

Figura 3.6: Grafico delle frequenze in funzione dei nodi in tubo aperto

Un fit lineare conferma la relazione suddetta, con un coefficiente angolare pari a:

$$m = 342 \pm 2.$$

Tale valore è compatibile con il valore atteso della velocità del suono.

3.3 Diapason

Il diapason è un importante sorgente sonora, utilizzata in passato per accordare gli strumenti. Il termine deriva dal greco $\delta\iota\acute{\alpha}\ \pi\alpha\sigma\hat{\omega}\nu$ e stava ad indicare l'intervallo di ottava, che abbraccia tutte le note. La sua peculiarità è quella di produrre un suono molto puro, privo di frequenze armoniche superiori, quando viene percosso. Di conseguenza, ogni diapason genera suoni di frequenza determinata e più diapason diversi tra loro possono fornire tutte le note della scala musicale.

3.3.1 Modello teorico

Il diapason consiste in una specie di forca di acciaio con due rebbi, uniti da un manico cilindrico, che vengono posti in vibrazione per urto; generalmente il diapason viene montato sopra una cassetta di risonanza affinché il suono prodotto

risulti più intenso.

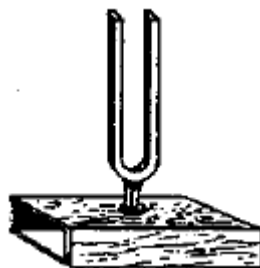


Figura 3.7: Diapason con cassetta di risonanza

Un singolo rebbio è equivalente ad una sbarra con un estremo fisso. Infatti, considerata una sbarra di lunghezza L , avente una sezione S , denotiamo con x le posizioni misurate lungo la sbarra e con y gli spostamenti trasversi della sbarra dalla sua normale configurazione. Quando la sbarra viene flessa, la parte più esterna si allunga mentre quella più interna risulta compressa. In mezzo, c'è un asse neutrale, la cui lunghezza rimane invariata.

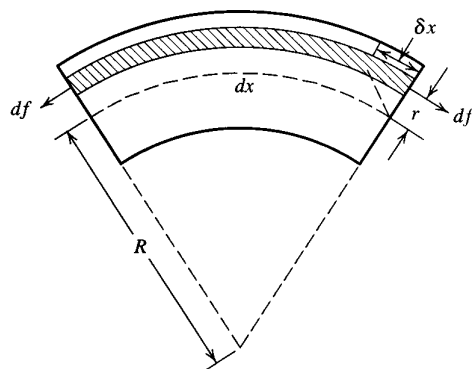


Figura 3.8: Flessione di una sbarra

Consideriamo un segmento di lunghezza dx e supponiamo che la flessione della sbarra è misurata dal raggio di curvatura R dell'asse neutrale. Sia $\delta x = (\partial\xi/\partial x)dx$ l'incremento di lunghezza, dovuto alla flessione, di un filamento della

sbarra localizzato a una distanza r dall'asse neutrale. Allora la forza longitudinale df è data da:

$$df = -EdS \frac{\delta x}{dx} = -EdS \frac{\partial \xi}{\partial x}, \quad (3.16)$$

dove dS è l'area a sezione trasversale del filamento e E è il modulo di Young. Poichè $\frac{dx + \delta x}{R + r} = \frac{dx}{R}$, si ha: $\frac{\delta x}{dx} = \frac{r}{R}$. Sostituendo nella (3.16), si ottiene:

$$df = -\left(\frac{E}{R}\right)r dS$$

La forza totale longitudinale $f = \int df$ è zero, siccome le forze negative sull'asse neutrale sono equilibrate da quelle positive al di sotto di esso. Tuttavia, è presente nella sbarra un momento flettente:

$$M = \int r df = -\frac{E}{R} \int r^2 dS.$$

Si definisce una costante K detta *raggio di girazione* della sezione trasversale tale che:

$$K^2 = \frac{1}{S} \int r^2 dS,$$

dove $S = \int dS$ è la sezione trasversale totale. Il momento flettente è quindi:

$$M = -\frac{ESK^2}{R}$$

Il raggio di curvatura non è in generale una costante ma piuttosto una funzione della posizione lungo l'asse neutrale. Se gli spostamenti y della sbarra sono limitati a piccoli valori, $\partial y / \partial x \ll 1$, allora si può approssimare:

$$R = \frac{[1 + (\partial y / \partial x)^2]^{\frac{3}{2}}}{\partial^2 y / \partial x^2} \approx \frac{1}{\partial^2 y / \partial x^2}$$

Pertanto, risulta:

$$M = -ESK^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

L'effetto di distorsione della sbarra non è prodotto solo da momenti flettenti ma anche da forze di taglio.

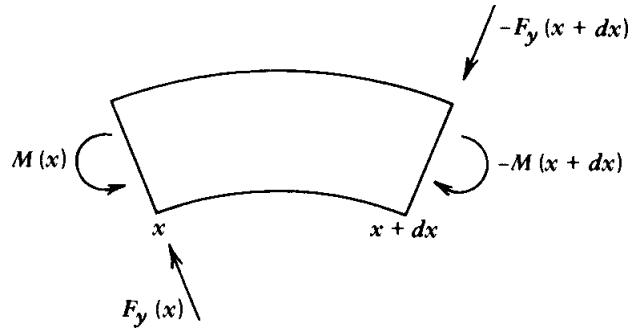


Figura 3.9: Momenti flettenti e forze di taglio

Consideriamo una forza di taglio verso l'alto F_y agente sull'estremo sinistro del segmento dx positiva.

Allora la forza di taglio associata agente sull'estremo destro del segmento deve essere rivolta verso il basso, ed è conseguentemente negativa. Prendendo momenti sull'estremo sinistro del segmento, abbiamo:

$$M(x) - M(x + dx) = F_y(x + dx)dx$$

Per segmenti di piccola lunghezza dx , $M(x+dx)$ e $F_y(x+dx)$ può essere sviluppato in serie di Taylor rispetto a x e questo porta

$$F_y = -\frac{\partial M}{\partial x} = ESK^2 \left(\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} \right)$$

dove i termini di secondo ordine sono esclusi. La forza rivolta verso l'alto dF_y agente sul segmento dx è allora data da:

$$dF_y = F_y(x) - F_y(x + dx) = -\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} \right) dx = -ESK^2 \left(\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} \right) dx$$

Per la seconda legge di Newton, questa forza fornirà alla massa $\rho S dx$ del segmento un'accelerazione verso l'alto $\partial^2 y / \partial t^2$ quindi l'equazione del moto è:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -(Kv_s)^2 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4}$$

dove $v_s^2 = \frac{E}{\rho}$. Essa è un'equazione differenziale del quarto ordine, che comporta che le onde trasversali non viaggiano lungo la sbarra con una velocità costante

v_s e una forma invariata. Supponiamo che tale equazione possa essere risolta attraverso la separazione delle variabili e scriviamo lo spostamento trasversale complesso come

$$y(x, t) = \Psi(x)e^{i\omega t}$$

La sostituzione elimina la funzione esponenziale del tempo, lasciando una nuova equazione differenziale in Ψ :

$$\frac{d^4\Psi}{dx^4} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 \Psi$$

dove:

$$c^2 = \omega K \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (3.17)$$

Se $\Psi = e^{\gamma x}$, si ha:

$$\gamma^4 e^{\gamma x} = \left(\frac{\omega}{c}\right)^4 e^{\gamma x},$$

che ammette quattro soluzioni, due reali e due complesse e dunque la soluzione completa è la somma di quattro termini:

$$\begin{aligned} \Psi &= Ae^{\frac{\omega x}{c}} + Be^{-\frac{\omega x}{c}} + Ce^{\frac{i\omega x}{c}} + De^{-\frac{i\omega x}{c}}, \\ y(x, t) &= e^{i\omega t} \left(Ae^{\frac{\omega x}{c}} + Be^{-\frac{\omega x}{c}} + Ce^{\frac{i\omega x}{c}} + De^{-\frac{i\omega x}{c}} \right), \end{aligned}$$

dove A , B , C e D sono costanti arbitrarie e il rapporto $\frac{\omega}{c}$ è sia un numero d'onda sia un coefficiente di attenuazione spaziale. Tale soluzione rappresenta disturbi di flessione di due tipi:

1. due onde viaggianti, ognuna che si propaga con una velocità di fase c proporzionale a $\sqrt{\omega}$;
2. due oscillazioni stazionarie che sono spazialmente attenuate ognuna con un coefficiente dipendente da $\sqrt{\omega}$.

Quando onde di frequenze differenti viaggiano con differenti velocità di fase si parla di *dispersione*. Le componenti di frequenze più alte corrono maggiormente

rispetto a quelle di frequenze più basse, alterando la forma dell'onda. Pertanto una sbarra vibrante rappresenta un mezzo dispersivo per le onde trasversali.

L'effettiva soluzione è la parte reale di (3.18). Utilizzando le identità iperbolica e trigonometrica si ha:

$$y = \cos(\omega t + \phi) \left[A \cosh \frac{\omega x}{c} + B \sinh \frac{\omega x}{c} + C \cos \frac{\omega x}{c} + D \sin \frac{\omega x}{c} \right], \quad (3.19)$$

dove A , B , C e D sono costanti reali e sono determinate dalle condizioni al contorno. Nel caso di una sbarra di lunghezza L , fissata ad un estremo, le condizioni al contorno sono:

1.

$$y(x, t) \Big|_{x=0} = 0 \quad e \quad \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=0} = 0,$$

che forniscono la prima condizione:

$$A + C = 0,$$

$$B + D = 0,$$

quindi la soluzione generale (3.19) diventa:

$$y(x, t) = \cos(\omega t + \phi) \left[A \left(\cosh \frac{\omega x}{c} - \cos \frac{\omega x}{c} \right) + B \left(\sinh \frac{\omega x}{c} - \sin \frac{\omega x}{c} \right) \right].$$

2.

$$y(x, t) \Big|_{x=L} = 0 \quad e \quad \frac{\partial y}{\partial x}(x, t) \Big|_{x=L} = 0,$$

in corrispondenza delle quali, le condizioni al contorno diventano

$$A \left(\cosh \frac{\omega L}{c} - \cos \frac{\omega L}{c} \right) = -B \left(\sinh \frac{\omega L}{c} - \sin \frac{\omega L}{c} \right),$$

$$A \left(\sinh \frac{\omega L}{c} + \sin \frac{\omega L}{c} \right) = -B \left(\cosh \frac{\omega L}{c} - \cos \frac{\omega L}{c} \right).$$

Queste equazioni possono avere una soluzione comune solo per certi valori di ω . Pertanto rapportando le due equazioni tra loro e ricordando le relazioni: $\sin^2 x + \cos^2 x = \sinh^2 x - \cosh^2 x = 1$ si ottiene:

$$\cosh\left(\frac{\omega L}{c}\right) \cos\left(\frac{\omega L}{c}\right) = -1.$$

Utilizzando una tecnica numerica, poichè il coseno iperbolico cresce come $e^{\frac{\omega L}{c}}$, si ottiene che il coseno deve avvicinarsi a zero per argomenti più grandi di π . Le soluzioni dunque sono:

$$\frac{\omega L}{c} = (1.194, 2.988, 5, 7, \dots) \frac{\pi}{2}.$$

Sostituendo il valore di v nella precedente relazione, si ottiene:

$$\omega = (1.194^2, 2.988^2, 5^2, 7^2, \dots) \frac{\pi^2 K}{4L^2} \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

Il parametro ω rappresenta la frequenza angolare in radianti al secondo ed è legata alla frequenza in Hertz dalla relazione:

$$\nu_n = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Pertanto, le frequenze sono pari:

$$\nu_n = \left(\frac{\pi K}{8L^2}\right) \sqrt{\frac{E}{\rho}} [1.194^2, 2.988^2, 5^2, 7^2, \dots, (2n-1)^2], \quad n \geq 3 \quad (3.22)$$

Per una sbarra di sezione rettangolare il raggio di girazione è fornito da:

$$K = \frac{s}{\sqrt{12}},$$

dove s è lo spessore della sbarra nella direzione di vibrazione. Il fattore:

$$\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

è la velocità del suono v_s nel mezzo, che per l'acciaio vale: $v_s \cong 5250 \text{ ms}^{-1}$.