega t, \qquad z = na, \tag{20}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + \frac{4K}{M} \cosh^2 \frac{1}{2} \kappa a\,. \tag{21}$$

Perciò, un'onda esponenziale in un sistema aperto eccitato differisce da quella del caso generale del sistema chiuso eccitato soltanto per il fatto che si deve scartare la soluzione $e^{+\kappa z}$ che va all'infinito in $z=+\infty$. Si osservi che in un'onda esponenziale tutte le parti mobili oscillano con la stessa costante di fase [si vedano le equazioni (18) e (20)]; perciò, non esiste più una grandezza come la velocità di fase, perché non c'è una forma d'onda che si propaghi senza cambiamento di forma, e neppure una forma d'onda che si propaghi con cambiamento di forma ma con creste e gole d'onda riconoscibili.
È stato così dimostrato, con l'esempio dei pendoli accoppiati, che per un dato mezzo la legge di dispersione, che correla ω e k, è la stessa sia nel caso delle onde progressive sia in quello delle onde stazionarie dovute alle oscillazioni libere o alle oscillazioni forzate stazionarie di un sistema chiuso.

Onde sinusoidali dispersive e non-dispersive. Quando la legge di dispersione ha la semplice forma:

$$v(k) = \frac{\omega\,(k)}{k} = \text{costante, indipendente da } k \tag{22}$$

le onde sono dette *non-dispersive*; altrimenti, sono dette *dispersive*. (L'uso del simbolo k implica in entrambi i casi che le onde sono sinusoidali). Un'onda dispersiva data da una sovrapposizione di onde progressive con differenti numeri d'onde cambia la propria forma man mano che la sovrapposizione progredisce nello spazio, perché le componenti di differente lunghezza d'onda viaggiano con velocità differenti; perciò, le componenti della sovrapposizione che hanno frequenza diversa «si disperdono». *Le onde dispersive sono onde sinusoidali per cui la velocità di fase* $v_\varphi = \omega/k$ *varia con la lunghezza d'onda.*

Onde esponenziali reattive. Quando la frequenza di eccitazione ω non giace nella «banda passante» compresa fra la frequenza di taglio delle basse frequenze (che, in alcuni esempi, può essere zero) e la frequenza di taglio delle alte frequenze (che, in alcuni esempi, può essere infinita), allora, come si è visto, le onde sono esponenziali (non sinusoidali) nella loro dipendenza spaziale. L'onda esponenziale di questo tipo è detta talvolta «reattiva», mentre un'onda sinusoidale è detta «dispersiva». Si parla talvolta di «mezzo dispersivo» o di «mezzo reattivo»; naturalmente, lo stesso mezzo può essere dispersivo in un campo di frequenze (la banda passante) e reattivo in un altro campo (all'esterno della banda passante).
Negli esempi seguenti vengono esaminate le velocità di fase delle onde dispersive.

ESEMPIO 1 - ONDE TRASVERSALI SU UNA CORDA MUNITA DI PERLINE.

La relazione di dispersione per le onde trasversali su una corda munita di perline, con tensione d'equilibrio T_0, con massa delle perline M, e con distanza fra le perline a è (si veda l'equazione (2.70) del paragrafo 2.4):

$$\omega^2 = \frac{4T_0}{Ma} \sin^2 \frac{1}{2} ka, \qquad 0 \leqq k \leqq \frac{\pi}{a}\,. \tag{23}$$

Perciò, la velocità di fase per le onde progressive trasversali è data da:

$$v_\varphi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{4T_0}{Ma} \frac{\sin^2 \frac{1}{2}ka}{k^2}\,, \tag{24}$$

per $0 \leqq ka \leqq \pi$. Per frequenze superiori a quella di taglio delle alte frequenze, che è $\omega_0 = \sqrt{4T_0/Ma}$, le onde sono onde esponenziali a

(*) Una dimostrazione sperimentale molto elegante di questa relazione di dispersione [equazione (23)] è data da J. M. Fowler, J. T. Brooks, e E. D. Lambe, «One-dimensional Wave Demonstration» (Dimostrazione delle onde unidimensionali), *Am. J. Phys.* **35**, 1065 (1967).

zigzag, e non esiste una grandezza quale la velocità di fase. Per frequenze comprese fra zero e ω_0, le onde sono dispersive, poiché la velocità di fase non è una costante ma dipende da k. Nel limite delle grandi lunghezze d'onda (o della piccola distanza fra le perline), in cui si ha $a/\lambda \ll 1$, la velocità di fase diventa sostanzialmente indipendente dalla lunghezza d'onda, e quindi le onde diventano non-dispersive, come si può vedere sviluppando sin $(1/2)\,ka$ in serie di Taylor:

$$
\begin{aligned}
v_\varphi &= \sqrt{\frac{T_0 a}{M}}\,\frac{\sin\left(\frac{1}{2}ka\right)}{\left(\frac{1}{2}ka\right)} \\
&= \sqrt{\frac{T_0 a}{M}}\,\frac{\left(\frac{1}{2}ka\right) - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2}ka\right)^3 + \cdots}{\left(\frac{1}{2}ka\right)} \qquad (25)\\
&= \sqrt{\frac{T_0 a}{M}}\left[1 - \frac{1}{24}(ka)^2 + \cdots\right].
\end{aligned}
$$

Quindi, definendo ρ_0 come la massa media per lunghezza unitaria in condizioni di equilibrio, cioè, ponendo $\rho_0 \equiv M/a$, si ha, per la *corda continua*:

$$
v_\varphi = \sqrt{\frac{T_0}{\rho_0}}. \qquad (26)
$$

Perciò, la velocità di fase per le onde progressive trasversali su una corda continua è costante, e indipendente dalla frequenza. L'equazione (26) coincide con il risultato per ω/k ottenuto nel capitolo 2 per la legge di dispersione delle onde stazionarie sulla corda continua [eq. (2.22), par. 2.2].

ESEMPIO 2 - ONDE LONGITUDINALI SU UNA MOLLA MUNITA DI PERLINE.

La legge di dispersione si può ottenere da quella per le onde trasversali sostituendo semplicemente la tensione T_0 con la costante elastica moltiplicata per K volte la distanza a fra le perline [si veda l'equazione (2.78) del paragrafo 2.4]. Nel limite del continuo, si ottiene [sostituendo Ka a T_0 nell'equazione (26)]:

$$
v_\varphi = \sqrt{\frac{Ka}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{K_L L}{\rho_0}}, \qquad (27)
$$

dove si è posto $Ka = K_L L$ per ricordare che, se si collegano delle molle in serie per formare una lunga molla di lunghezza totale L, la costante elastica totale K_L è semplicemente a/L volte la costante elastica K di un singolo segmento di molla di lunghezza a. Secondo l'equazione (27), le onde longitudinali su una molla continua sono non-dispersive. In figura 4.2 è schematizzato un «pacchetto d'onde» progressivo, costituito da una «compressione» e da una «rarefazione», viaggianti lungo una molla.

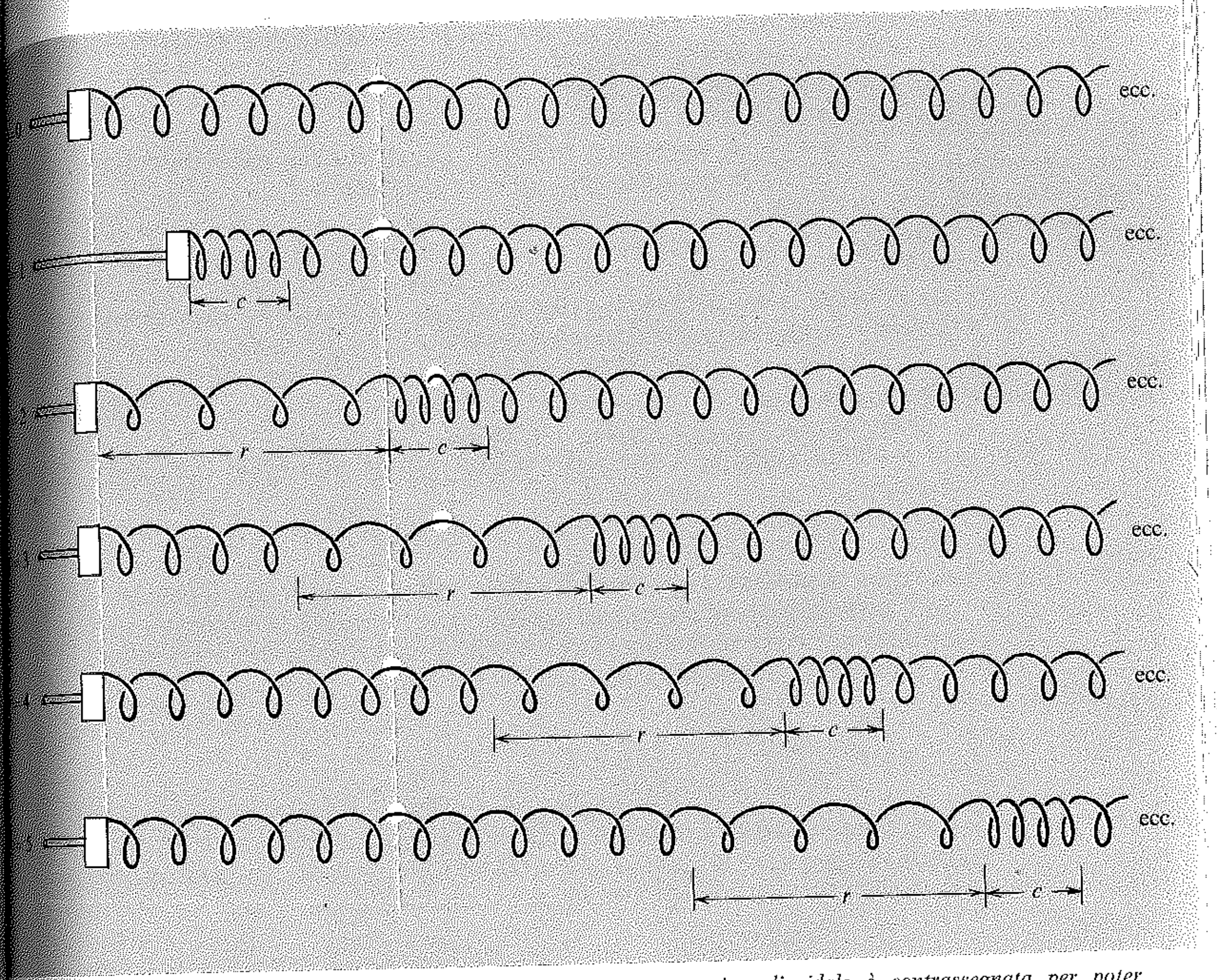

FIGURA 4.2 *Onda progressiva longitudinale, costituita da una singola compressione c e da una singola rarefazione r, che si propaga su una molla. La sesta spira elicoidale è contrassegnata per poter seguire il moto della spira.*

Velocità di fase del suono - modello di Newton. Newton fu il primo a dedurre un'espressione che predicesse la velocità delle onde sonore nell'aria. La formula di Newton fornisce la risposta sbagliata: predice una velocità di circa 280 m/s, mentre la velocità osservata è 332 m/s [in CN (condizioni normali), cioè, alla pressione di 1 atmosfera e alla temperatura di 0 °C]. La deduzione di tale formula è molto semplice, e la ragione per cui fornisce la risposta sbagliata è piuttosto interessante. Ecco la sua deduzione.

Se l'aria è confinata in un contenitore chiuso, esercita sulle pareti del contenitore una pressione diretta verso l'esterno, e agisce quindi come una molla *compressa* tendente ad allungarsi. Si supponga che il contenitore sia un lungo cilindro con un'estremità chiusa da una parete e l'altra chiusa da un pistone mobile di massa trascurabile: allora l'aria

è come una molla compressa che si estende lungo il cilindro e cerca di spingere il pistone fuori del cilindro con una forza di modulo F. All'equilibrio, una forza esterna di modulo F agente sul pistone equilibra la forza dovuta all'aria.
Per una molla di lunghezza a riposo L_1, di lunghezza compressa L (con $L < L_1$) e di costante elastica K_L, F è dato da:

$$F = K_L(L_1 - L)\,.$$

Se si varia la lunghezza L della molla, si ottiene la variazione in F differenziando la precedente espressione:

$$dF = -K_L\,dL\,. \tag{28}$$

In maniera analoga, l'aria esercita sul pistone una forza data da:

$$F = pA\,,$$

dove p è la pressione ed A è l'area della sezione trasversale del cilindro. Se il pistone è spostato di una piccola quantità dalla sua posizione di equilibrio, cosicché la lunghezza L del cilindro varia di (ad esempio) dL, allora il volume varia di $A\,dL = dV$. Perciò, F varia di:

$$dF = A\,dp = A\left(\frac{dp}{dV}\right)_0 A\,dL\,, \tag{29}$$

dove il pedice zero significa che dp/dV è calcolata nel volume di equilibrio. Confrontando le equazioni (28) e (29), si vede che la «costante elastica equivalente» dell'aria in un tubo è data da:

$$K_L = -A^2\left(\frac{dp}{dV}\right)\,. \tag{30}$$

Si supponga di avere una molla compressa di costante elastica K_L, tenuta in posizione di equilibrio con lunghezza L_0, e densità lineare ρ_0 (lineare). Allora la velocità di fase per le onde longitudinali è data da [si veda l'equazione (27)]:

$$v^2 = \frac{K_L L_0}{\rho_0\,(\text{lineare})}\,. \tag{31}$$

Nell'adattare l'equazione (31) al suono, si usa per K_L l'equazione (30). Si sa anche che $AL_0 = V_0$, il volume di equilibrio, e che la densità lineare è data da:

$$\rho_0\,(\text{lineare})\,L_0 = \rho_0\,(\text{volumica})\,AL_0\,, \tag{32}$$

dove ρ_0 (volumica) è la densità volumica all'equilibrio. Inserendo le equazioni (30) e (32) nell'equazione (31) e tralasciando l'indicazione «volumica» dalla densità volumica all'equilibrio, ρ_0, si ottiene per la *velocità del suono*:

$$v^2 = -\frac{V_0\,(dp/dV)_0}{\rho_0}\,. \tag{33}$$

Si deve ancora trovare dp/dV, la velocità di variazione della pressione al variare del volume. A questo punto Newton usò la *legge di Boyle*, secondo la quale, a temperatura costante, il prodotto della pressione per il volune è costante:

$$pV = p_0 V_0\,, \qquad p = \frac{p_0 V_0}{V}\,, \tag{34}$$

dove p_0 è la pressione di equilibrio. Derivando, si ottiene:

$$\frac{dp}{dV} = -\frac{p_0 V_0}{V^2}\,,$$

cioè, all'equilibrio, con $V = V_0$, si ha:

$$V_0\left(\frac{dp}{dV}\right)_0 = -p_0\,. \tag{35}$$

Così l'equazione (33) diventa il *risultato di Newton*:

$$v_{\text{Newton}} = \sqrt{\frac{p_0}{\rho_0}}\,. \tag{36}$$

Per l'aria in CN, si ha:

$$\begin{aligned} p_0 &= 1\ \text{atm} = 1{,}01 \times 10^6\ \text{dyn/cm}^2 \\ &= \frac{29\ \text{g}_\text{m}/\text{mole}}{22{,}4\ \text{litro/mole}} = 1{,}29 \times 10^{-3}\ \text{g}_\text{m}/\text{cm}^3\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Perciò, Newton trova per la velocità del suono:

$$v_{\text{Newton}} = \sqrt{\frac{1{,}01 \times 10^6}{1{,}29 \times 10^{-3}}} = 2{,}80 \times 10^4\ \text{cm/s} = 280\ \text{m/s}.$$

La velocità determinata per via *sperimentale* (che si dovrebbe imparare a memoria) è, per l'aria in CN,

$$\begin{aligned} v &= 332\ \text{m/s} \\ &= 1200\ \text{km/h} \\ &= 1\ \text{km/3 s}. \end{aligned}$$

[Forse lo studente conosce il metodo comune per stimare la distanza di un lampo, contando il numero di secondi che intercorre fra il lampo e il tuono: «un chilometro equivale a tre secondi», all'incirca. In maniera analoga, si può misurare la velocità del suono usando un cronografo e un petardo (sparato da un aiutante)].

Correzione dell'errore di Newton. Sorge ora questo interessante quesito: come poté Newton avvicinarsi tanto alla risposta giusta (il che dimostra che c'è qualcosa di corretto nella sua deduzione), eppure sbagliarla per il 15% (il che dimostra che nella sua deduzione c'è qualcosa di sbagliato)? La causa d'errore fu l'avere introdotta la legge di Boyle, che vale soltanto a temperatura costante. La temperatura in un'onda sonora *non* resta costante: sull'aria situata (in un dato istante) in una regione di compressione è stato eseguito un lavoro, e la temperatura dell'aria risulta lievemente superiore al valore di equilibrio. Le regioni adiacenti distanti mezza lunghezza d'onda sono regioni di rarefazione: esse si sono raffreddate lievemente all'atto della espansione. (L'energia si conserva; l'energia in eccesso in una compressione uguaglia il deficit di energia in una rarefazione). A causa dell'aumento di temperatura in una compressione, in essa la pressione è *maggiore* di quella prevista dalla legge di Boyle, e la pressione in una rarefazione è *minore* di quella prevista. Questo effetto produce una forza di richiamo maggiore del previsto e quindi una maggiore velocità di fase.

Risulta che invece della legge di Boyle (che vale a temperatura costante) si dovrebbe usare la *legge adiabatica dei gas*, che fornisce la relazione fra p e V quando non è lasciato fluire del calore. (Non c'è tempo sufficiente perché il calore possa fluire dalle compressioni alle rarefazioni per livellare la temperatura: prima che ciò possa accadere, è trascorso un mezzo ciclo, e una regione che in precedenza era di compressione è diventata una regione di rarefazione. Perciò il risultato è identico a quello che si avrebbe se vi fossero delle «pareti» che impedissero al calore di fluire da una regione a un'altra). Si può dimostrare che questa relazione è data da:

$$\begin{aligned} pV^\gamma &= p_0 V_0^\gamma , \\ p &= p_0 V_0^\gamma V^{-\gamma} , \end{aligned} \tag{40}$$

dove γ è una costante che è chiamata «rapporto fra il calore specifico a pressione costante e il calore specifico a volume costante» e ha il valore numerico:

$$\gamma = 1{,}40 \quad \text{per l'aria in CN} .$$

Derivando l'equazione (40) e quindi ponendo $V = V_0$, si ottiene:

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma p_0 V_0^\gamma V^{-\gamma-1} ,$$

$$V_0 \left(\frac{dp}{dV}\right) = -\gamma p_0 .$$

Per sostituzione nell'equazione (33) si ottiene il risultato corretto per la velocità del suono:

$$\begin{aligned} v_{\text{suono}} &= \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} \\ &= \sqrt{1{,}40}\, v_{\text{Newton}} = 332 \text{ m/s} \end{aligned} \tag{41}$$

Esaminiamo perché il calore non ha il tempo di fluire da una compressione a una rarefazione, livellando così la temperatura. Perché il calore possa fluire per mantenere la temperatura costante dovunque, dovrebbe fluire per una distanza di una mezza lunghezza d'onda (da una compressione a una rarefazione) in un tempo breve rispetto a un mezzo periodo di oscillazione (dopo mezzo periodo, le compressioni e le rarefazioni avranno cambiato posto). Quindi, perché il flusso del calore sia abbastanza veloce, dovrebbe essere:

$$v(\text{del flusso di calore}) \gg \frac{\frac{1}{2}\lambda}{\frac{1}{2}T} = v_{\text{suono}} . \tag{42a}$$

Il flusso del calore risulta dovuto principalmente alla conduzione, cioè al trasferimento di energia cinetica traslatoria da una molecola d'aria a un'altra, per mezzo di collisioni. Per una molecola d'aria di massa M, nell'aria alla temperatura assoluta T, il valore quadratico medio della velocità termica (velocità traslatoria dovuta all'energia termica) in una data direzione z risulta essere:

$$v_{\text{vqm}} = \langle v_z^2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\frac{kT}{M}} , \tag{42b}$$

dove k è una costante chiamata costante di Boltzmann. La velocità del suono può anche essere espressa in funzione di T e di M. È data da:

$$v_{\text{suono}} = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0}} = \sqrt{\frac{\gamma kT}{M}} . \tag{42c}$$

Perciò, a parte la costante $\sqrt{\gamma}$, la velocità del suono è uguale al valore quadratico medio della velocità termica di una molecola lungo z. Perciò, *se* le molecole viaggiassero in linea retta per distanze dell'ordine di $(1/2)\lambda$ prima di urtarsi, «farebbero giusto in tempo» a trasferire il calore. In media, non soddisferebbero l'equazione (42*a*), ma alcune di quelle eccezionalmente veloci la soddisferebbero, e quindi una notevole quantità di calore potrebbe essere trasferita in un mezzo periodo. Ma invece di viaggiare in linea retta per distanze dell'ordine di $(1/2)\lambda$, le molecole vanno a zigzag in maniera casuale, percorrendo, fra gli urti, distanze soltanto dell'ordine di 10^{-5} cm (nel caso dell'aria in CN). A condizione che la lunghezza d'onda sia grande rispetto a 10^{-5} cm, la legge adiabatica è perciò un'ottima approssimazione. (La più breve lunghezza d'onda per le onde sonore udubili corrisponde a $\nu \approx 20000$ Hz, e quindi $\lambda = \mathrm{v}/\nu \approx 3{,}32 \times 10^4/2 \times \times 10^4 = 1{,}6$ cm).

ESEMPIO 3 - ONDE ELETTROMAGNETICHE NELLA IONOSFERA TERRESTRE E VELOCITA' DI FASE MAGGIORI DI c.

La relazione di dispersione per le onde elettromagnetiche nella ionosfera è (approssimativamente):

$$\omega^2 = \omega_p^2 + c^2k^2 \, , \tag{43}$$

dove c è la velocità della luce e $\omega_p = 2\pi\nu_p$ è la frequenza angolare delle oscillazioni proprie degli elettroni del plasma. Per frequenze di eccitazione ω superiori alla frequenza di taglio ω_p, la ionosfera è un mezzo dispersivo e quindi le onde elettromagnetiche sono sinusoidali. Ciò si verifica nel caso delle frequenze tipiche per MF o per TV, di circa 100 MHz. La velocità di fase per un'onda progressiva di frequenza ω è data da:

$$\mathrm{v}_\varphi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = c^2 + \frac{\omega_p^2}{k^2} \, . \tag{44}$$

Ma questa velocità è maggiore di c, la velocità nel vuoto della luce (e di tutte le altre onde elettromagnetiche, comprese le onde TV di 100 MHz che si stanno considerando).
Invero, la velocità di fase *supera c*, ma ciò *non* è in contraddizione con la teoria della relatività. Si ricordi che una velocità di fase v_φ dà semplicemente la relazione di fase fra l'oscillazione armonica stazionaria di una parte mobile (di un elettrone nella ionosfera) situata nella posizione z_1 e quella di un'altra parte mobile nella posizione z_2. In regime stazionario di oscillazione armonica, non si può dire quale oscillazione in z_2 è il «risultato» di una particolare oscillazione in z_1; nessuno può dirlo. L'intero sistema si trova in regime stazionario, raggiunto dopo un lungo tempo durante il quale si sono estinti i transitori. Si troverà (nel capitolo 6) che se si *modula* l'onda variandone l'ampiezza, inviando con tale sistema informazioni (ad esempio, uno spettacolo televisivo) per mezzo delle onde elettromagnetiche, allora *le modulazioni non si propagano alla velocità di fase*, bensì a una velocità diversa, chiamata velocità di gruppo, che risulta sempre minore di c, la velocità della luce nel vuoto.
Cerchiamo di capire come si può ottenere una velocità di fase maggiore di c. Si osservi che la causa della «sorpresa» (se il lettore è sorpreso) sta nella costante ω_p^2 che compare nella relazione di dispersione. Se ω_p^2 fosse zero, la velocità di fase sarebbe uguale a c e quindi non sarebbe maggiore di c. Questa costante che è la forza di richiamo agente

su un elettrone per spostamento unitario e per massa unitaria, porta alle oscillazioni libere degli elettroni nel plasma:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{M} \, . \tag{43}$$

Come tale, è analoga al contributo gravitazionale alla forza di richiamo dei pendoli accoppiati, i quali hanno la relazione di dispersione (nell'approssimazione delle grandi lunghezze d'onda):

$$\omega^2 = \frac{g}{l} + \frac{Ka^2}{M}k^2 \, , \tag{46}$$

che è della stessa forma generale di quella per la ionosfera [eq. (43)]. Si supponga ora di tagliare tutte le molle che accoppiano i pendoli nella sequenza, cioè, si ponga $K = 0$. [Non è così facile immaginare come porre $c = 0$ nell'equazione (43). Sotto questo riguardo i pendoli accoppiati sono più facili da trattare]. Quindi, la relazione di dispersione per la sequenza di pendoli fornisce la velocità di fase:

$$\mathrm{v}_\varphi^2 = \frac{\omega^2}{k^2} = \frac{g}{lk^2} \, , \tag{47}$$

che può essere resa maggiore della velocità della *luce* nel vuoto prendendo lk^2 abbastanza piccolo! Fisicamente, si vede come trattare la situazione. Non esiste affatto accoppiamento fra i pendoli. Si dispone semplicemente una lunga sequenza di pendoli che oscillino tutti con la stessa ampiezza, e con la costante di fase fra un pendolo e il successivo che cresca costantemente in maniera che la lunghezza d'onda (la distanza corrispondente a un incremento di 2π nella costante di fase) sia maggiore di c volte il periodo comune dei pendoli. Allora la velocità di fase è maggiore di c! Non è uno scherzo: *è* una velocità di fase e *supera c*!
D'altra parte, se si decide di *cambiare* l'ampiezza del moto di uno dei pendoli a valle per mezzo di qualche artificio, si trova che non si riesce a farlo tanto in fretta. Se si accoppiano i pendoli, perché si possa modificare il comportamento di un pendolo a valle cambiando il moto di un pendolo a monte (in una maniera che non sia l'intervenire direttamente sul pendolo a valle), allora si troverà che non si può inviare una modulazione lungo la sequenza alla velocità di fase, poiché, in larga misura, la velocità di fase non ha nulla a che fare con l'accoppiamento fra i pendoli. Invece, la modulazione si propaga alla velocità di gruppo, che è minore di c.