

# 1 Diagonalizzazione di matrici

Siano  $K$  un campo e  $M_{n,n}(K)$  l'insieme delle matrici  $n \times n$  a coefficienti in  $K$ . Siano  $A, B \in M_{n,n}(K)$ : diremo che  $A$  e  $B$  sono **coniugate** o **simili**, se esiste una matrice  $C \in M_{n,n}(K)$  invertibile, tale che  $A = C^{-1}BC$ . Ad esempio consideriamo le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$$

tali matrici sono coniugate in quanto considerata matrice  $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  e la sua inversa  $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ , si ha:

$$A = C^{-1}BC$$

Ovviamente matrici simili sono equivalenti ma non tutte le matrici equivalenti sono simili. Una matrice  $D = (a_{ij})$  si dice **diagonale** se  $a_{ij} = 0$  ogni volta che  $i \neq j$ : dunque in una matrice diagonale gli unici elementi non nulli sono (eventualmente) quelli della diagonale. Ad esempio sono diagonali le matrici:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

mentre la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

non è diagonale in quanto l'elemento di posto  $(1, 2)$  è diverso da 0 ( $a_{12} = 1$ )

Diremo che la matrice  $A$  è **diagonalizzabile** se e solo se è simile ad una matrice diagonale. Ad esempio la matrice  $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$  non è diagonale, ma

è diagonalizzabile. Infatti se  $P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , allora  $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -1/7 & 4/7 \end{pmatrix}$  e

$$B^* = P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Pertanto  $B^*$  è una matrice diagonale, simile alla matrice  $B$ .

Sia  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{ii} & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$  una matrice diagonale: per come è definito il prodotto tra matrici, si ha

$A^k = \begin{pmatrix} a_{11}^k & 0 & 0 \\ 0 & a_{ii}^k & 0 \\ 0 & 0 & a_{nn}^k \end{pmatrix}$ , per ogni numero intero  $k \geq 0$ . In tal caso il

calcolo delle potenze di  $A$  risulta semplificato. Se poi  $A$  è una matrice non diagonale ma diagonalizzabile, da  $A = P^{-1}BP$  (con  $B$  matrice diagonale) segue  $A^k = P^{-1}B^kP$ , per ogni numero intero  $k \geq 0$ . Si capisce pertanto l'utilità di essere in grado di "riconoscere" le matrici diagonalizzabili e di individuare la matrice  $P$  che permette la diagonalizzazione. Scopo di questo paragrafo sarà pertanto determinare un criterio di diagonalizzazione per matrici  $n \times n$ .

Iniziamo col dare qualche altra definizione. Sia  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$  una matrice  $n \times n$  e  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  un vettore di  $K^n$ . Abbiamo definito il prodotto

$$A \cdot \mathbf{v} = (a_{11} \cdot v_1 + \dots a_{1n} \cdot v_n, \dots, a_{n1} \cdot v_1 + \dots a_{nn} \cdot v_n) = \mathbf{w}$$

diremo che il vettore  $\mathbf{v}$  è un **autovettore** per la matrice  $A$  se risulta

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \text{ con } \lambda \in K \\ (\lambda \text{ viene detto } \mathbf{autovalore} \text{ per } A)$$

**Attenzione:** non tutte le matrici ammettono autovettori (e, di conseguenza, autovalori). Inoltre una stessa matrice può avere autovalori distinti. Consideriamo ad esempio la matrice  $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ . Si ha

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + (-4) \cdot 1 = 8 \\ 2 \cdot 4 + (-6) \cdot 1 = 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

dunque, in base alle definizioni date, si ha che il vettore  $\mathbf{v} = (4, 1)$  risulta essere un autovettore per la matrice  $B$  con autovalore 2. D'altronde si ha anche:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -12 \\ -3 \end{pmatrix}$$

e dunque anche il vettore  $\mathbf{w} = (-12, -3)$  è un autovettore per la matrice  $A$  con autovalore 2. Se moltiplico la matrice  $B$  per il vettore  $\mathbf{u} = (1, 2)$  ottengo:

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 2 = -5 \\ 2 \cdot 1 + (-6) \cdot 2 = -10 \end{pmatrix} = (-5) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

e dunque anche  $-5$  risulta essere un autovettore per  $B$ . Infine

$$\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 + (-4) \cdot 1 = -1 \\ 2 \cdot 1 + (-6) \cdot 1 = -4 \end{pmatrix} \neq \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ per ogni } \lambda \in \mathbb{R}$$

pertanto il vettore  $\mathbf{z} = (1, 1)$  non è un autovettore per  $B$ . Abbiamo dunque trovato autovettori ed autovalori distinti per la matrice  $A$  ed abbiamo potuto osservare che non tutti i vettori di  $\mathbb{R}^2$  sono autovettori per tale matrice. (In particolare gli autovalori trovati risultano essere gli elementi della diagonale della matrice diagonale  $B^*$  simile a  $B$ ! Come vedremo nel seguito questo non è un caso). Rimane il problema di determinare autovalori ed autovettori di una matrice  $A$ : c'è un modo per sapere se la matrice  $A$  è o meno diagonalizzabile e, nel caso in cui lo sia, determinare la matrice  $P$  che permette di diagonalizzare  $A$ ?

Siano  $A$  una matrice  $n \times n$  a coefficienti nel campo  $K$  e  $\lambda \in K$ . Poniamo  $V_\lambda = \{\mathbf{v} \in K^n : A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}\}$ , vale a dire l'insieme dei vettori di  $K^n$  che risultano essere autovettori per la matrice  $A$  con autovalore  $\lambda$ . Tale insieme  $V_\lambda$  risulta essere un sottospazio (eventualmente quello nullo) di  $K^n$ . Infatti:

1.  $V_\lambda \neq \emptyset$ :  $A \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} = \lambda \mathbf{0}$  e dunque  $\mathbf{0} \in V_\lambda$ , per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$ ;
2. se  $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V_\lambda$  si ha  $A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$  e  $A \cdot \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}$ ; allora  $A \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{w}) = A \cdot \mathbf{v} - A \cdot \mathbf{w} = \lambda \mathbf{v} - \lambda \mathbf{w} = \lambda(\mathbf{v} - \mathbf{w})$  e dunque  $(\mathbf{v} - \mathbf{w}) \in V_\lambda$ ;
3. se  $\mathbf{w} \in V_\lambda$  ed  $\alpha \in K$ , da  $A \cdot \mathbf{w} = \lambda \mathbf{w}$  segue  $A \cdot (\alpha \mathbf{w}) = \alpha(A \cdot \mathbf{w}) = \alpha(\lambda \mathbf{w}) = \lambda(\alpha \mathbf{w})$  e dunque  $\alpha \mathbf{w} \in V_\lambda$

pertanto  $V_\lambda$  è un sottospazio vettoriale di  $K^n$ : tale sottospazio è detto **autospazio relativo all'autovalore  $\lambda$** . Inoltre se  $\lambda$  e  $\mu$  sono autovalori distinti per la matrice  $A$ , si ha  $V_\lambda \cap V_\mu = \{\mathbf{0}\}$ . Infatti se  $\mathbf{v} \in V_\lambda \cap V_\mu$ , si ha:

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} = \mu \mathbf{v}, \text{ per cui } \lambda \mathbf{v} - \mu \mathbf{v} = (\lambda - \mu) \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

e, per le proprietà degli spazi vettoriali, dall'essere  $(\lambda - \mu) \neq 0$ , segue  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , per cui  $V_\lambda \cap V_\mu = \{\mathbf{0}\}$ . Allora se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$  sono autovalori distinti della matrice  $A$ , si ha che  $L(V_{\lambda_1}, \dots, V_{\lambda_s}) = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_s}$ .

E' evidente che il primo passo da compiere consiste nel determinare gli (eventuali) autovalori della matrice  $A$ . Se  $\lambda$  è un autovalore per la matrice  $A$  con autovettore  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  si ha

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 \dots & \lambda \end{pmatrix} \cdot \mathbf{v} = \lambda \mathbf{I}_n \cdot \mathbf{v}$$

dunque da  $(A - \lambda \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$  (per ogni vettore  $\mathbf{v}$ ) segue che la matrice  $A - \lambda \mathbf{I}_n$  deve avere determinante uguale a 0. Si chiama polinomio **caratteristico della matrice  $A$**  il polinomio  $p_A(\lambda) = |A - \lambda \mathbf{I}_n|$ : **tutte e sole le sue (eventuali) radici risultano essere gli autovalori della matrice  $A$ .**

**Esempio 1.** Cerchiamo ad esempio gli eventuali autovalori della matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ . Il polinomio caratteristico di tale matrice risulta essere:

$$p_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & 3 \\ 1 & -1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)[(1 - \lambda)(-1 - \lambda) + 3] + 2[(-1)(1 - \lambda)] = -\lambda^2(\lambda - 1)$$

Pertanto due autovalori distinti risultano  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 1$ . Consideriamo la

$$\text{matrice } B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} :$$

$$p_B(\lambda) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -4 \\ 2 & -6 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(-6 - \lambda) + 8 = -18 + 3\lambda + \lambda^2 + 8 = \lambda^2 + 3\lambda - 10$$

le cui radici sono  $\lambda_1 = -5$  e  $\lambda_2 = 2$  (e già avevamo notato che gli autovalori di tale matrice risultano essere proprio  $-5$  e  $2$ ). Consideriamo ora la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -7 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} : p_C(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -7 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(-\lambda) + 14 = \lambda^2 - \lambda + 14$$

tale polinomio è privo di radici e dunque non la matrice  $C$  non ammette autovalori.

Consideriamo infine la matrice  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ :  $p_D(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = (2-\lambda)^2(3-\lambda)$ . Pertanto gli autovalori della matrice  $D$  sono  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 3$ .

Rimane il problema di determinare gli autospazi relativi ad un autovettore. Sia dunque  $\lambda_0$  un autovalore per matrice  $A$ . Il vettore  $\mathbf{v}$  è un autovettore relativo all'autovalore  $\lambda_0$  se e solo se:

$$A \cdot \mathbf{v} = \lambda_0 \cdot \mathbf{v} \text{ e dunque } A \cdot \mathbf{v} - \lambda_0 \cdot \mathbf{v} = (\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}_n) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

Allora  $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n)$  risulta essere un autovettore relativo all'autovalore  $\lambda_0$  se e solo se le sue componenti risultano essere soluzioni del sistema omogeneo la cui matrice associata è  $\mathbf{A} - \lambda_0 \mathbf{I}_n$ .

**Esempio 2.** Determiniamo gli autospazi relativi agli autovettori delle matrici prima considerate.

La matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  ammette due autovalori:  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$ .

Iniziamo col determinare  $V_0$ , l'autospazio relativo all'autovalore 0. Il sistema omogeneo la cui matrice risulta essere  $A - \mathbf{0I}_3 = A$  è:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è dato da  $V_0 = \{(-2t, -3t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ .

Determiniamo ora  $V_1$ . La matrice da considerare in tal caso è  $A - (-1)\mathbf{I}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$ , matrice associata al sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2x_3 = 0 \\ 3x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

il cui insieme delle soluzioni è dato da  $V_1 = \{(t, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$ . Da quanto già osservato segue che il sottospazio generato da  $V_0$  e  $V_1$  è somma diretta:  $V = V_0 \oplus V_1$ ,  $\dim V = 2$  (e dunque  $V$  è un sottospazio proprio di  $\mathbb{R}^3$ ).

Ripetiamo lo stesso procedimento per individuare gli autospazi della matrice  $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$  prima considerata. Gli autovalori di tale matrice risultano essere

$\lambda_1 = -5$  e  $\lambda_2 = 2$ . Gli autospazi saranno dunque  $V_{-5}$ , insieme delle soluzioni di  $\begin{cases} 8x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$  e dunque  $V_{-5} = \{(t, 2t) : t \in \mathbb{R}\}$ , mentre  $V_2$  è l'insieme delle soluzioni di  $\begin{cases} x_1 - 4x_2 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 = 0 \end{cases}$  e dunque  $V_2 = \{(4t, t) : t \in \mathbb{R}\}$ . In questo caso si ha  $V_{-5} \oplus V_2 = \mathbb{R}^2$ .

Rimangono da determinare gli autospazi relativi agli autovalori della matrice  $D$ . Se nella matrice  $D - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & -1 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{pmatrix}$  sostituiamo  $\lambda = 2$  otteniamo la matrice  $D - 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  il cui sistema omogeneo associato è  $\{x_3 = 0\}$  pertanto  $V_2 = \{(t, s, 0) : t, s \in \mathbb{R}\}$  è un sottospazio di dimensione 2 di  $\mathbb{R}^3$ . Per determinare poi  $V_3$  sostituiamo  $\lambda = 2$  nella matrice  $D - \lambda I_3$  ottenendo la matrice  $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  associata al sistema omogeneo  $\begin{cases} -x_1 = 0 \\ -x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$  il cui insieme delle soluzioni è dato da  $V_3 = \{(0, s, -s) : s \in \mathbb{R}\}$  di dimensione 1. In questo caso si ha  $V_3 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$ .

Si definisce **molteplicità algebrica** dell'autovalore  $\lambda_i$  la molteplicità di  $\lambda_i$  come radice del polinomio caratteristico:  $m_a(\lambda_i)$ .

Si definisce **molteplicità geometrica** dell'autovalore  $\lambda_i$  la dimensione dell'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda_i$ :  $m_g(\lambda_i) = \dim(V_{\lambda_i})$

Evidentemente si ha, per ogni  $\lambda_i$ ,  $1 \leq m_g(\lambda_i) \leq m_a(\lambda_i)$ . Pertanto se  $m_a(\lambda_i) = 1$  si ha necessariamente  $m_g(\lambda_i) = m_a(\lambda_i)$ . Altrimenti può succedere che risulti  $m_g(\lambda_i) < m_a(\lambda_i)$ : è questa la situazione che abbiamo trovato

nell'**esempio 2** dove la matrice  $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$  ammette due autovalori:

$\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = 1$  poiché  $p_A(\lambda) = \left| \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1 - \lambda & 3 \\ 1 & -1 & -1 - \lambda \end{pmatrix} \right| = -\lambda^2(\lambda - 1)$ ; le

molteplicità algebriche sono date da  $m_a(0) = 2$ ,  $m_a(1) = 1$ , mentre le molteplicità geometriche trovate sono  $m_g(0) = \dim V_0 = 1$ ,  $m_g(1) = \dim V_1 = 1$ . Pertanto in questo caso si ha:  $m_g(0) < m_a(0)$  e  $m_g(1) = m_a(1)$ . Sempre nell'**esempio 2** si è trovato che la matrice  $B$  è tale che  $m_g(-5) = m_a(-5) = 1$ ,  $m_g(2) = m_a(2) = 1$ . Infine per la matrice  $D$  si ha  $m_g(2) = m_a(2) = 2$  e  $m_g(3) = m_a(3) = 1$ .

Vale il seguente risultato (di cui si omette la dimostrazione):

**Teorema:** Siano  $A$  una matrice  $n \times n$  e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_t$  i suoi autovalori distinti. Le seguenti condizioni sono equivalenti:

i) la matrice  $A$  è diagonalizzabile;

ii) Se indichiamo con  $V_{\lambda_i}$  l'autospazio relativo all'autovalore  $\lambda_i$ , si ha  $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} = \mathbb{R}^n$ ;

iii) per ogni  $\lambda_i$  la molteplicità algebrica coincide con quella geometrica ed inoltre la somma delle molteplicità geometriche è  $n$ :

$$m_g(\lambda_1) + m_g(\lambda_2) + \dots + m_g(\lambda_t) = n$$

Pertanto risultano diagonalizzabili le matrici  $B$  e  $D$  dell'esempio 2, mentre non lo è la matrice  $A$ .

Sia  $A$  una qualsiasi matrice  $n \times n$  diagonalizzabile e dunque tale che  $V_{\lambda_1} \oplus V_{\lambda_2} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_t} = \mathbb{R}^n$ . Allora il sistema  $B$  che si ottiene considerando l'unione di basi di  $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_t}$  è una base di  $\mathbb{R}^n$ . Pertanto se  $B_1 = [\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{s_1}]$  è una base di  $V_{\lambda_1}$ ,  $B_2 = [\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{s_2}]$  è una base di  $V_{\lambda_2}, \dots$ ,  $B_t = [\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{s_t}]$  è una base di  $V_{\lambda_t}$ , allora  $B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_t$  è una base per  $\mathbb{R}^n$ : gli elementi di tale base sono tutti autovettori: una base i cui vettori siano tutti autovettori è detta **base spettrale**. Un esempio di base spettrale è dato, nel caso della matrice  $B = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$  da  $B = [(4, 1), (1, 2)]$ . Nel caso della matrice  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  si ha una base spettrale considerando  $B = [(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, -1)]$ .

La matrice  $P$  che permette di diagonalizzare la matrice  $A$  si ottiene considerando la matrice che ha come vettori colonna i vettori delle basi di  $V_{\lambda_1}, V_{\lambda_2}, \dots, V_{\lambda_t}$ . Ad esempio nel caso della matrice  $B$  otteniamo la matrice  $P_B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  la cui inversa è  $P_B^{-1} = \begin{pmatrix} 2/7 & -1/7 \\ -1/7 & 4/7 \end{pmatrix}$ . Abbiamo già osservato che  $P_B^{-1}BP_B = B^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ . Analogamente, nel caso della

matrice  $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$  si trova:

$$P_D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = P_D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \text{ per cui si ha:}$$

$$P_D^{-1}DP_D = D^* = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

**Riassumendo:** quando si vuole studiare il problema della diagonalizzazione di una matrice quadrata  $A$   $n \times n$  bisogna procedere nel seguente modo:

1. Scrivere il polinomio caratteristico  $p_A(\lambda)$  della matrice  $A$  e studiarne le radici: tali (eventuali) radici risulteranno essere gli autovalori  $\lambda_1, \dots, \lambda_t$  della matrice  $A$ .

**2.** Studiare la molteplicità algebrica  $m_a(\lambda_i)$  di ogni radice  $\lambda_i$ : se la somma di tale molteplicità risulta minore di  $n$  la matrice non è diagonalizzabile. Se tale somma è  $n$  bisogna andare a determinare le molteplicità geometriche dei  $\lambda_i$ .

**3.** Determinare gli autospazi  $V_{\lambda_i}$  e la loro dimensione (così da avere la molteplicità geometrica  $m_g(\lambda_i)$ ).

Per determinare gli autospazi  $V_{\lambda_i}$  bisogna determinare le soluzioni del sistema omogeneo la cui matrice coincide con  $A - \lambda_i I_n$