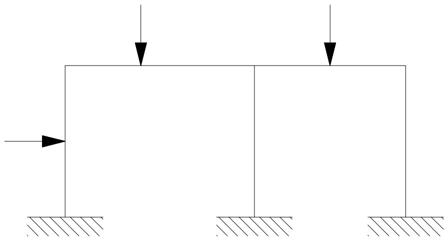
5. STRUTTURE IPERSTATICHE



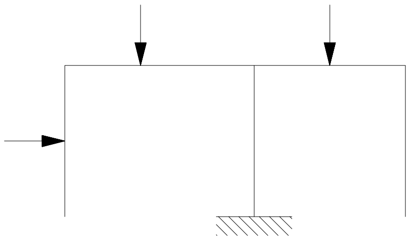
I metodi risolutivi generali sono due:

1. metodo delle forze
2. metodo degli spostamenti

Il primo è più intuitivo ed è preferibile per strutture poco iperstatiche. Il secondo è più automatico ed è preferibile per strutture altamente iperstatiche (è quello solitamente usato nei programmi di calcolo automatico).
Entrambi associano al sistema dato un altro sistema, detto sistema principale, che si sa risolvere con le conoscenze già acquisite e mediante il quale si giunge a risolvere il sistema dato.

Metodo delle forze

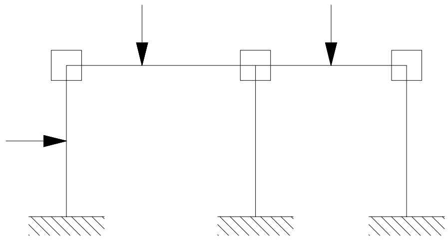
Il sistema principale è un sistema staticamente determinato, che si ottiene da quello dato togliendo vincoli fino ad avere una struttura isostatica



Sistema principale

Metodo degli spostamenti

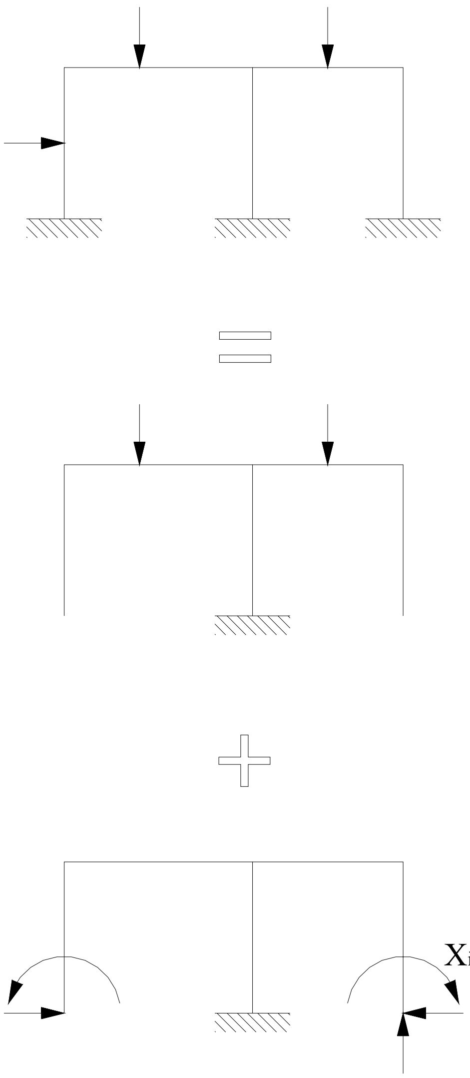
Il sistema principale è un sistema geometricamente determinato, che si ottiene da quello dato aggiungendo vincoli fino ad avere una struttura composta di travi perfettamente incastrate agli estremi



Sistema principale

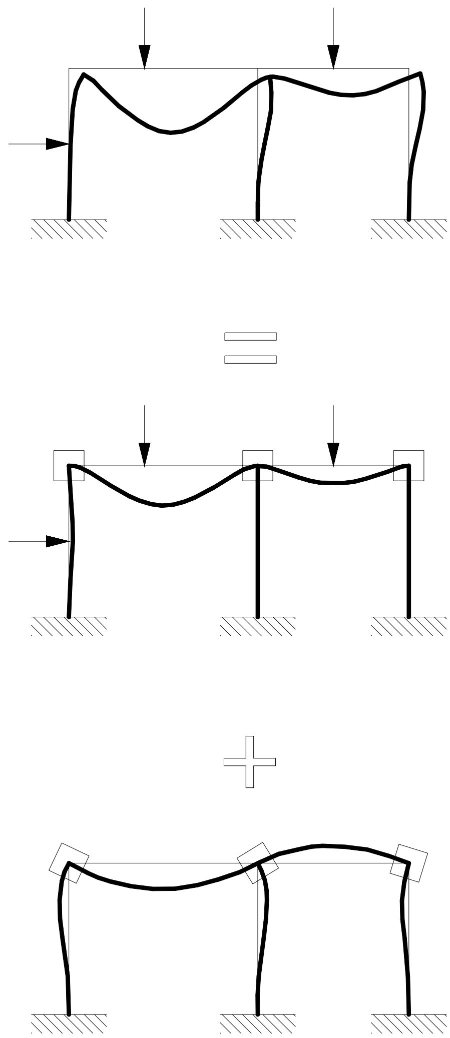
Il sistema principale è risolubile (sappiamo risolvere le strutture isostatiche).
Il sistema principale rispetta l'equilibrio (è isostatico), ma non la congruenza (nei punti dove sono stati soppressi dei vincoli ho spostamenti e rotazioni diversi da quelli reali).

Ritroviamo il sistema effettivo applicando al sistema principale le reazioni reali X_i dei vincoli che abbiamo soppresso (iperstatiche).



Il sistema principale è risolubile (sappiamo risolvere le travi incastrate).
Il sistema principale rispetta la congruenza (tutti i vincoli reali sono stati mantenuti), ma non l'equilibrio (per tener bloccati i nodi occorre applicare ai nodi stessi forze e/o coppie che sono diverse da quelle reali)

Ritroviamo il sistema effettivo applicando al sistema principale gli spostamenti e/o rotazioni reali ξ_i dei nodi che abbiamo bloccato.



Come determino le X_i?

Impongo che producano nei punti del sistema principale dove abbiamo soppresso vincoli spostamenti e/o rotazioni che sommati a quelli provocati dal carico, ripristino i cedimenti reali (noti) di quei punti. Tutti questi spostamenti e/o rotazioni si calcolano su un sistema che si sa risolvere (il sistema principale isostatico).

Quindi le equazioni determinatrici delle X_i sono equazioni di congruenza.

Come determino le ξ_i?

Impongo che per produrli si applichino nei nodi del sistema principale forze e/o coppie che, sommate a quelle provocate dal carico, ripristinino le forze e/o coppie esterne realmente agenti sui nodi stessi (note).

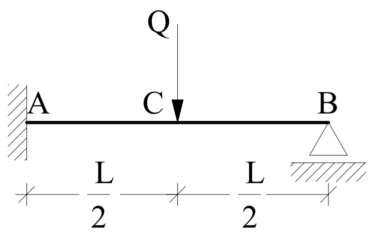
Tutte queste forze e/o coppie si calcolano su un sistema che si sa risolvere (il sistema principale formato da un insieme di travi incastrate).

Quindi le equazioni determinatrici delle ξ_i sono equazioni di equilibrio.

Calcolate le ξ_i, si conoscono spostamenti e rotazioni agli estremi di tutte le travi e quindi con le formule della trave incastrata con cedimenti e rotazioni dei vincoli noti si possono determinare le N, M, T.

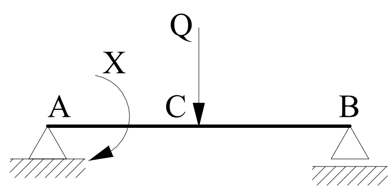
METODO DELLE FORZE – ESEMPI

Esempio 1

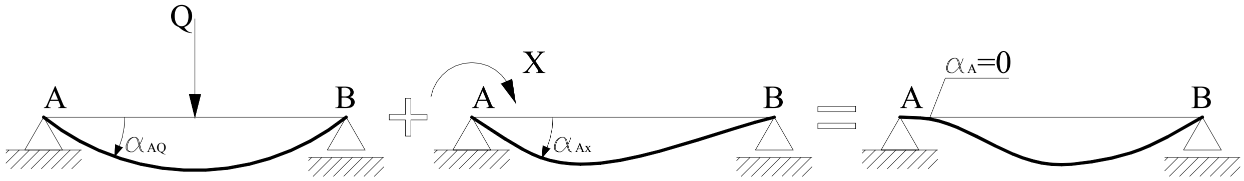


EJ = cost.

Sistema principale:



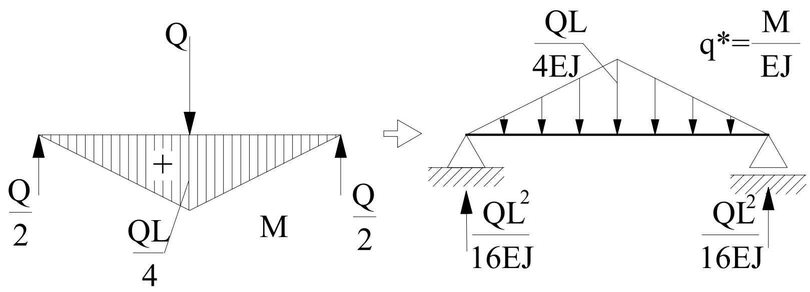
Valutazione dell'iperstatica X : la rotazione α_A del sistema deve essere zero



$$\alpha_A = \alpha_{AQ} + \alpha_{AX} = 0$$

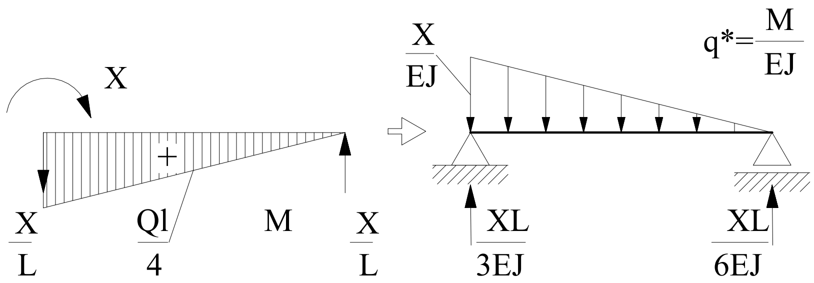
N.B. α_{AX} e quindi X devono evidentemente avere verso opposto (troveremo $X < 0$)

- Determinazione di α_{AQ}, ad esempio con le analogie di Mohr (è il taglio in A della trave ausiliaria)



$$\alpha_{AQ} = T_A^* = \frac{QL^2}{16EJ}$$

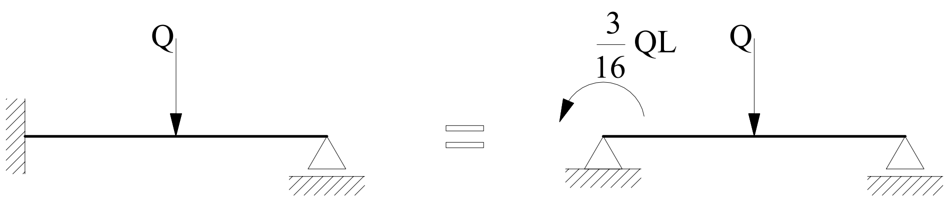
- Determinazione di α_{AX} nello stesso modo



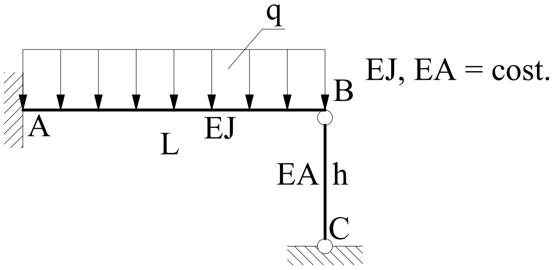
$$\alpha_{AX} = T_A^* = \frac{XL}{3EJ}$$

$$0 = \alpha_A = \alpha_{AQ} + \alpha_{AX} = \frac{QL^2}{16EJ} + \frac{XL}{3EJ}; \qquad \boxed{X = -\frac{3}{16}QL} \quad (5)$$

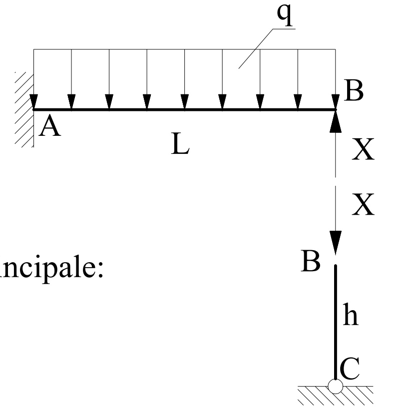
quindi:



Esempio 2



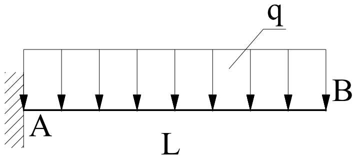
Sistema principale:



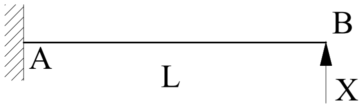
Determinazione dell'iperstatica X:

l'abbassamento dell'estremo B della mensola caricata da q e da X deve essere uguale all'abbassamento dell'estremo B dell'asta caricata da X.

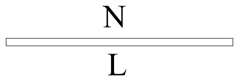
- Mensola: da esercizi precedenti:



$$\boxed{\eta^{\mathrm{I}}_{\mathrm{Bq}} = \frac{qL^4}{8EJ}} \quad (\downarrow)$$

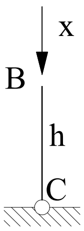


$$\boxed{\eta^{\mathrm{I}}_{\mathrm{BX}} = \frac{XL^3}{3EJ}} \quad (\uparrow)$$

- Asta: 

ricordiamo che in una trave caricata assialmente e di luce L, la dilatazione $\varepsilon = \frac{dL}{L}$ vale $\frac{N}{EA}$.

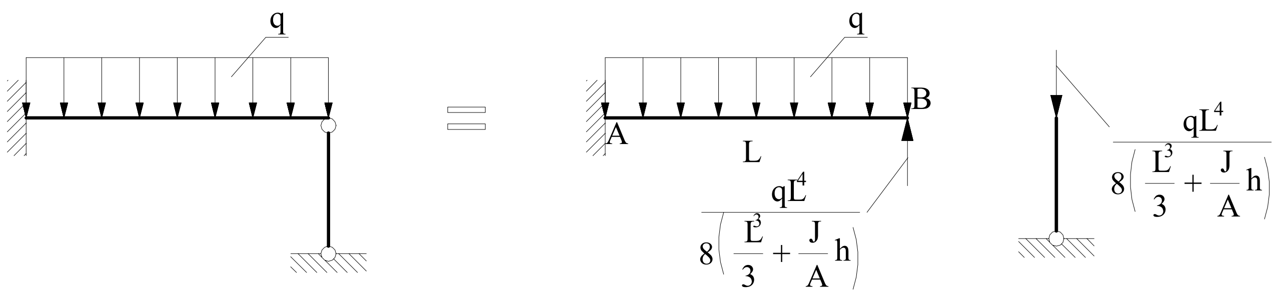
Nel nostro caso (in cui la lunghezza è denominata h e non L), l'accorciamento complessivo Δh vale allora $\varepsilon \cdot h = \frac{Nh}{EA}$

Quindi: 

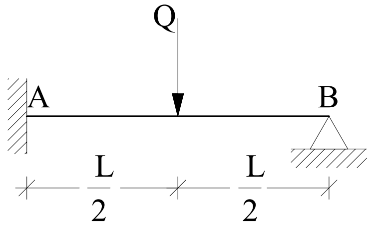
$$\boxed{\eta^{\mathrm{II}}_{\mathrm{BX}} = \Delta h = \frac{Xh}{EA}}$$

$$\eta^{\mathrm{I}}_{\mathrm{Bq}} - \eta^{\mathrm{I}}_{\mathrm{BX}} = \eta^{\mathrm{II}}_{\mathrm{BX}}; \quad \frac{qL^4}{8EJ} - \frac{XL^3}{3EJ} = \frac{Xh}{EA}; \quad \boxed{X = \frac{qL^4}{8\left(\frac{L^3}{3} + \frac{J}{A}h\right)}}$$

Quindi:

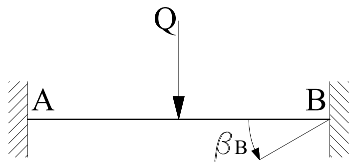


METODO DEGLI SPOSTAMENTI - ESEMPIO

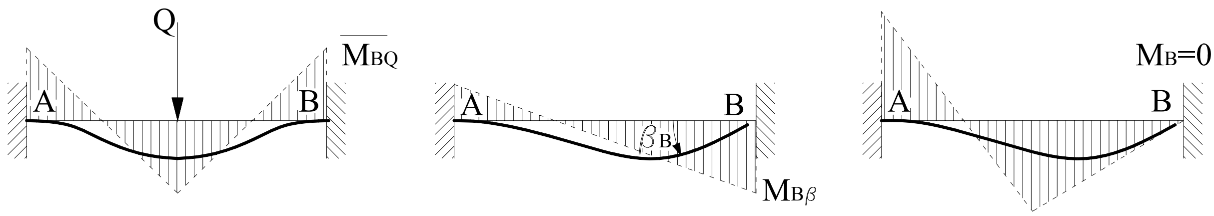


EJ = cost.

Sistema principale:



Valutazione della rotazione β_B : il momento M_B del sistema principale in B deve essere zero



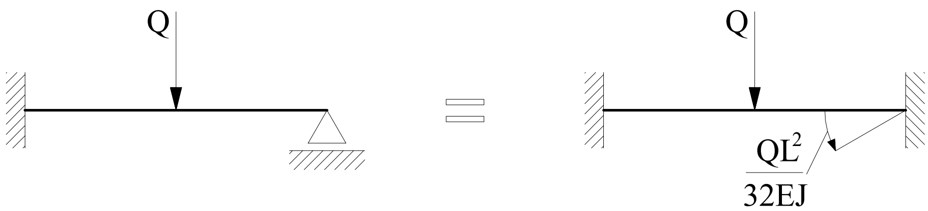
$$M_B = \overline{M}_{BQ} + M_{B\beta} = 0$$

Per determinare $\overline{M}_{BQ}, M_{B\beta}$, facciamo riferimento alle formule della trave incastrata che supponiamo nota

- Determinazione di $\overline{M}_{BQ}$: $\overline{M}_{BQ} = \dfrac{QL}{8}$
- Determinazione di $M_{B\beta}$: $M_{B\beta} = \dfrac{4EJ}{L} B_\beta$

$$0 = M_B = \overline{M}_{BQ} + M_{B\beta} = -\frac{QL}{8} + \frac{4EJ}{L}\beta_B \qquad \boxed{\beta_B = -\frac{QL^2}{32EJ}}$$

Quindi:



Ancora con le formule della trave incastrata, posso ora determinare M_A

$$M_A = \overline{M}_{AQ} - \frac{2EJ}{L}\beta_B = -\frac{QL}{8} - \frac{2EJ}{L} \cdot \frac{QL^2}{32EJ} = -\frac{3}{16}QL$$