

DIAGONALIZZAZIONE IN \mathbb{R}^n

Autovalori, autovettori e autospazi per matrici reali ed endomorfismi di \mathbb{R}^n .
Diagonalizzazione di matrici reali, su \mathbb{R} e su \mathbb{C} . Endomorfismi semplici di \mathbb{R}^n .

Esercizio 1 *Provare che le seguenti matrici hanno gli stessi autovalori ma autospazi associati differenti:*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2 *Trovare gli autovalori della matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ e quelli della matrice $A + 2I$. Qual è la relazione tra gli autovalori trovati? Dopo aver calcolato gli autospazi delle due matrici, stabilirne la relazione esistente.*

Generalizzare l'osservazione per una generica matrice quadrata $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ e per la matrice $A + rI$ con $r \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3 *Data la matrice*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

verificare che l'autospazio di A è contenuto in quello di A^2 .

Più in generale, provare che se λ è un autovalore di una matrice quadrata $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ con autospazio associato V , allora λ^2 è un autovalore di A^2 e che il relativo autospazio W contiene V .

Generalizzare il risultato per potenze A^k con k qualsiasi.

Esercizio 4 *Si consideri l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da*

$$f(x, y, z) = (x + y - z, -x + 3y + z, -x + y + z).$$

- 1) *Verificare che $X = (1, 3, 1)$ è autovettore di f e calcolarne il relativo autovalore.*
- 2) *Stabilire se lo stesso vettore è un autovettore anche per l'endomorfismo $3\text{id} - f$ (dove id è l'endomorfismo identico di \mathbb{R}^3). In caso affermativo, qual è il suo autovalore?*
- 3) *Calcolare gli autovalori e gli autospazi di f .*
- 4) *Stabilire se f è semplice e, in caso affermativo, determinare una base di \mathbb{R}^3 di autovettori di f .*

Esercizio 5 *Data la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & -1 \\ 9 & 9 & -2 \end{pmatrix}$, calcolarne autovalori, autovettori ed una base per ogni suo autospazio. Dire se A è diagonalizzabile su \mathbb{R} .*