B-Spline

A.A. 2016-2017

Notazioni

- $[a, b]$ intervallo su cui si vuole approssimare una funzione *smooth*, mediante un polinomio di grado n;
- *breakpoints* $\xi := (\xi_j)_1^{l+1}$, punti che individuano sottointervalli di$[a, b]$ del tipo $[\xi_j, \xi_{j+1}]$ con $a < \xi_1 < \ldots < \xi_{l+1} = b$, su cui costruire un polinomio di grado inferiore ad n; i *breakpoints* devono essere una *sequenza senza ripetizioni, strettamente crescente*.

Funzioni polinomiali a tratti

Definition (Linear space of Piecewise polinomial (pp) functions of order k with break sequence ξ)

$\Pi_{k,\xi,\nu}$ è lo spazio di funzioni polnomiali a tratti di *ordine k* con breakpoints ξ, costituite da polinomi di grado al piú $k-1$ tra i *breakpoints* $\xi := (\xi_j)_1^{l+1}$, che soddisfano un numero $\nu_j,\ j = 2, ..., l$ di condizioni di regolaritá, sulla funzione e sulle sue derivate, in ciascuno dei breakpoint "interni" $\xi_2 < ... < \xi_l$. Ciascun ν_j sarà al più $n-1$.

Definition (Linear space of Spline functions of order k with knot sequence t)

$S_{k,t}$ è lo spazio delle Spline polinomiali di *ordine k* sull'insieme di nodi t, costituite da un polinomio a tratti, con condizioni di massima regolarità nei breakpoints, ovvero $\nu_j = n-1,\ j = 2, ..., l.$

Ogni funzione polinomiale a tratti ammette una rappresentazione nella base di opportune funzioni di tipo Spline dette, pertanto, **B-spline** o **basis spline**.

B-Spline: definizione

Definiamo una B-Spline *di ordine k* come differenza finita (opportunamente scalata) della funzione *potenza troncata* di grado $k-1$.

Definition (B-Spline *di ordine k*)

Sia $t := (t_i)$ un insieme ordinato, di *nodi* $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_{n+k}$. La $j-esima$ B-Spline *di ordine k* sui nodi $\mathbf{t}$, si indica con $B_{j,k,t}$ e si definisce come:

$$B_{j,k,t} \quad := \quad (t_{j+k} - t_j)[t_j, ..., t_{j+k}](\cdot - x)_+^{k-1}, \quad \text{per ogni } x \in \mathcal{R} \tag{1}$$

potendo essere espressa (per le proprietà delle differenze finite) come differenza finita tra due differenze finite di ordine precedente:

$$B_{j,k,t} \quad = \quad [t_{j+1}, ..., t_{j+k}](\cdot - x)_+^{k-1} - [t_j, ..., t_{j+k-1}](\cdot - x)_+^{k-1}$$

Si osserva che deve sussistere la relazione:

numero dei nodi n+k = numero dei beakpoints (n) + ordine della B-spline (k)

Su un insieme di $n+k$ nodi si possono costruire $n+k-k=n$ B-spline di ordine k, ciascuna su $k+1$ nodi.

Le B-spline come *base*

- Ogni spazio $\Pi_{k,\xi,\nu}$ ha una base di B-spline.
- Ogni spline $s \in S_{k,t}$ si può esprimere in `B-form`, ovvero nella base di B-spline.

Le B-spline si dividono principalmente in tre tipi:

- B-spline uniformi: parametrizzate su intervalli di lunghezza unitaria [0,1]
- B-spline non uniformi: parametrizzate su intervalli differenti.
- B-spline non uniformi razionali: NURBS

B-Spline: proprietà

La funzione $B_{j,k,t}(x)$ definita in (1):

- è un polinomio *a tratti, di ordine* k, con breakpoints $t_j, ..., t_{j+k}$;
- vale la seguente:

Property (Relazione di ricorrenza)

Per $k > 1$ si ha:

$$B_{j,k} = \omega_{jk} B_{j,k-1} + (1 - \omega_{j+1,k}) B_{j+1,k-1} \tag{2}$$

con

$$\omega_{jk} := \frac{x - t_j}{t_{j+k-1} - t_j}$$

Partendo da $k = 2$ e riapplicando la formula ricorrente, dopo $k-1$ applicazioni si ottiene:

$$B_{j,k} = \sum_{r=j}^{j+k-1} b_{r,k} B_{r,1}$$

in cui ciascuno dei k coefficienti $b_{r,k}$ è un polinomio di grado $k-1$ (essendo somma di prodotti di $k-1$ polinomi di primo grado).

B-Spline: proprietá

Dalla formula di ricorrenza (2) si deducono e proprietà seguenti:

Property (Supporto)

Una B-spline si dimostra essere una spline a **supporto minimo** rispetto ad un certo grado, condizioni di regolarità e breakpoints (*degree, smoothness ad domain partition*).

Property (Positivitá)

La B-spline di ordine k con *breakpoints* t_j, t_{j+k}, si annulla al di fuori dell'intervallo $[t_j, t_{j+k})$ ed è positiva solo internamente allo stesso intervallo:

$$B_{j,k,t}(x) = \begin{cases} > 0 & t_j \leq x < t_{j+k} \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

Inoltre:

- La B-spline $B_{j,k,t}$ dipende solo dai $k+1$ nodi $t_j, \ldots, t_{j+k}$:

$$B_{j,k,t} = B(\cdot|t_j, \ldots, t_{j+k})$$

- A differenza dei breakpoint, la sequenza dei nodi non deve essere *strettamene crescente*; la risultante **molteplicità con cui i breakpoint ξ_i appaiono nella sequenza dei nodi** $(t_j, \ldots, t_{j+k})$ determina la regolaritá con cui s raccordano le diverse B-spline nei nodi, secondo la regola seguente.

B-Spline: proprietà

Property (**Smoothness condition**)

ordine di differenziabilità nei breakpoint = ordine della spline - molteplicità dei relativi nodi

Dunque se un numero τ occorre esattamente r volte tra i nodi $t_j, \ldots, t_{j+k}$ allora la B-spline $B_{j,k,t}$ di ordine k, ha $k - r$ condizioni di continuità, ovvero la funzione B-spline risulta essere continua e con $k - r - 1$ derivate successive continue, in quel nodo.

Ad esempio se $k = 3$:

- ha $k - 1 = 2$ due condizioni di continuità, in un nodo semplice, ovvero risulta continua con derivata prima continua;
- ha $k - 2 = 1$ una condizione di continuità in un nodo doppio, ovvero risulta essere semplicemente continua;
- ha $k - 3 = 0$ condizioni di continuità in un nodo triplo, ovvero non presenta alcuna condizione di continuità e la B-spline risulta essere discontinua in quel nodo.

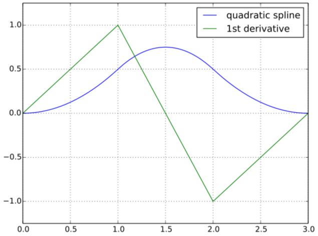


Figure: Cardinal quadratic B-spline with knot vector (0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 3) and control points (0, 0, 1, 0, 0)

B-Spline quadratica (grado 2) dunque di ordine $k = 3$; si costruisce su 4 breakpoints, $\xi_1, \ldots, \xi_{k+1}$. La regolarità nei breakpoins dipende dalla molteplicità dei singoli nodi:

- ha $k - 3 = 0$ condizioni di continuità in un nodo triplo, ovvero non presenta alcuna condizione di continuità e la B-spline risulta essere discontinua in quel nodo;
- ha $k - 1 = 2$ condizioni di continuità in un nodo semplice, ovvero risulta continua con derivata prima continua in quel nodo.

Example

Dato l'insieme dei nodi $(0, 1, 1, 3, 4, 6, 6, 6)$. Costruire le 5 ($= numero\ nodi - k$) B-spline paraboliche (di ordine $k = 3$) sull'insieme dato.

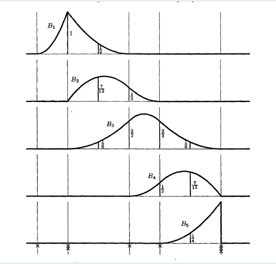


Figure: Si osservi la relazione tra regolarità nei nodi e molteplicità degli stessi nodi, delle B-spline definite sull'insieme $(t_1, \ldots, t_{5+3}) = (0, 1, 1, 3, 4, 6, 6, 6)$

Dalla **Smoothness condition** si deduce che

- nel nodo $t_2 = 1$ le B-spline di ordine 3 si raccordano con continuità $ord = 3 - 2 = 1$;
- nel nodo $t_6 = 6$ le B-spline di ordine 3 si raccordano in modo discontinuo essendo $ord = 3 - 3 = 0$;

Example

Si vuole definire una spline cubica, sull'intervallo $[1, 3]$, con breakpoints interni $1.5, 1.8, 2.6$; si vuole che tale spline sia C^2, in ciascuno dei nodi interni.
La rappresentazione di tale spline nella base delle B-spline di ordine $k = 4$, richiede l'ampliamento dell'insieme dei breakpoint; i nodi saranno pertanto:

$$t = [1, 1, 1, 1, 1.5, 1.8, 2.6, 3, 3, 3, 3];$$

imponendo che il primo e l'ultimo nodo abbiano molteplicità 4.
Questo comporta che:

- la funzione non sia continua nei nodi 1 e 3, con molteplicità 4 (essendo $k - 4 = 0$);
- la funzione sia continua con derivate prime e seconde continue nei nodi semplici (essendo $k - 1 = 3$).

La rappresetazione della spline cubica in B-form sarà una combinazione pesata di $n = numero\ nodi - k = 11 - 4 = 7$ B-spline.
In `matlab` l'insieme dei nodi ampliato si determina mediante l'istruzione:

$$>> t = augknt([1, 1.5, 1.8, 2.6, 3], 4)$$

Example (cont.)

Se, invece, si vuole che la funzione presenti una discontinuità sulla derivata prima nel nodo 1.8, bisogna ampliare l'insieme dei breakpoint rendendo triplo lo stesso nodo (cosi' che, per $k-3=1$, si abbia solo la continuità della funzione nello stesso nodo). L'insieme

$$t = [1, 1, 1, 1, 1.5, 1.8, 1.8, 1.8, 2.6, 3, 3, 3, 3];$$

si ottiene con:

$$>> t = augknt([1, 1.5, 1.8, 2.6, 3], 4, [1, 3, 1]);$$

In `matlab`

`ppform` e `B-form`

There are two commonly used ways to represent a polynomial spline, the `ppform` and `B-form`. In the `Spline toolbox`, a spline in ppform is often referred to as a piecewise polynomial, while a piecewise polynomial in B-form is often referred to as a spline. This reflects the fact that piecewise polynomials and (polynomial) splines are just two different views of the same thing

`ppform`

The `ppform` of a polynomial spline of order k provides a description in terms of its *breaks* $\xi_1, \dots, \xi_{l+1}$ and the local polynomial coefficients c_{ji} of its l pieces:

$$p_j(x) = \sum_{i=1}^{k} (x - \xi_j)^{k-i} c_{ji}, \qquad j = 1 : l$$

The ppform is convenient for the evaluation of a spline.

In `matlab`

`B-form`

La `B-form` è diventata la rappresentazione standard per la **costruzione** di una spline, dal momento che risulta semplice imporre le condizioni di regolarità nei nodi; inoltre **il calcolo dei coefficienti di tale rappresentazione si riconduce alla risoluzione di un sistema lineare con matrice a banda.**

La B-form descrive la spline s come somma pesata nella base delle $B - Spline$:

- Definiamo la spline in $B - form$ su un insieme di $n + k$ nodi $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_{n+k}$, con n numero delle funzioni di base necessarie alla rappresentazione e k ordine della spline:

$$s = \sum_{j=1}^{n} B_{j,k} a(:, j)$$

dove la jth B-spline di ordine k è definta sui $k + 1$ nodi $t_j \leq \ldots \leq t_{j+k}$

$$B_{j,k} = B(\cdot | t(j : j + k))$$

I coefficienti a_j sono detti **punti di controllo** della B-spline.

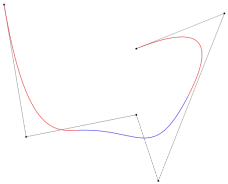
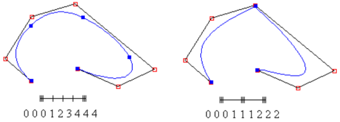


Figure: B-spline with control points/control polygon, and marked component curves

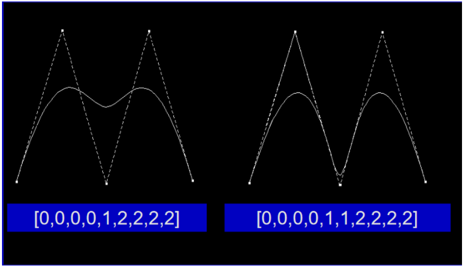
- In the *computer-aided design and computer graphics*, spline functions are constructed as linear combinations of B-splines with a set of control points.
- In genere le splines non passano per i punti di controllo, quindi neanche per il punto iniziale e finale del poligono di controllo. Tuttavia, se la molteplicità del valore nodale è pari al grado k della curva, la curva passerà per quel punto. Ad esempio, per far passare una cubica b-splines per il punto iniziale, occorre far coincidere i primi tre nodi: la sequenza dei valori nodali inizierà con $0, 0, 0$. La disposizione dei nodi modifica la forma della curva, anche se il poligono di controllo è lo stesso:



Vantaggi/svantaggi delle curve B-spline

Vantaggi:

- Il grado della curva è indipendente dal numero dei breakpoints, per cui si può usare un elevato numero di punti di controllo senza introdurre le oscillazioni che caratterizzano l'andamento delle funzioni polinomiali al crescere del grado.
- Aumetando la molteplicità di un nodo si attira la curva verso quel nodo



- Le curve Spline e B-spline formano i principali modelli di curve CAD (Computer-Aided Design, cioè "progettazione assistita dall'elaboratore" per la grafica computazionale).

Vantaggi/svantaggi delle curve B-spline

Svantaggio: Le curve Spline e B-spline rappresentano le forme quadratiche solo in modo approssimato (es. coniche).

Si introducono pertanto, appossimazioni basate su polinomi razionali, dette NURBS (*Non Uniform Rational Basis-Splines*), ovvero "B-Splines razionali non uniformi", definite come rapporto di curve polinomiali.

Spline razionali

Una spline razionale si definisce come una funzione rapporto di due spline:

$$r(x) = s(x)/w(x)$$

Le spline razionali sono utilizzate principalmente per descrivere esattamente le funzioni coniche, alla base della grafica computazionale.

Le NURBS sono particolari spline razionali, standard tool in CAGD (Computer Aidd Geometic Design) in cui entrambe le funzioni, s e w sono in B-form, ed in cui ciascun coefficiente dello sviluppo di s contiene esplicitamente il corrispondente coefficiete di w come fattore:

$$s = \sum_i B_i v(i) a(:, i), \qquad w = \sum_i B_i v(i),$$

MATLAB Spline Toolbox

Matlab rende disponibile un intero Toolbox dedicato alle Spline; tra le funzioni incluse:

- `bspine`: che realizza il grafico dela B-spline e dei suoi singoli tratti polinomiali
- `csapi`: per l'interpolazione mediante spline cubica
- `ppmak` mette insieme le informazioni relative ad una spline a partire dalla sua `pp-form`
- `rpmak, rsmak`: mettono insieme le informazioni relative ad una spline *razionale*
- `spcol`:

$$
\begin{aligned}
>> \ colmat &= spcol(knots, k, tau) \\
>> \ colmat &= spcol(knots, k, tau, arg1, arg2)
\end{aligned}
$$

costruisce la matrice di collocazione della B-spline, $colmat = spcol(knots, k, tau)$ con $length(tau)$ righe e $length(knots) - k$ colonne, il cui elemento $(i, j)th$ è:

$$(D^{m(i)})B_j(tau(i))$$

con B_j la jth B-spline di ordine k sui nodi $knots$. La matrice di collocazione risulta essere a banda. Provare con:

$$>> spcol([1:6], 3, .1 + [2:4])$$