Lezioni del Corso di FLUIDODINAMICA

Prof. Florinda Capone

Anno Accademico 2009-2010

PARTE I

CONTINUI FLUIDI NON POLARI

1 Preliminari

Sia $\mathcal{S}$ un sistema materiale in moto. Per studiare il moto di $\mathcal{S}$:

i) si puó decidere di effettuare una schematizzazione particellare di $\mathcal{S}$. In tal caso il modello utilizzato risulta tanto più aderente alla realtà quanto più alto é il numero di particelle considerate. D'altra parte, peró, quanto più alto é il numero di particelle considerate, tanto più la risoluzione del problema si complica;

ii) si puó pensare di rappresentare $\mathcal{S}$ come sistema continuo. Questo equivale ad identificare $\mathcal{S}$ con un dominio lineare, superficiale o di volume.

Nel seguito, si fará riferimento alla schematizzazione di cui al punto ii)

Siano: $\mathcal{E}^3_+$ uno spazio affine di $I\!R^3$ tridimensionale e $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ un riferimento ortonormale, levogiro e fisso di versori, orientato positivamente, in cui si vuol descrivere il moto di $\mathcal{S}$; D la regione rappresentante il dominio geometrico occupato dal sistema $\mathcal{S}$; C_* una configurazione di riferimento per $\mathcal{S}$, nella quale $P_* \in \mathcal{S}$ risulta individuato dalle coordinate (y_1, y_2, y_3); $C(t)$ la configurazione all'istante t di $\mathcal{S}$, in cui $P \in \mathcal{S}$ ha come coordinate (x_1, x_2, x_3). Determinare il moto di $\mathcal{S}$ equivale a determinare le funzioni:

$$x_i = x_i(y_1, y_2, y_3, t) \qquad (i = 1, 2, 3)\,. \tag{1}$$

Da (3) si deduce che:

$$v_i = \frac{\partial x_i}{\partial t}\,, \qquad a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{2}$$

Inoltre, per quanto riguarda la corrispondenza (3), si supporranno valide le seguenti ipotesi:

1) Per ogni fissato intervallo $[t', t'']$:

$$x_i \in C^2(C_* \times [t', t'']), \qquad i = 1, 2, 3; \tag{3}$$

2) C_* e $C(t)$ risultano omeomorfi $\forall t$, i.e.

$$I(\mathbf{y},t) = det \left\| \frac{\partial x_i}{\partial y_j} \right\| \neq 0, \qquad i, j = 1, 2, 3 \tag{4}$$

essendo I lo Jacobiano della trasformazione (3).

Le suddette ipotesi equivalgono a richiedere che il sistema in moto abbia particolari caratteristiche fisiche. In particolare, la (3) prevede lo studio di moti privi di lacerazioni o urti, mentre la (4) traduce il principio di impenetrabilità della materia.

Per studiare il moto di $\mathcal{S}$ si puó seguire il *punto di vista lagrangiano* oppure il *punto di vista euleriano* (o locale).

Seguire il *punto di vista lagrangiano* equivale a considerare osservatori mobili solidali alle particelle del sistema, i quali descrivono come variano nel tempo le quantitá fisiche relative a ciascuna particella. Pertanto, indicata con q una generica grandezza fisica espressa in forma lagrangiana, sussiste la seguente definizione

Definizione 1 - *Si definisce derivata lagrangiana o totale di q la quantità*

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = \frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x_i}\frac{\partial x_i}{\partial t} = \frac{\partial q}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla q\,. \tag{5}$$

La derivata lagrangiana é eseguita pensando le $x_i = x_i(y_1, y_2, y_3, t)$ e poi successivamente si eliminano le y_i pensando $y_i = y_i(x_1, x_2, x_3, t)$.

Seguire il *punto di vista euleriano* (o locale) equivale a considerare osservatori fissi nello spazio del moto, i quali descrivono le variazioni nel tempo delle grandezze fisiche associate alle particelle che, istante per istante, transitano per il posto in cui si trova il singolo osservatore. Pertanto, indicata con $q(\mathbf{x}, t)$ una generica grandezza fisica, sussiste la seguente definizione.

Definizione 2 - *Si definisce derivata euleriana o locale di q la quantità*

$$\frac{\partial q}{\partial t} \tag{6}$$

In seguito, si seguirá il punto di vista euleriano.

Sussiste la seguente proprietá.

Proposizione 1 - *La derivata lagrangiana di I, espressa in forma euleriana, é data da*

$$\dot{I} = I(\nabla\cdot\mathbf{v}) \tag{7}$$

Dimostrazione. Sviluppando il determinante con la regola dei complementi algebrici, i.e. $I = A^i_j\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$, in cui A^i_j è il complemento algebrico dell' elemento di posto (i,j) ed essendo

$$\dot{I} = \left[\frac{\partial I(\mathbf{y}, t)}{\partial t}\right]_{y=y(\mathbf{x},t)}\,, \tag{8}$$

si ha:

$$\left[A^i_j\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right]_{y=y(\mathbf{x},t)} = \left[A^i_j\frac{\partial v_i}{\partial y_j}\right]_{y=y(\mathbf{x},t)} = \left[A^i_j\frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}\frac{\partial x_\alpha}{\partial y_j}\right] = \frac{\partial v_i}{\partial x_\alpha}\delta_{i\alpha}I = I(\nabla\cdot\mathbf{v})\,.$$

Teorema 1 (Teorema di Reynolds) - *Indicati con q una generica grandezza fisica (scalare o vettoriale) associata al moto di S e con b un dominio materiale, la variazione totale della grandezza q é data da:*

$$\frac{d}{dt}\int_b q\,db = \int_b (\dot{q} + q\nabla\cdot\mathbf{v})\,db\,. \tag{9}$$

Dimostrazione - Per dimostrare il teorema di Reynolds occorre osservare che il dominio b dipende dal tempo e pertanto, in virtú della (4), indicato con b_* la configurazione di riferimento di b, si ha:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_b q\,db &= \frac{d}{dt}\int_{b_*} qI\,db_* = \int_{b_*}(I\frac{\partial q}{\partial t} + q\dot{I})\,db_* = \\ &= \int_{b_*}(I\frac{\partial q}{\partial t} + q\,I\,\nabla\cdot\mathbf{v})\,db_* = \int_{b_*}(\frac{\partial q}{\partial t} + q\,\nabla\cdot\mathbf{v})I\,db_* = \\ &\int_b(\dot{q} + q\,\nabla\cdot\mathbf{v})\,db\,.\end{aligned} \tag{10}$$

Osservazione 1 - *L'interpretazione fisica del teorema di Reynolds é la seguente:"la variazione totale di una grandezza fisica associata al moto di $\mathcal{S}$ é pari alla somma della sua variazione interna per effetto di sorgenti e/o pozzi e del flusso di questa stessa quantità attraverso la frontiera". Infatti:*

$$\begin{aligned}\int_C(\dot{q} + q\nabla\cdot\mathbf{v})\,dC &= \int_C\frac{\partial q}{\partial t}\,dC + \int_C(\mathbf{v}\cdot\nabla q + q\,\nabla\cdot\mathbf{v})\,dC = \\ &= \int_C\frac{\partial q}{\partial t}\,dC + \int_C\nabla\cdot(q\mathbf{v})\,dC = \int_C\frac{\partial q}{\partial t}\,dC + \int_\Sigma q\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,d\sigma\,;\end{aligned} \tag{11}$$

da cui l'asserto.

2 Formulazione Locale delle Equazioni Cardinali della Meccanica per Sistemi Continui

Sia $\mathcal{S}$ un sistema continuo in moto nello spazio $\mathcal{E}_3$. Al fine di determinare le equazioni che reggono il moto di $\mathcal{S}$ in $\mathcal{E}_3$, si supponga che siano validi:

1. il principio di conservazione della massa
2. l'equazione di bilancio della quantità di moto
3. l'equazione di bilancio del momento della quantità di moto.

Per descrivere il moto di $\mathcal{S}$, seguendo il punto di vista euleriano (o locale), si va alla ricerca della formulazione locale del principio di conservazione della massa e delle equazioni di bilancio della quantitá di moto e di bilancio del momento della quantitá di moto. Le suddette formulazioni dovranno essere necessariamente verificate durante il moto del sistema $\mathcal{S}$, mentre non è detto che le stesse siano anche sufficienti, anzi, di solito non lo saranno.

1. Formulazione locale del Principio di Conservazione della Massa

Si definisce *massa del sistema* $\mathcal{S}$ la seguente quantità

$$m = \int_C \rho \, dC \tag{12}$$

essendo ρ (densitá del sistema $\mathcal{S}$) una funzione generalmente continua . Ammettere la validità del principio di conservazione della massa equivale ad ammettere che:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \Rightarrow \int_{C(t_1)} \rho \, dC = \int_{C(t_2)} \rho \, dC \, . \tag{13}$$

Applicando il teorema di Reynolds alla (13), si ottiene:

$$\frac{dm}{dt} = 0 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \int_C \rho \, dC = 0 \Leftrightarrow \int_C (\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v}) \, dC = 0 \tag{14}$$

da cui, punto per punto, si ha:

$$\dot{\rho} + \rho \, \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \, . \tag{15}$$

La (15) rappresenta la *formulazione locale del principio di conservazione della massa.*

2. Formulazione locale delle equazioni di Bilancio della Quantitá di Moto e di Bilancio del Momento della Quantitá di Moto

Per ottenere la formulazione locale dell'equazione di bilancio della quantitá di moto e dell'equazione di bilancio del momento della quantitá di moto, è necessario caratterizzare la generica sollecitazione agente sul sistema $\mathcal{S}$. A tal fine si supporrá che sul sistema continuo $\mathcal{S}$ agiscano *forze a distanza* e *forze di contatto.* Nel primo caso si tratta di forze di volume, che possono avere un raggio d'azione molto ampio (come ad esempio la forza gravitazionale). Per tali forze, indicati con $\mathbf{R}^{(d)}$, $\mathbf{M}_O^{(d)}$, rispettivamente, il risultante e il momento risultante (scelto come polo di riduzione dei momenti il punto O), si ha:

$$\mathbf{R}^{(d)} = \int_C \rho \mathbf{F} \, dC \, , \qquad \mathbf{M}_O^{(d)} = \int_C [(P - O) \times \rho \mathbf{F}] \, dC \tag{16}$$

essendo $\rho\mathbf{F}$ la *forza specifica a distanza.* Durante il resto della trattazione, si trascureranno le eventuali forze a distanza dovute ad elementi interni al

sistema, mentre si terrá conto delle forze a distanza di tipo esterno.
Le forze di contatto, invece, sono in genere di tipo molecolare ed hanno un raggio d'azione molto piccolo, dell'ordine di 10^{-5} cm (ad es. le forze di adesione e coesione fra particelle). Si indicherá con $\mathbf{R}^{(c)}$ il risultante di tali forze, i.e.:

$$\mathbf{R}^{(c)} = \int_{\partial C} \boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P}, \mathbf{n}, \boldsymbol{t})\, \boldsymbol{d\sigma} \tag{17}$$

essendo $\phi(P, \mathbf{n}, t)$ la forza specifica di contatto che le particelle della superficie che guardano nel verso della normale positiva $\mathbf{n}$ esercitano sulle particelle della parte opposta. Pertanto si esclude l'esistenza di forze superficiali esterne al continuo. Inoltre verranno esclusi dalla successiva trattazione i cosiddetti *continui polari* o *continui alla Cosserat*, cioè quei continui le cui forze di contatto abbiano anche un momento risultante.

Teorema 2 (Teorema degli sforzi di Cauchy) - *In un continuo non polare, la forza specifica di contatto $\phi(P, \mathbf{n}, t)$ é data da:*

$$\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{P}, \mathbf{n}, \boldsymbol{t}) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{n}\,, \tag{18}$$

essendo $\mathbf{T}$ (Tensore degli sforzi di Cauchy) un tensore doppio.

Dimostrazione - Siano P un punto del continuo S, $\mathbf{n}$ una assegnata direzione e si considerino tre assi, mutuamente ortogonali, uscenti da P di versori $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Per descrivere lo sforzo in P, si consideri un elemento di superficie interna al continuo ed ortogonale ad $\mathbf{n}$, che disti $\delta > 0$ da P, in modo tale che il tetraedro di vertici P e le intersezioni del piano π - passante per P ed ortogonale a $\mathbf{n}$ - con gli assi di versori $\mathbf{e}_i\, (i = 1, 2, 3)$, sia tutto interno all'elemento di continuo considerato. Siano: β_2 la faccia PA_1A_3 la cui normale esterna è $-\mathbf{e}_2$, β_3 la faccia PA_1A_2 la cui normale esterna è $-\mathbf{e}_3$, β_1 la faccia PA_2A_3 la cui normale esterna è $-\mathbf{e}_1$, β la faccia $A_1A_2A_3$ la cui normale esterna è $-\mathbf{n}$.
Indicato con b il tetraedro precedentemente introdotto, si ha:

$$\int_{\partial b} \boldsymbol{\phi}(P, \mathbf{n}, t)\, d\sigma = \int_{\beta} \boldsymbol{\phi}\, d\sigma + \sum_{i=1}^{3} \int_{\beta_i} \boldsymbol{\phi}(P, \mathbf{n}, t)\, d\sigma. \tag{19}$$

Indicati con $|b|$ il volume del tetraedro, $|\beta|$ l'area della faccia $A_1A_2A_3$ del tetraedro, $|\beta_i|$ $(i = 1, 2, 3)$ l'area delle facce PA_lA_k, $l, k \in \{1, 2, 3\}$, $l \neq k \neq i$ ed essendo $|b| = (|\beta|\, \delta)/3$, moltiplicando ambo i membri della (19) per $1/\,|\beta|$ si ottiene:

$$\frac{1}{|\beta|} \int_{\partial b} \boldsymbol{\phi}\, d\sigma = \frac{1}{|\beta|} \int_{\beta} \boldsymbol{\phi}\, d\sigma \; + \frac{1}{|\beta|} \sum_{i=1}^{3} \int_{\beta_i} \boldsymbol{\phi}\, d\sigma \tag{20}$$

i.e.:

$$\frac{\delta}{3\,|b|}\int_{\partial b}\boldsymbol{\phi}\,d\sigma=\frac{1}{|\beta|}\int_{\beta}\boldsymbol{\phi}\,d\sigma\;+\frac{1}{|\beta|}\sum_{i=1}^{3}\int_{\beta_i}\boldsymbol{\phi}\,d\sigma\,. \tag{21}$$

Essendo

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{\delta}{3\,|b|}\int_{\partial b}\boldsymbol{\phi}\,d\sigma\right)=0\,, \tag{22}$$

dalla (20) si ottiene

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\frac{1}{|\beta|}\int_{\beta}\boldsymbol{\phi}\,d\sigma\;+\frac{1}{|\beta|}\sum_{i=1}^{3}\int_{\beta_i}\boldsymbol{\phi}\,d\sigma\right)=0 \tag{23}$$

i.e.:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{|\beta|}\int_{\beta}\boldsymbol{\phi}\,d\sigma=-\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{|\beta|}\sum_{i=1}^{3}\int_{\beta_i}\boldsymbol{\phi}\,d\sigma\,. \tag{24}$$

Ricordando che $|\beta|$ può essere espressa in termini di $|\beta_i|$ attraverso il coseno direttore di $\mathbf{n}$ secondo $\mathbf{e}_i$, i.e. $1/\,|\beta|=(|n_i|)/(|\beta_i|)$, la (24) diventa:

$$\lim_{\delta\to 0}\frac{1}{|\beta|}\int_{\beta}\phi d\sigma=-\lim_{\delta\to 0}\sum_{i=1}^{3}\frac{|n_i|}{|\beta_i|}\int_{\beta_i}\phi\,d\sigma \tag{25}$$

da cui, in virtú del teorema della media integrale, si ottiene

$$\phi(P,\mathbf{n},t)=-\sum_{i=1}^{3}n_i\phi(P,-\mathbf{e}_i,t)\,. \tag{26}$$

Nell'ipotesi che valga il principio di azione e reazione, si ha

$$\phi(P,\mathbf{e}_i,t)=-\phi(P,-\mathbf{e}_i,t) \tag{27}$$

e quindi la (26) diventa:

$$\phi(P,\mathbf{n},t)=\sum_{i=1}^{3}\phi(P,\mathbf{e}_i,t)n_i \tag{28}$$

ed il teorema é completamente dimostrato, ponendo

$$\phi(P,\mathbf{e}_i,t)=T_{ij}\mathbf{e}_j\,. \tag{29}$$

Postulare la validità delle equazioni di bilancio della quantitá di moto e del momento della quantitá di moto, equivale ad assumere la validitá del seguente assioma.

Assioma 1 - *Per ogni campo materiale C devono essere valide, ad ogni istante, le seguenti equazioni:*

$$\begin{cases} \displaystyle\int_C \rho\mathbf{a}\, dC = \mathbf{R}^{(e)} \\ \\ \displaystyle\int_C (P-T)\times\rho\mathbf{a}\, dC = \mathbf{M}_T^{(e)}\,, \end{cases} \tag{30}$$

essendo $\mathbf{R}^{(e)}$ il risultante delle forze esterne agenti sul continuo e $\mathbf{M}_T^{(e)}$ il momento risultante, rispetto al punto T, delle forze esterne agenti sul continuo.

Al fine di determinare la formulazione locale delle equazioni (30), nella classe dei continui non polari, la $(30)_1$ si specifica come segue

$$\int_C \rho\mathbf{a}\, dC = \int_C \rho\mathbf{F}\, dC + \int_{\partial C} \phi(Q,\mathbf{n},t)\, d\sigma \tag{31}$$

i.e.:

$$\int_C \rho\mathbf{a}\, dC = \int_C \rho\mathbf{F}\, dC + \int_{\partial C} \mathbf{n}\cdot\mathbf{T}\, d\sigma\,, \qquad \forall C\,. \tag{32}$$

In virtú del teorema della divergenza, si ottiene:

$$\int_C \rho\mathbf{a}\, dC = \int_C \rho\mathbf{F}\, dC + \int_C \nabla\cdot\mathbf{T}\, dC \tag{33}$$

i.e.:

$$\int_C (\rho\mathbf{a} - \rho\mathbf{F} - \nabla\cdot\mathbf{T}) dC = 0\,. \tag{34}$$

Pertanto la *formulazione locale del'equazione di bilancio della quantitá di moto* é la seguente

$$\rho\mathbf{a} = \rho\mathbf{F} + \nabla\cdot\mathbf{T}\,. \tag{35}$$

Si consideri ora la $(30)_2$. Nella classe dei continui non polari, si ha:

$$\mathbf{M}_T^{(e)} = \int_C (P-T)\times\rho\mathbf{F}\, dC + \int_{\partial C} (Q-T)\times\phi\, d\sigma\,. \tag{36}$$

In virtú del teorema di Cauchy, essendo:

$$\phi(Q,\mathbf{n},t) = \sum_{i=1}^{3} n_i\phi(Q,e_i,t) = \sum_{i=1}^{3} n_i\phi_i \tag{37}$$

applicando il teorema della divergenza, si ottiene:

$$\int_{\partial C}[(Q-T)\times\sum_{i=1}^{3}n_i\phi_i]\,d\sigma=\sum_{i=1}^{3}\int_{\partial C}(Q-T)\times n_i\phi_i\,d\sigma=$$

$$=\int_C\nabla\cdot[(P-T)\times\sum_{i=1}^{3}\phi_i]dC= \tag{38}$$

$$=\sum_{i=1}^{3}\int_C\mathbf{e}_i\times\phi_i dC+\int_C(P-T)\times\nabla\cdot\mathbf{T}\,dC\,.$$

Sostituendo la (38) nella (36), si ha:

$$\int_C(P-T)\times\rho\mathbf{a}\,dC=\int_C(P-T)\times\rho\mathbf{F}\,dC\;+\sum_{i=1}^{3}\int_C(\mathbf{e}_i\times\phi_i)\,dC+$$
$$+\int_C(P-T)\times\nabla\cdot\mathbf{T}\,dC\,, \tag{39}$$

i.e.:

$$\int_C(P-T)\times[\rho\mathbf{a}-\rho\mathbf{F}-\nabla\cdot\mathbf{T}]\,dC=\int_C(\mathbf{e}_i\times\phi_i)\,dC\,. \tag{40}$$

In virtú della formulazione locale dell'equazione di bilancio della quantitá di moto, la (40) diventa:

$$\sum_{i=1}^{3}\int_C(\mathbf{e}_i\times\phi_i)\,dC=0\;\Rightarrow\;\sum_{i=1}^{3}\mathbf{e}_i\times\phi_i=0\,. \tag{41}$$

Poichè $\boldsymbol{\phi}_i=\boldsymbol{\phi}(Q,\mathbf{e}_i,t)=T_{ij}\mathbf{e}_j$, si ha:

$$\sum_{i=1}^{3}\mathbf{e}_i\times T_{ij}\mathbf{e}_j=0\;\Leftrightarrow\;\sum_{i,j=1}^{3}T_{ij}\mathbf{e}_i\times\mathbf{e}_j=0 \tag{42}$$

i.e.:

$$(T_{12}-T_{21})\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_2+(T_{13}-T_{31})\mathbf{e}_1\times\mathbf{e}_3+(T_{23}-T_{32})\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3=0 \tag{43}$$

da cui necessariamente si ottiene

$$T_{12}=T_{21}\,,\quad T_{13}=T_{31}\,,\quad T_{23}=T_{32} \tag{44}$$

e quindi *il tensore degli sforzi di Cauchy é simmetrico.*

Mettendo insieme tutti i risultati finora esposti, il sistema che esprime la formulazione locale delle leggi della Meccanica per i sistemi continui non polari é il seguente

$$\begin{cases} \rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{T} \\ \\ \mathbf{T} = \mathbf{T}^t \\ \\ \dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \,. \end{cases} \tag{45}$$

Il sistema (45) – da un punto di vista matematico – é un sistema di 4 equazioni differenziali scalari in 10 incognite. Tale sistema, per quanto finora esposto, deve essere necessariamente verificato durante il moto di un (generico) continuo non polare.

Affinché, a partire dal sistema (45), si ottengano condizioni sufficienti per la determinazione del moto di un continuo non polare, é necessario ottenere il pareggiamento tra numero di equazioni e numero di incognite. Come primo passo, nella direzione del pareggiamento tra numero di equazioni e numero di incognite, si premettano le seguenti considerazioni energetiche.

3 Bilancio energetico: Formulazione locale dei Principi della Termodinamica

Per ottenere il **bilancio dell'energia cinetica**, si moltiplichi scalarmente la $(45)_1$ per $\mathbf{v}$, i.e.:

$$\rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} \,. \tag{46}$$

Ricordando che è sempre possibile decomporre un tensore doppio come somma di due tensori di cui uno simmetrico e l'altro antisimmetrico, si scriverá $\nabla \mathbf{v} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}$ (essendo D la parte simmetrica di $\nabla \mathbf{v}$ e Ω la sua parte antisimmetrica). Essendo $\nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) = (\nabla \cdot \mathbf{T}) \cdot \mathbf{v} + \mathbf{T} : \mathbf{D}$, la (46) diventa:

$$\rho \mathbf{a} \cdot \mathbf{v} = \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} + \nabla \cdot (\mathbf{T} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{T} : \mathbf{D} \,. \tag{47}$$

Per definizione di energia cinetica

$$T = \frac{1}{2} \int_C \rho v^2 \, dC \tag{48}$$

da cui

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2} \int_C [(\dot{\overbrace{\rho v^2}}) + (\rho v^2) \nabla \cdot \mathbf{v}] \, dC \tag{49}$$

Inoltre, essendo $\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} &= \frac{1}{2} \int_C \dot{\rho} v^2 \, dC \; + \int_C \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \, dC \; + \frac{1}{2} \int_C (\rho v^2) \nabla \cdot \mathbf{v} \, dC = \\ & -\frac{1}{2} \int_C (\rho v^2) \nabla \cdot \mathbf{v} \, dC + \int_C \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{a} \, dC \; + \frac{1}{2} \int_C (\rho v^2) \nabla \cdot \mathbf{v} \, dC \end{aligned} \tag{50}$$

i.e.

$$\frac{dT}{dt} = \int_C \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{a}\, dC \tag{51}$$

e quindi in virtú della (47):

$$\frac{dT}{dt} = \int_C \rho \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}\, dC + \int_{\partial C} \mathbf{n} \cdot T \ \cdot \mathbf{v}\, dC - \int_C \mathbf{T} : \mathbf{D}\, dC\,. \tag{52}$$

Pertanto, ammettendo la validità delle equazioni cardinali, é stato ottenuto il bilancio dell'energia cinetica come somma di tre termini: la potenza delle forze di volume, la potenza della forze di superficie e la potenza degli sforzi interni:

$$\frac{dT}{dt} = P^{(e)} + P^{(i)} \tag{53}$$

A questo punto c'é bisogno di introdurre la formulazione locale dei *principi della termodinamica.* A tal fine si assume che:

- sia valida *l'esperienza di Joule* : il calore fluisce come se fosse un fluido, quindi esistono delle trasformazioni in cui il lavoro si trasforma in calore e viceversa la cui costante non dipenda nè dalla trasformazione, nè dal materiale considerato;
- sia valida *l'ipotesi di Fourier* : il calore passa da un corpo più caldo ad uno più freddo;
- il calore si trasmette per *conduzione* e per *irraggiamento* ma non per convezione, quindi in assenza di trasporto di materia.

1. Formulazione locale del Primo Principio della Termodinamica

Sia E l' *energia interna* del sistema $\mathcal{S}$. Nell'ipotesi che essa sia una funzione assolutamente continua, indicata con ϵ l'*energia interna specifica o unitaria*, si ha

$$E = \int_C \rho\epsilon\, dC\,. \tag{54}$$

Si supponga ora l'esistenza di una funzione Q che rappresenti una potenza di origine non meccanica, dovuta a scambi di calore per la quale risulti

$$Q = \int_C \rho h\, dC + \int_{\partial C} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}\, d\sigma\,, \tag{55}$$

essendo $\mathbf{q}$ il vettore corrente termica. In particolare nella (55) il primo termine é dovuto alla presenza di sorgenti o pozzi di calore all'interno del dominio, mentre il secondo termine rende conto degli eventuali scambi di calore attraverso il contorno del dominio. Sussiste il seguente teorema.

Teorema 3 (Primo principio della termodinamica) - *È sempre possibile una trasformazione tra energia meccanica ed energia interna per la quale sussista il seguente bilancio:*

$$\frac{d(E+T)}{dt} = P^{(e)} + Q\,. \tag{56}$$

In virtú della (53), la (56) diventa:

$$\frac{dE}{dt} = Q - P^{(i)}\,. \tag{57}$$

Pertanto, applicando il Teorema di Reynolds ed il teorema della divergenza, da (52), (54) e (57), si ottiene

$$\int_C (\rho\dot{\epsilon} - \rho h + \nabla\cdot\mathbf{q} - \mathbf{T}:\mathbf{D})\,dC \tag{58}$$

i.e.:

$$\rho\dot{\epsilon} = \rho h - \nabla\cdot\mathbf{q} + \mathbf{T}:\mathbf{D} \tag{59}$$

che rappresenta la *formulazione locale del primo principio della termodinamica.*

3. Formulazione locale del Secondo Principio della Termodinamica

Sia H l'*entropia* del continuo S. Nell'ipotesi che H sia una funzione assolutamente continua, la sua rappresentazione integrale é la seguente

$$H = \int_C \rho\eta\,dC \tag{60}$$

essendo η l'*entropia specifica.* In letteratura sono note diverse formulazioni locali del secondo principio della termodinamica.
La *formulazione locale del Secondo Principio della Termodinamica* dovuta a **Clausius-Plank** é la seguente: in una trasformazione accade sempre che

$$\rho\dot{\eta} \geq \frac{\rho h - \nabla\cdot\mathbf{q}}{\theta}\,. \tag{61}$$

La *formulazione locale del Secondo Principio della Termodinamica* dovuta a **Clausius-Duhem** é la seguente: in una trasformazione accade sempre che

$$\rho\dot{\eta} \geq \frac{\rho h}{\theta} - \nabla\cdot\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right)\,. \tag{62}$$

Osservazione 2 . *Si può dimostrare facilmente che la (61) implica la (62). Infatti:*

$$\frac{\rho h}{\theta} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) = \frac{\rho h}{\theta} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{\theta} + \frac{\mathbf{q} \cdot \nabla\theta}{\theta^2}$$

da cui, in virtú dell'ipotesi di Fourier: $\mathbf{q} = -k\nabla\theta$, $k =$ *cost.* > 0, *si ricava*

$$\frac{\rho h}{\theta} - \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) \leq \frac{\rho h}{\theta} - \frac{\nabla \cdot \mathbf{q}}{\theta}$$

e quindi l'asserto.

Aggiungendo al sistema (45) la formulazione locale del Primo Principio della Termodinamica e tenendo conto delle limitazioni fornite (al bilancio energetico) dalla formulazione locale del Secondo Principio della Termodinamica [1], si ottiene:

$$\begin{cases} \rho\mathbf{a} = \rho\mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{T} \\ \\ \dot{\rho} + \rho\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \\ \mathbf{T} = \mathbf{T}^t \\ \\ \rho\dot{\epsilon} = \rho h - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{T} : \mathbf{D}\,. \end{cases} \tag{63}$$

4 Casi di pareggiamento.

Saranno analizzati, di seguito, alcuni sistemi particolari per i quali il sistema (63) comporta il pareggiamento tra numero di equazioni e numero di incognite.

1. **Fluidi perfetti isotermi.**

   Definizione 3 *Un fluido si dice* ***perfetto*** *quando gli unici sforzi possibili sono puramente normali:*

   $$\boldsymbol{\phi} = -p\mathbf{n}$$

   essendo p(P,t) la pressione.

   Ammettendo la validità del *postulato di Cauchy*, secondo cui la pressione è la stessa in tutte le direzioni, dalla definizione segue che $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$, ove $\mathbf{I}$ é il tensore doppio unitario. Pertanto, nel caso in esame, il sistema (63) consta di cinque equazioni nelle incognite: $\rho, \mathbf{v}, p$ e θ. Ma, in virtú dell'ipotesi di isotermia del fluido, θ é costante e pertanto nel caso di un fluido perfetto ed isotermo, si ottiene il pareggiamento.

[1] In particolare la formulazione locale del primo principio della termodinamica consente di aggiungere al sistema (45) una ulteriore equazione, ma anche un'ulteriore incognita: la temperatura assoluta $\theta > 0$.

2. **Fluidi perfetti a trasformazioni adiabatiche reversibili.**

Definizione 4 *Una trasformazione di dice* ***adiabatica*** *quando non ci sono scambi di calore con l'esterno, i.e.* $Q = 0$.

Nel caso in esame, essendo la trasformazione reversibile ed adiabatica, si ha: $\rho\dot{\eta} = \dfrac{\rho h - \nabla \cdot \mathbf{q}}{\theta} = 0$, i.e.$\eta = \text{cost.}$ e la $(63)_4$ diventa

$$\rho\dot{\epsilon} = \mathbf{T} : \mathbf{D} \qquad \Leftrightarrow \qquad \rho\dot{\epsilon} = -p\mathbf{I} : \mathbf{D} \Leftrightarrow \rho\dot{\epsilon} = -p\nabla \cdot \mathbf{v}\,.$$

Sia $\psi = \epsilon - \eta\theta$ l'**energia libera** del sistema $\mathcal{S}$. Dalla definizione di energia libera si ottiene:

$$\dot{\psi} = \dot{\epsilon} - \dot{\eta}\theta - \eta\dot{\theta} \qquad \Leftrightarrow \qquad \dot{\psi} + \eta\dot{\theta} = \dot{\epsilon} - \dot{\eta}\theta \tag{64}$$

e quindi, in viurtú della (2), si ha:

$$\dot{\psi} + \eta\dot{\theta} = -\frac{p}{\rho}\nabla \cdot \mathbf{v} \tag{65}$$

e per la $(63)_2$, essendo $\nabla \cdot \mathbf{v} = -\dfrac{\dot{\rho}}{\rho}$, la (65) diventa

$$\dot{\psi} = \frac{p}{\rho^2}\dot{\rho} - \eta\dot{\theta} \tag{66}$$

Poichè $\psi = \psi(\rho, \theta)$, si ha che $\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{\partial\psi}{\partial\rho}\dot{\rho} + \dfrac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta}$; pertanto, mettendo a confronto quest'espressione con la (66), si ottiene:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\rho} = \frac{p}{\rho^2} \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\eta \tag{67}$$

Nell'ipotesi che la trasformazione abbia calore specifico a volume costante non nullo, i.e.: $C_V \neq 0$, una ulteriore equazione costitutiva può essere ricavata a partire da $C_V = \dfrac{d\epsilon}{d\theta}$. Infatti ricordando la (67) e che $\epsilon = \psi + \eta\theta$, si ricava:

$$\frac{\partial\epsilon}{\partial\theta} = \frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\theta + \eta$$

e pertanto

$$C_V = \frac{\partial\eta}{\partial\theta}\theta =^{def} -\psi_{\theta\theta}\theta \tag{68}$$

Essendo per ipotesi $C_V \neq 0$, in virtú del teorema delle funzioni implicite, dalla (68) è possibile ricavare $\theta = \theta(\psi, \rho)$. Cosicché, aggiungendo queste ultime equazioni costitutive al sistema (63), si ottiene il pareggiamento.

PARTE II

FLUIDI VISCOSI

5 Fluidi viscosi

Si premetta la seguente definizione.

Definizione 5 - *Un fluido si dice* **viscoso** *se su di esso sono esercitati sia sforzi normali che sforzi tangenziali.*

Ci si propone ora di fornire una formulazione assiomatica che consenta di caratterizzare la risposta del materiale alle sollecitazioni esterne in modo tale da poter studiare, nell'ambito della classe dei fluidi viscosi, i casi in cui è possibile ottenere il pareggiamento tra il numero di equazioni ed il numero di incognite caratterizzanti il sistema

$$\begin{cases} \rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{F} + \nabla \cdot \mathbf{T} \\ \dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \mathbf{T} = \mathbf{T}^t \\ \rho \dot{\epsilon} = \rho h - \nabla \cdot \mathbf{q} + \mathbf{T} : \mathbf{D} \end{cases} \tag{69}$$

e la formulazione locale del Secondo Principio della Termodinamica.

La prima limitazione di cui ci si avvarrá in seguito, é la seguente: "*In assenza di deformazioni, il tensore degli sforzi di Cauchy per un fluido viscoso coincide con il tensore degli sforzi di Cauchy per un fluido perfetto*", i.e.

$$\mathbf{D} = 0 \Rightarrow \mathbf{T} = -p\mathbf{I} \, . \tag{70}$$

Siano $R = \{Ox_1x_2x_3\}$ e $R' = \{Ox'_1x'_2x'_3\}$ due riferimenti cui si associano, rispettivamente, i tempi pantopici t e t', legati linearmente tra loro, i.e. $t = t' + a$.

Definizione 6 *Due riferimenti, e quindi i moti che avvengono in essi si dicono* equivalenti *se esiste una matrice ortogonale Q:*

$$\mathbf{x}'(t') = Q(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t) \, , \qquad t' = t + a \tag{71}$$

Definizione 7 - *Una grandezza tensoriale si dice* oggettiva *o* indifferente al riferimento *se in corrispondenza ad una coppia di moti equivalenti si trasforma con la legge tensoriale (71) ad ogni istante.*

Definizione 8 - *Si dice processo* termocinetico *la coppia* $(\mathbf{x}(P_*, t), \theta(P_*, t))$ *costituita dal vettore posizione di una generica particella P_* all'istante t e dalla temperatura assoluta θ, valutata in P_* all'istante t.*

Definizione 9 - *Si definisce processo termodinamico l'insieme:*

$$\mathbf{x}, \theta, \rho, \mathbf{F}, \mathbf{q}, \eta, \epsilon, h, \mathbf{T} \, .$$

Tale insieme, per ogni assegnata coppia $(h, \mathbf{F})$, deve verificare il sistema (69)

Definizione 10 - *Si definisce* storia *di una funzione f fino all'istante t, la restrizione della funzione f all'intervallo $\tau =]-\infty, t]$. Essa si puó indicare con $f|_\tau$ o con $f(P_*, t)$, operando il cambiamento di variabili $t-\tau$, $\tau \in [0, +\infty[$*

Pertanto se una funzione non dipende dalla sua storia, nel seguito si intenderá che per il continuo in esame tutto ciò che è accaduto in passato non influenza lo stato attuale.
Nel resto della trattazione saranno considerati validi i seguenti principi.

Principio 1 - ***(Principio di ereditarietà)***
In ogni processo termodinamico le grandezze $\mathbf{T}, \mathbf{q}, \eta, \epsilon$, ad ogni istante t e per ogni generica particella Q_*, sono funzione della storia del processo termocinetico di tutte le particelle.

Principio 2 -***(Principio dell'azione locale)***
Le equazioni costitutive per moti coincidenti in un intorno di una particella Q_*, devono necessariamente coincidere in Q_*.

Questi due principi possono essere riuniti nel seguente principio.

Principio 3 -***(Principio di determinismo)***
Le equazioni costitutive, in un generico istante t e in corrispondenza di una generica particella Q_*, dipendono dalla storia del moto delle particelle in un intorno di Q_*. Per moti coincidenti in un intorno di Q_* esse devono coincidere anche in Q_*.

Principio 4 -***(Principio di equipresenza)***
Una variabile presente in un'equazione costitutiva deve essere presente in tutte le altre[2]*.*

Principio 5 -***(Principio di oggettività o di indifferenza al riferimento)***
Le equazioni costitutive devono essere invarianti in forma nel passaggio da un riferimento all'altro.

Principio 6 -***(Principio di dissipazione)***
Le equazioni costitutive devono verificare la disuguaglianza di dissipazione ridotta in corrispondenza di ogni processo termocinetico.

La disuguaglianza di dissipazione ridotta è legata al tipo di trasformazione di calore considerata. Per ottenere la sua formulazione matematica, si introduce il *potenziale termodinamico*: $\psi = \epsilon - \eta\theta$. Derivando questa espressione rispetto al tempo e moltiplicando ambo i membri per ρ si ha:

$$\rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) = \rho\dot{\epsilon} - \rho\dot{\eta}\theta \,. \tag{72}$$

[2]Questo vuol dire che, a priori non è possibile separare gli effetti.

Inoltre, in virtú della $(69)_4$ e della disuguaglianza di Clausius-Duhem, si ottiene:

$$\rho\dot{\eta}\theta - \rho\dot{\varepsilon} \geq \rho h - \theta\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) - \rho h + \nabla \cdot \mathbf{q} - \mathbf{T} : \mathbf{D} = \frac{1}{\theta}\mathbf{q} \cdot \nabla\theta - \mathbf{T} : \mathbf{D}\,. \quad (73)$$

Pertanto la (72) si puó scrivere:

$$-\rho(\dot{\psi} + \eta\dot{\theta}) + \mathbf{T} : \mathbf{D} - \frac{1}{\theta}\,\mathbf{q} \cdot \nabla\theta \geq 0 \quad (74)$$

la quale rapresenta la *disuguaglianza di dissipazione ridotta.*
Nel seguito della trattazione, saranno considerati esclusivamente fluidi privi di memoria.
Sussiste la seguente definizione.

Definizione 11 - *Un fluido si dice* omogeneo *se* $\rho = \rho(t)$.

Sia $\tau = 1/\rho$ il volume specifico e, per brevità di notazioni, si ponga $\mathbf{g} = \nabla\theta$. Si supponga che $\mathbf{T}, \mathbf{q}, \psi, \eta$ dipendono da $\tau, \theta, \mathbf{g}, \mathbf{v}, \nabla v$. Poichè non tutte queste grandezze sono oggettive, si supponga che $\mathbf{T}, \mathbf{q}, \psi, \eta$ dipendano solo dalla parte oggettiva di $\tau, \theta, \mathbf{g}, \mathbf{v}, \nabla v$, i.e. dall'insieme $I = \{\tau, \theta, \mathbf{g}, \mathbf{D}\}$. In virtú del *principio di equipresenza*, la (74) diventa

$$-\rho\left[\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\dot{\tau} + \frac{\partial\psi}{\partial\theta}\dot{\theta} + \frac{\partial\psi}{\partial g_i}\dot{g}_i + \frac{\partial\psi}{\partial D_{ij}}\dot{D}_{ij} + \eta\dot{\theta}\right] + \mathbf{T} : \mathbf{D} - \frac{1}{\theta}\,\mathbf{q} \cdot \nabla\theta \geq 0 \quad (75)$$

Considerato un processo per il quale risulti:

$$\frac{\partial\psi}{\partial g_i} = \frac{\partial\psi}{\partial D_{ij}} = 0 \qquad e \qquad \frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \eta = 0 \quad (76)$$

per esso si ha che

$$\begin{cases} \psi = \psi(\tau, \theta) \\ \eta = \eta(\tau, \theta) \end{cases} \quad (77)$$

e la (75) diventa

$$-\rho\frac{\partial\psi}{\partial\tau}\dot{\tau} + \mathbf{T} : \mathbf{D} - \frac{1}{\theta}\,\mathbf{q} \cdot \nabla\theta \geq 0\,.$$

Indicata con $p = -\dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}$ la *pressione termodinamica*, si ottiene

$$p\rho\dot{\tau} + \mathbf{T} : \mathbf{D} - \frac{1}{\theta}\,\mathbf{q} \cdot \nabla\theta \geq 0\,. \quad (78)$$

Ricordando che $\tau = 1/\rho$, quindi $\dot{\tau} = -\dfrac{1}{\rho^2}\dot{\rho}$, in virtú della $(69)_2$, si ha $\rho\dot{\tau} = -\dfrac{1}{\rho}\dot{\rho} = \nabla \cdot \mathbf{v}$ e la (78) diventa

$$(\mathbf{T} + p\mathbf{I}) : \mathbf{D} - \frac{1}{\theta}\,\mathbf{q} \cdot \nabla\theta \geq 0\,. \quad (79)$$

La precedente disuguaglianza fornisce una limitazione sugli sforzi non normali. Pertanto quando si considerano trasformazioni isocoriche, la pressione non può essere definita in questo modo e diventa una nuova incognita del problema.
Sussiste la seguente definizione

Definizione 12 - *Si definisce* **fluido stokesiano** *un fluido per il quale il tensore degli sforzi di Cauchy ha la seguente dipendenza funzionale:*

$$\mathbf{T} = f(\tau, \theta, \mathbf{D})$$

La piú generale espressione per il tensore degli sforzi di Cauchy per un fluido viscoso é del tipo:

$$\mathbf{T} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{D} + \alpha_2 \mathbf{D}^2 \tag{80}$$

dove α_0, α_1 e α_2 sono funzioni di densitá, temperatura e invarianti primo, secondo e terzo di $\mathbf{D}$.

Osservazione 3 - *Si dimostra che le autodirezioni di* $\mathbf{T}$ *coincidono con quelle di* $\mathbf{D}$ *e che una qualunque permutazione delle componenti di* $\mathbf{T}$ *comporta un'analoga permutazione delle componenti di* $\mathbf{D}$.

Definizione 13 - *Si definisce* **fluido Newtoniano** *un fluido viscoso per il quale esiste una relazione lineare tra il tensore degli sforzi di Cauchy ed il tensore velocitá di deformazione* $\mathbf{D}$*:*

$$\mathbf{T} = \alpha_0 \mathbf{I} + \alpha_1 \mathbf{D} \tag{81}$$

Teorema 4 - *Un fluido newtoniano (stokesiano lineare), per il quale in assenza di deformazione si abbia* $\mathbf{T} = -p\mathbf{I}$*, il tensore degli sforzi di Cauchy ha la seguente espressione*

$$\mathbf{T} = (-p + \lambda \nabla \cdot \mathbf{v})\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{D} \tag{82}$$

Dimostrazione. Si consideri, per semplicitá, il riferimento delle autodirezioni di $\mathbf{T}$, nel quale le componenti non nulle di $\mathbf{T}$ sono solo quelle ad indici uguali. Tale riferimento coincide con quello delle autodirezioni di $\mathbf{D}$, e pertanto anche il tensore $\mathbf{D}$, nel riferimento scelto, ha non nule solo le componenti ad indici uguali. Pertanto, posto

$$\begin{array}{lll} t_1 = T_{11}\,, & t_2 = T_{22}\,, & t_3 = T_{33} \\ d_1 = D_{11}\,, & d_2 = D_{22}\,, & d_3 = D_{33} \end{array} \tag{83}$$

in virtú della (81), componente per componente si ha

$$\begin{cases} t_1 = a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 - p \\ t_2 = b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3 - p \\ t_3 = c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 - p\,. \end{cases} \tag{84}$$

Effettuando una permutazione ciclica sugli assi del riferimento di $\mathbf{T}$ che porti il primo asse sul secondo asse, il secondo asse sul terzo asse e il terzo asse sul primo asse, si ha una permutazione delle componenti di $\mathbf{T}$ e, conseguentemente una permutazione anche sulle componenti di $\mathbf{D}$. In tal senso la (84) diventa

$$\begin{cases} t_2 = a_1 d_2 + a_2 d_3 + a_3 d_1 - p \\ t_3 = b_1 d_2 + b_2 d_3 + b_3 d_1 - p \\ t_1 = c_1 d_2 + c_2 d_3 + c_3 d_1 - p \,. \end{cases}$$

Applicando il principio di identità dei polinomi si ottiene

$$\begin{cases} a_1 d_1 + a_2 d_2 + a_3 d_3 - p = c_1 d_2 + c_2 d_3 + c_3 d_1 - p \\ b_1 d_1 + b_2 d_2 + b_3 d_3 - p = a_1 d_2 + a_2 d_3 + a_3 d_1 - p \\ c_1 d_1 + c_2 d_2 + c_3 d_3 - p = b_1 d_2 + b_2 d_3 + b_3 d_1 - p \end{cases}$$

i.e.:

$$\begin{cases} (a_1 - c_3) d_1 + (a_2 - c_1) d_2 + (a_3 - c_2) d_3 = 0 \\ (b_1 - a_3) d_1 + (b_2 - a_1) d_2 + (b_3 - a_2) d_3 = 0 \\ (c_1 - b_3) d_1 + (c_2 - b_1) d_2 + (c_3 - b_2) d_3 = 0 \,. \end{cases}$$

Poichè tali relazioni devono essere valide $\forall d_i$, i coefficienti di ciascuna equazione devono risultare nulli, i.e.:

$$\begin{aligned} a_1 &= c_3 = b_2 \\ a_2 &= c_1 = b_3 \\ a_3 &= c_2 = b_1 \end{aligned}$$

Ponendo

$$\begin{aligned} a_1 &= c_3 = b_2 = l \\ a_2 &= c_1 = b_3 = m \\ a_3 &= c_2 = b_1 = n \end{aligned} \tag{85}$$

il sistema (84) diventa

$$\begin{cases} t_1 = l d_1 + m d_2 + n d_3 - p \\ t_2 = n d_1 + l d_2 + m d_3 - p \\ t_3 = m d_1 + n d_2 + l d_3 - p \end{cases} \tag{86}$$

Effettuando, ora, una permutazione che tiene fisso il terzo asse e scambia il primo e il secondo tra loro, il sistema (86) diventa

$$\begin{cases} t_2 = l d_2 + m d_1 + n d_3 - p \\ t_1 = n d_2 + l d_1 + m d_3 - p \\ t_3 = m d_2 + n d_1 + l d_3 - p \,. \end{cases}$$

Ripetendo lo stesso ragionamento che ha consentito di ottenere il sistema (86), si ha:

$$\begin{cases} l d_1 + m d_2 + n d_3 - p = n d_2 + l d_1 + m d_3 - p \\ n d_1 + l d_2 + m d_3 - p = l d_2 + m d_1 + n d_3 - p \\ m d_1 + n d_2 + l d_3 - p = m d_2 + n d_1 + l d_3 - p \end{cases}$$

i.e.:

$$\begin{cases} (m-n)d_2 + (n-m)d_3 = 0 \\ (n-m)d_1 + (m-n)d_3 = 0 \\ (m-n)d_1 + (n-m)d_2 = 0 \end{cases}$$

da cui necessariamente deve risultare $m = n$. Ponendo

$$m = n = \lambda\,, \qquad l = \lambda + 2\mu \tag{87}$$

il sistema (86) diventa

$$\begin{cases} t_1 = (\lambda + 2\mu)d_1 + \lambda(d_2 + d_3) - p \\ t_2 = \lambda(d_1 + d_3) + (\lambda + 2\mu)d_2 - p \\ t_3 = \lambda(d_1 + d_2) + (\lambda + 2\mu)d_3 - p \end{cases}$$

i.e.:

$$\begin{cases} t_1 = \lambda(d_1 + d_2 + d_3) + 2\mu d_1 - p \\ t_2 = \lambda(d_1 + d_2 + d_3) + 2\mu d_2 - p \\ t_3 = \lambda(d_1 + d_2 + d_3) + 2\mu d_3 - p\,. \end{cases}$$

Definizione 14 - *Un fluido si definisce* **incomprimibile** *se la sua densità è costante ed assume lo stesso valore per tutte le particelle.*

Definizione 15 - *Un fluido a volume costante si dice* isocorico.

Nel caso di *fluidi comprimibili* si definisce pressione termodinamica p la seguente espressione: $p = -\dfrac{\partial \psi}{\partial \tau}$. In tal caso, dall'ipotesi (80), si osserva che, in assenza di deformazione, si ha $\mathbf{T} = \alpha \mathbf{I}$. Ponendo $\alpha_0 = \alpha^* - p$, risulta

$$\alpha \mathbf{I} = \alpha^* \mathbf{I} - p\mathbf{I}$$

quindi deve necessariamente essere $\alpha^* = 0$ e $\alpha_0 = -p$.
Quando, invece i fluidi sono **incomprimibili** si pone $\alpha_0 = -p$, che risulta essere una nuova incognita del problema.

Proposizione 2 - *Un fluido incompressibile è isocorico.*

Dimostrazione. Ricordando la formulazione locale del principio di conservazione della massa, i.e.:

$$\dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0\,, \tag{88}$$

l'incompresssibilitá del fluido, i.e. $\rho = \rho(P, t) =$ costante, implica che $\dot{\rho} = 0$. Pertanto, escludendo il caso in cui $\rho = 0$, la validità di (88) comporta che $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$. D'altra parte essendo $\rho \dot{\tau} = \nabla \cdot \mathbf{v}$, si ha $\dot{\tau} = 0$ e quindi il fluido è isocorico.

Osservazione 4 - *In generale se un fluido é isocorico, non é detto che esso sia incompressibile. Infatti, l'isocoricitá del fluido implica che* $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$*, da cui per la (88) si ha* $\dot{\rho} = 0 \;\Leftrightarrow\; \rho =$ *costante. Ma poichè* $\dot{\rho} = \dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{v}$*, non è detto che questa costante sia la stessa per tutte le particelle, quindi non é detto che il fluido sia incompressibile. Invece, l'isocoricitá comporta la incompressibilitá del fluido se il fluido è* omogeneo.

Nell'ambito dei fluidi stokesiani lineari, la disuguaglianza di dissipazione ridotta fornisce delle limitazioni sui coefficienti λ e μ. Infatti, sostituendo la (82) nella (79), risulta

$$\lambda \; \nabla \cdot \mathbf{v} \; \mathbf{I} : \mathbf{D} + 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} - \frac{1}{\theta} \mathbf{q} \cdot \nabla \theta \geq 0 \,. \tag{89}$$

In virtú dell'ipotesi di Fourier, i.e.: $\mathbf{q} = -\chi \nabla \theta \,, \chi =$ cost. > 0, la (89) diventa

$$\lambda \nabla \cdot \mathbf{v} \mathbf{I} : \mathbf{D} + 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D} + \frac{\chi (\nabla \theta)^2}{\theta} \geq 0 \tag{90}$$

Essendo

$$\begin{cases} \mathbf{I} : \mathbf{D} = \nabla \cdot \mathbf{v} = d_1 + d_2 + d_3 \\ \\ \mathbf{D} : \mathbf{D} = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \\ \\ 3(d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) = (d_1 + d_2 + d_3)^2 + (d_1 - d_2)^2 + (d_1 - d_3)^2 + (d_2 - d_3)^2 \end{cases} \tag{91}$$

la (90) diventa

$$\lambda (d_1 + d_2 + d_3)^2 + 2\mu (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) + \frac{\chi (\nabla \theta)^2}{\theta} \geq 0 \,.$$

Quest'ultima relazione deve essere valida $\forall \theta$. In particolare per $\theta =$ cost. si ottiene

$$\lambda (d_1 + d_2 + d_3)^2 + 2\mu (d_1^2 + d_2^2 + d_3^2) \geq 0 \,. \tag{92}$$

Sostituendo la $(91)_3$ nella (92) segue che

$$\lambda (d_1 + d_2 + d_3)^2 + \frac{2\mu}{3} (d_1 + d_2 + d_3)^2 + \frac{2\mu}{3} \left\{ (d_1 - d_2)^2 + (d_1 - d_3)^2 + (d_2 - d_3)^2 \right\} \geq 0 \,.$$

Poichè a priori non si puó escludere il caso in cui $d_1 = d_2 = d_3$, condizione sufficiente affinchè sia valida la (92) è che

$$(\lambda + \frac{2\mu}{3})(d_1 + d_2 + d_3)^2 \geq 0$$

da cui necessariamente

$$3\lambda + 2\mu \geq 0 \,.$$

In particolare, nel caso di fluidi incomprimibili ($\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$), la precedente disuguaglianza diventa

$$\mu \geq 0 \,.$$

Pertanto, tenendo conto della disuguaglianza di dissipazione ridotta, si ottengono le limitazioni

$$\begin{cases} 3\lambda + 2\mu \geq 0 \\ \mu \geq 0 \end{cases} \tag{93}$$

essendo λ il *coefficiente di viscosità di volume* e μ il *coefficiente di viscosità di scorrimento.*

6 Equazioni di Navier-Stokes

Nella classe dei fluidi stokesiani lineari, utilizzando la (82) si ottiene

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = -\nabla p + \nabla(\lambda \nabla \cdot \mathbf{v}) + \nabla \cdot (2\mu \mathbf{D}) \tag{94}$$

e poichè $\nabla \cdot \mathbf{D} = \nabla(\mu \nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta v$, la (94) diventa

$$\nabla \cdot \mathbf{T} = -\nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta v \,. \tag{95}$$

Inoltre essendo

$$\mathbf{T} : \mathbf{D} = -p\nabla \cdot \mathbf{v} + \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D}$$

posto $\phi = \lambda(\nabla \cdot \mathbf{v})^2 + 2\mu \mathbf{D} : \mathbf{D}$, si ha

$$\mathbf{T} : \mathbf{D} = -p\nabla \cdot \mathbf{v} + \phi \tag{96}$$

Sostituendo la (95) nella $(69)_1$ e la (96) nella $(69)_4$ si ottiene, rispettivamente:

$$\rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + (\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta v \tag{97}$$

$$\rho \dot{\epsilon} = \rho h - \nabla \cdot \mathbf{q} - p\nabla \cdot \mathbf{v} + \phi \tag{98}$$

Per quanto appena visto, nel caso in cui il fluido in esame sia incompressibile ed isotermo, il sistema (69) diventa

$$\begin{cases} \mathbf{a} = \mathbf{F} - \dfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu \Delta v \\ \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \,. \end{cases} \tag{99}$$

essendo $\nu = \mu/\rho$ (viscositá cinematica). (99) è un sistema di quattro equazioni in quattro incognite (*equazioni di Navier-Stokes per i fluidi incomprimibili*).

Nel caso di un fluido compressibile, il sistema (99) diventa (*equazioni di Navier-Stokes per i fluidi comprimibili*)

$$\begin{cases} \dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta v \\ \rho \dot{\epsilon} = \rho h - \nabla \cdot \mathbf{q} - p \nabla \cdot \mathbf{v} + \phi \\ \eta = \eta(\rho, \theta) \\ p = p(\rho, \theta) \, . \end{cases} \tag{100}$$

Si consideri, in particolare, l'equazione $(100)_3$. Se:

- $h = 0$, i.e. non ci sono sorgenti di calore;
- vale la legge di Fourier: $\mathbf{q} = -\chi \nabla \theta$, con χ costante positiva;

essendo inoltre $\rho \dot{\varepsilon} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \rho \dot{\varepsilon} + \rho p \dot{\tau}$, la $(100)_3$ diventa

$$\rho \dot{\epsilon} + p \rho \dot{\tau} = \phi + \chi \Delta \theta \, . \tag{101}$$

Ricordando la definizione di potenziale termodinamico: $\psi = \epsilon - \eta \theta$, essendo

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \dot{\tau} + \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \dot{\theta} = \frac{\partial \psi}{\partial \tau} \dot{\tau} - \eta \dot{\theta} = -p \dot{\tau} - \eta \dot{\theta} \tag{102}$$

si ha

$$\dot{\psi} + \eta \dot{\theta} = -p \dot{\tau} \, . \tag{103}$$

Ma, contemporaneamente

$$\dot{\psi} + \eta \dot{\theta} = \dot{\varepsilon} - \dot{\eta} \theta \tag{104}$$

da cui

$$-p \dot{\tau} = \dot{\varepsilon} - \dot{\eta} \theta \tag{105}$$

e quindi

$$\rho \dot{\varepsilon} + \rho p \dot{\tau} = \dot{\eta} \rho \theta \, . \tag{106}$$

Pertanto il sistema (100) diventa

$$\begin{cases} \dot{\rho} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \\ \rho \mathbf{a} = \rho \mathbf{F} - \nabla p + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) + \mu \Delta v \\ \rho \dot{\eta} \theta = \phi + \chi \Delta_2 \theta \\ \eta = \eta(\rho, \theta) \\ p = p(\rho, \theta) \end{cases} \tag{107}$$

e rappresenta un sistema di sette equazioni in sette funzioni incognite.
Se, in particolare, si considerano fluidi barotropici, in cui $p = p(\rho)$, non si ha la necessità di considerare la $(100)_3$ e la $(100)_4$ ed in tal caso si ottiene un sistema di cinque equazioni in cinque funzioni incognite.

7 Condizioni al Contorno

Un problema che sorge per le equazioni di Navier-Stokes é quello di fissare, in base alla natura del fenomeno in esame, le piú appropriate condizioni iniziali ed al contorno (Initial and Boundary Conditions). Si consideri, ad esempio, il caso di un fluido stokesiano lineare, omogeneo ed incompressibile che occupi il dominio (limitato in almeno una direzione) $\Omega \subset R^3$. Assegnare le condizioni iniziali, equivale ad assegnare una funzione $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ tale che la soluzione $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ soddisfi la condizione $\mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$. Passando alle condizioni al contorno, si distinguano, in prima analisi, i seguenti casi:

1. se Ω é limitato e la sua frontiera $\partial\Omega$ é rigida, in virtù della viscosità del fluido, é lecito ammettere aderenza fra le particelle del fluido immediatamente vicine alla frontiera e la frontiera stessa. Pertanto, supposto che $\partial\Omega$ si muova con alla velocità assegnata $\mathbf{v}_\Sigma$, nel caso in esame, si puó supporre che le particelle del fluido abbiano velocità $\mathbf{v}(Q, t) = \mathbf{v}_\Sigma\,,\ Q \in \partial\Omega$.

2. Nel caso di due fluidi $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$, separati da una superficie Σ, si puó supporre che in corrispondenza ad un arbitrario punto Q appartenente alla superficie di separazione, la componente normale della velocità del fluido $\mathcal{F}_1$ nel punto Q sia uguale alla componente normale della velocità del fluido $\mathcal{F}_2$ nel punto Q.

3. Nel caso di fluidi, posti a contatto tra di loro ed ad una diversa temperatura, indicati con $\mathcal{F}_1$ e $\mathcal{F}_2$ i due fluidi, di cui il primo a temperatura $\theta_1(P, t)$ e il secondo a temperatura $\theta_2(P, t)$, ammesso che il calore possa trasmettersi solo per conduzione, si ha

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = \gamma(\theta_1 - \theta_2) \tag{108}$$

   essend0 γ il *coefficiente di conducibilità superficiale* essendo $(\theta_1 - \theta_2)$ non troppo elevata. Ammesso che valga l'ipotesi di Fourier: $\mathbf{q} = -\chi\nabla\theta$, $\chi = \text{cost.} > 0$, essendo $\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = -\chi\nabla\theta \cdot \mathbf{n} = -\chi\dfrac{d\theta}{d\mathbf{n}}$, la (108) diventa

$$\frac{d\theta}{d\mathbf{n}} = -\frac{\gamma}{\chi}(\theta_1 - \theta_2)\,. \tag{109}$$

   In questo caso, quindi, si richiede che il campo termico al contorno sia tale che valga la (109).
   Quest'ultima equazione è, però, in forma differenziale, quindi in alcuni casi può essere poco agevole da sfruttare. Pertanto, sotto opportune ipotesi, essa può essere sostituita con una delle due seguenti condizioni

   - $\dfrac{d\theta}{d\mathbf{n}} = 0 \quad \text{se} \quad \dfrac{\gamma}{\chi} << 1;$
   - $(\theta_1 - \theta_2) = 0 \quad \text{se} \quad \dfrac{\gamma}{\chi} >> 1.$

8 Esempi di moti

La Quiete

Si consideri il seguente problema ai valori iniziali ed al contorno

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} - \dfrac{1}{\rho}\nabla p + \nu\Delta\mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \tag{110}$$

$$\begin{cases} \mathbf{v}(P,0) = \mathbf{0} & P \in \Omega \\ \mathbf{v}(Q,t) = 0 & (Q,t) \in \Omega_t = \partial\Omega \times [0,t] \end{cases} \tag{111}$$

Se $\mathbf{F} = \nabla U$ e $\nabla \left(\dfrac{p}{\rho} - U \right) = 0$ allora, nell'ambito della classe dei moti stazionari, la soluzione identicamente nulla é soluzione di (110)-(111).

Moti laminari

Sia Ω uno strato orizzontale, tale che, introdotto il riferimento cartesiano per il quale il piano xy coincida con il piano mediano, si ha $\Omega = R^2 \times [-d, d]$. Supposto che inizialmente il fluido sia in quiete, le cause che generano il moto possono essere le seguenti:

1. Il piano superiore é in moto con velocità costante e non molto elevata nella direzione dell'asse y. In tale caso, la viscosità del fluido fa si che le particelle poste immediatamente al di sotto del piano in movimento cominciano a muoversi con la stessa velocità del piano, trascinando così anche le particelle negli strati via via più bassi. Questo moto per piani paralleli si dice *laminare*.

2. Nello strato agisce un gradiente non nullo di pressione che fornisce la spinta al fluido che comincia a muoversi.

3. Il piano superiore delimitante lo strato é in moto con velocitá costante ed é presente un gradiente di pressione non nullo.

Se $\mathbf{F}$ deriva da un potenziale, i.e. $\mathbf{F} = \nabla U$, la $(110)_1$ diventa

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \nabla \left(U - \dfrac{p}{\rho} \right) + \nu\Delta\mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \tag{112}$$

Si esaminino, uno alla volta, i precedenti tre casi.

1. Indicato con $\mathbf{j}$ il versore dell'asse y, ci si chiede se esiste un moto stazionario, soluzione di (112), che soddisfi le seguenti condizioni al contorno

$$\begin{cases} \mathbf{v}(x,y,-d) = \mathbf{0} \\ \mathbf{v}(x,y,d) = V\,\mathbf{j} \end{cases} \tag{113}$$

essendo V una costante assegnata. Si verifica agevolmente che il *Moto di Couette*

$$\begin{cases} \mathbf{v}(z) = \dfrac{V}{2}\left(1 + \dfrac{z}{d}\right)\mathbf{j} \\ \dfrac{p}{\rho} = U + p_1 \end{cases} \tag{114}$$

è soluzione del precedente problema.

2. In questo caso il moto, soluzione di (112), che soddisfi i requisiti richiesti é il *Moto di Poiseuille*

$$\begin{cases} \mathbf{v}(z) = \dfrac{k}{2\nu}(d^2 - z^2)\mathbf{j} \\ \dfrac{p}{\rho} - U = p_1 - ky\,. \end{cases} \tag{115}$$

3. Un moto che soddisfi le condizioni richieste è il seguente

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \left[\dfrac{k}{2\nu}(d^2 - z^2) + \dfrac{V}{2}\left(1 + \dfrac{z}{d}\right)\right]\mathbf{j} \\ \dfrac{p}{\rho} = U + p_1 - ky\,. \end{cases} \tag{116}$$

   Nel caso esaminato, se gli ordini di grandezza di k e V sono sufficientemente diversi, risulta essere più evidente il moto dovuto al termine con ordine di grandezza maggiore.

Moti non stazionari

Sia $\Omega = \{(x, y, z) : z \geq 0\}$ il dominio occupato da un fluido viscoso, isotermo ed incompressibile. Nell'ipotesi che il piano $z = 0$ si muova con velocità assegnata non costante: $\mathbf{v}_\Sigma = v_0 cos(\omega t)\mathbf{i}$ e che la sollecitazione agente sul fluido sia conservativa, i.e.: $\mathbf{F} = \nabla U$, le equazioni di Navier-Stokes diventano:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{v}} = \nabla U - \dfrac{\nabla p}{\rho} + \nu\Delta\mathbf{v} \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \end{cases} \tag{117}$$

cui vanno aggiunte le seguenti condizioni iniziali ed al contorno

$$\begin{cases} \mathbf{v}(P, 0) = v_0 e^{-az}\cos(-az)\mathbf{i} & P \in \Omega \\ \mathbf{v}(Q, t) = v_0 \cos(\omega t)\mathbf{i} & (Q, t) \in \Omega_t = \partial\Omega \times [0, t]\,. \end{cases} \tag{118}$$

Si dimostra agevolmente che, in questo caso, il moto non stazionario del fluido è il seguente:

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{v}_0 e^{-az} cos(\omega t - az)\mathbf{i}, \qquad \omega = 2a^2\nu, \\ \dfrac{p}{\rho} = U + p_1 \end{cases} \tag{119}$$

PARTE III

STABILITÁ

9 Stabilità

La formulazione di un modello matematico è generalmente affetta da errori. Tali errori sono dovuti, ad esempio, alla necessità di semplificare il modello stesso mediante opportune approssimazioni ed all'accuratezza degli strumenti utilizzati per effettuare le varie misurazioni. Per questo motivo la *bontà* di un modello si misura valutando "la distanza" che si origina tra la soluzione del problema, una volta assegnati i dati iniziali, e la soluzione *perturbata*, ottenuta quando viene perturbato il dato iniziale.

Definizione 16 *Si definisce* **moto di dato iniziale** $\mathbf{v}_0$ *l'applicazione*

$$\mathbf{v} : t \in I\!R \longrightarrow \mathbf{v}(\mathbf{v}_0, t)$$

essendo $\mathbf{v}(\mathbf{v}_0, 0) = \mathbf{v}_0$.

Assegnato uno spazio metrico $(\mathcal{X}, d)$ nel quale sia $S(\mathbf{x}, r)$ la sfera aperta di centro $\mathbf{x}$ e raggio r, sussistono le seguenti definizioni.

Definizione 17 *Un moto* $\mathbf{v}(\mathbf{v}_0, \cdot)$ **dipende con continuità** *dai dati iniziali se e solo se:*

$$\forall T, \epsilon > 0\ , \exists \delta(\epsilon, T) > 0 : \mathbf{v}_1 \in S(\mathbf{v}_0, \delta) \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{v}_1, t) \in S(\mathbf{v}(\mathbf{v}_0, t), \epsilon), \forall t \in [0, T].$$

Definizione 18 *Un moto* $\mathbf{v}(\mathbf{v}_0, \cdot)$ *é* **stabile alla Liapunov** *rispetto a perturbazioni sui dati iniziali se e solo se:*

$$\forall \epsilon > 0\ , \exists \delta(\epsilon) > 0 : \mathbf{v}_1 \in S(\mathbf{v}_0, \delta) \Rightarrow \mathbf{v}(\mathbf{v}_1, t) \in S(\mathbf{v}(\mathbf{v}_0, t), \epsilon), \forall t > 0.$$

Quest'ultima definizione può essere data anche in termini della *perturbazione* $\mathbf{u}(\mathbf{u}_0, t) = \mathbf{v}(\mathbf{v}_1, t) - \mathbf{v}(\mathbf{v}_0, t)$.

Definizione 19 *Un moto* $\mathbf{v}(\mathbf{v}_0, \cdot)$ *é* **stabile rispetto a perturbazioni sui dati iniziali** *se e solo se:*

$$\forall \epsilon > 0\ , \exists \delta(\epsilon) > 0 : \mathbf{u}_0 \in S(0, \delta) \Rightarrow \mathbf{u}(\mathbf{u}_0, t) \in S(0, \epsilon), \forall t > 0.$$

Osservazione 5 . *Si osservi che il concetto di stabilità rispetto ai dati iniziali e quindi di dipendenza continua dai dati iniziali, é espresso in termini di distanza, quindi dipende da una norma. In uno spazio finito-dimensionale, come* $I\!R^n$, *poiché le norme sono tutte equivalenti tra loro: se un moto è stabile rispetto ad una assegnata norma, esso risulterá stabile anche rispetto a tutte le altre norme. Invece, quando si considerano spazi infinito-dimensionali (come gli spazi funzionali), poiché in tali spazi le norme non sono tutte equivalenti tra loro, la stabilità di un moto dipende dalla norma scelta. In altre parole il concetto di stabilitá è* topologicamente dipendente. *Va sottolineato che, generalmente, la scelta della norma è dettata dalla natura fisica del problema in esame.*

Dipendenza topologica della nozione di stabilità. Sia $\mathcal{F}$ un fluido newtoniano omogeneo, non viscoso ed incompressibile sul quale agisca la sollecitazione attiva conservativa: $\mathbf{F} = \nabla U$. In un dominio D, limitato in almeno una direzione, le equazioni che regolano l'evoluzione del moto di $\mathcal{F}$ (equazioni di Navier-Stokes) sono le seguenti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = \nabla \left(U - \dfrac{p}{\rho} \right) \\ \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \,. \end{cases} \tag{120}$$

Al sistema (120) si associno le seguenti condizioni iniziali ed al contorno:

$$\begin{cases} \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x}) & \text{in } D \\ \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial D \times [0, t] \end{cases} \tag{121}$$

Poiché sussistono le seguenti identità vettoriali:

$$\begin{cases} \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a} = (\nabla \times \mathbf{a}) \times \mathbf{a} + \dfrac{1}{2} \nabla a^2 \\ \\ \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} - \mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{b} - (\nabla \cdot \mathbf{b}) \mathbf{a} - (\nabla \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} \end{cases} \tag{122}$$

indicato con $\underline{\Omega} = \nabla \times \mathbf{v}$ il *vettore vortice*, applicando l'operatore rotore alla $(120)_1$, essa diventa:

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \underline{\Omega} = \underline{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{v} \,. \tag{123}$$

La (123) é nota come ***equazione di Eulero*** ed essa assume una forma particolarmente semplice nel caso di moti bidimensionali.

Moti bidimensionali. Sia $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = (v_1(x_1, x_2, t), v_2(x_1, x_2, t), 0)$ un moto bidimensionale nel riferimento $Ox_1x_2x_3$. Sia $\varphi(x_1, x_2, t) \in C^2$ la *funzione corrente* (*stream function*) tale che $\mathbf{v} = \nabla^{\perp} \varphi$, con $\nabla^{\perp} \varphi = \left(\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2}, -\dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1}, 0 \right)$. Essendo

$$\underline{\mathbf{\Omega}} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ \partial x_1 & \partial x_2 & \partial x_3 \\ v_1 & v_2 & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 =$$

$$- \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} \right) \mathbf{e}_3 = -\Delta \varphi \mathbf{e}_3$$

allora

$$\frac{\partial \underline{\Omega}}{\partial t} = -\frac{\partial \Delta \varphi}{\partial t} \mathbf{e}_3 \,, \quad \underline{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0 \,, \quad \mathbf{v} \cdot \nabla \underline{\Omega} = \left| \frac{\partial (\varphi, \Delta \varphi)}{\partial (x_1, x_2)} \right| \mathbf{e}_3 \,,$$

dove $\frac{\partial(\varphi,\Delta\varphi)}{\partial(x_1,x_2)} = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial x_2} \\ \\ \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x_2} \end{array} \right\|$ é la matrice jacobiana e $\left|\frac{\partial(\varphi,\Delta\varphi)}{\partial(x_1,x_2)}\right|$ é il suo determinante.
Pertanto, nel caso di moti bidimensionali, la (123) diventa

$$\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial t} = \left|\frac{\partial(\varphi,\Delta\varphi)}{\partial(x_1,x_2)}\right| . \tag{124}$$

Le condizioni iniziali ed al contorno, nel caso in esame, diventano

$$\begin{cases} \varphi(x_1,x_2,0) = \varphi_0(x_1,x_2) & \\ \\ \nabla^{\perp}\varphi\cdot\mathbf{n} = 0 & \text{su } \partial D \end{cases} \tag{125}$$

in cui $\varphi_0(x_1,x_2)$ è una funzione assegnata, mentre la $(125)_2$ implica che $\varphi = c$ con c costante. Pertanto, nel caso di un moto bidimensionale, il problema ai valori iniziali ed al contorno (120)-(121) assume la forma (124) con le condizioni (125). Sia $\mathbf{v}^* = v_1(x_1,x_2)\mathbf{e}_1 + v_2(x_1,x_2)\mathbf{e}_2 = \nabla^{\perp}\varphi^*$ un moto base stazionario e $\mathbf{u} = \nabla^{\perp}\psi$ la generica perturbazione. Poichè $\mathbf{v}^*$ è un moto base stazionario (quindi la sua stream-function è tale che $\frac{\partial\Delta\varphi^*}{\partial t} = 0$) l'equazione (124) diventa

$$\frac{\partial(\varphi^*,\Delta\varphi^*)}{\partial(x_1,x_2)} = 0 .$$

Passando al moto perturbato, la funzione $\varphi^*+\psi$ deve soddisfare l'equazione (124), che in tal caso diventa

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} = \frac{\partial(\varphi^*,\Delta\psi)}{\partial(x_1,x_2)} + \frac{\partial(\psi,\Delta\varphi^*+\Delta\psi)}{\partial(x_1,x_2)} \tag{126}$$

cui si associano le seguenti condizioni iniziali ed al contorno

$$\begin{cases} \psi(x_1,x_2,0) = \psi_0(x_1,x_2)\,, & \text{in } D \\ \\ \psi(x_1,x_2,t) = 0\,, & \text{su } \partial D\,. \end{cases} \tag{127}$$

Stabilitá lineare del moto piano di Couette - Sia $D = \{(x_1,x_2) : x_1 \in I\!R\ , |x_2| \le 1\}$ il dominio del moto e $\mathbf{v}^* = \nabla^{\perp}\varphi^*$ con $\varphi^* = \frac{1}{2}x_2^2$ (Moto piano di Couette). Al fine di studiare la stabilità lineare del moto di Couette, trascurando i termini non lineari ed essendo $\Delta\varphi^* = 1$, la (126) diventa

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial t} = \frac{\partial(\varphi^*,\Delta\psi)}{\partial(x_1,x_2)} \tag{128}$$

da cui, essendo $\dfrac{\partial(\varphi^*, \Delta\psi)}{\partial(x_1, x_2)} = -x_2 \dfrac{\partial \Delta\psi}{\partial x_1}$, si ottiene

$$\frac{\partial \Delta\psi}{\partial t} + x_2 \frac{\partial \Delta\psi}{\partial x_1} = 0 \, .$$

Posto $\omega = \Delta\psi$ e $\omega_0 = \Delta\psi_0$, (126)-(127) diventa

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \omega}{\partial t} + x_2 \dfrac{\partial \omega}{\partial x_1} = 0 \\ \\ \omega = \omega_0 \, . \end{cases} \tag{129}$$

Considerando soluzioni del tipo:

$$\omega(x_1, x_2, t) = \omega_0(x_1 - x_2 t, x_2) = \omega_0(\xi, x_2) \, , \qquad \xi = x_1 - x_2 t$$

ci si propone di studiare le stabilità (lineare) del moto piano di Couette rispetto alla norma cosí definita

$$\sup_D |\omega(x_1, x_2, t)| = \sup_D |\omega_0(x_1, x_2)| \tag{130}$$

con $\xi \in I\!R$ e $|x_2| < 1$.
Dimostrare la stabilità rispetto ad una assegnata norma N vuol dire dimostrare che $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : N(u_0) < \delta \Rightarrow N(u) < \epsilon, \forall t \geq 0$.
Poichè ω_0 è fissato, in virtú della (130), il moto piano di Couette è stabile rispetto alla norma scelta.
Si consideri ora la norma $\sup\limits_D |\omega| + \sup\limits_D |\omega_{x_2}|$. Poiché

$$\sup_D |\omega_{x_2}(x_1, x_2, t)| = \sup_D \left| -\omega_{0_\xi} t + \omega_{0_{x_2}} \right| \, , \tag{131}$$

in questo caso risulta

$$\sup_D |\omega_{x_2}(x_1, x_2, t)| \geq t \sup_D \left| \omega_{0_\xi} \right| - \sup_D \left| \omega_{0_{x_2}} \right| \, .$$

Pertanto, quando t cresce indefinitamente, poiché l'estremo superiore cresce illimitatamente si ha l'instabilità del moto piano di Couette rispetto alla norma

$$\sup_D |\omega| + \sup_D |\omega_{x_2}| \, .$$

Osservazione 6 *Nel caso di un moto bidimensionale con* $\underline{\Omega} = -\Delta\varphi \mathbf{e}_3$*, essendo* $\underline{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{v} = 0$*, la* (123) *diventa*

$$\frac{d\underline{\Omega}}{dt} = 0 \, . \tag{132}$$

Fino ad ora sono stati analizzati fluidi non viscosi perchè questi, in alcuni casi, risultano essere piuttosto “scomodi” da trattare ai fini dello studio della stabilitá. Infatti, almeno rispetto alla norma L^2 della generica perturbazione, il termine $\nu\Delta\mathbf{v}$ (assente nelle equazioni di Navier-Stokes per i fluidi perfetti o non viscosi) ha effetto stabilizzante. Per rendersi conto dell'effetto stabilizzante del termine $\nu\Delta\mathbf{v}$ rispetto alla norma L^2, si consideri il sistema (112), cui si associno le condizioni al contorno

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}=0\,.$$

Sia $(\mathbf{v}^*,\pi^*)$ una soluzione stazionaria del problema considerato. Indicata con $(\mathbf{u},\pi)$ la generica perturbazione, le equazioni di evoluzione per tale perturbazione sono le seguenti:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u}+\mathbf{v}^*\cdot\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}^*=-\dfrac{\nabla\pi}{\rho}+\nu\Delta\mathbf{u} & \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0 & \text{su } \partial D \\ \mathbf{u}(\mathbf{x},0)=\mathbf{u}_0(\mathbf{x})\,, & \mathbf{x}\in D\,.\end{cases}\tag{133}$$

Moltiplicando ambo i membri della $(133)_1$ scalarmente per $\mathbf{u}$:

- i) essendo $\dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\cdot\mathbf{u}=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u^2}{\partial t}$, l'integrazione su D fornisce:

$$\int_D\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t}\cdot\mathbf{u}dD=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_D u^2\;dD$$

- ii) essendo

$$\mathbf{v}^*\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}=\mathbf{v}^*\cdot\nabla\left(\frac{u^2}{2}\right)=\nabla\cdot\left[\mathbf{v}^*\frac{u^2}{2}\right]-\frac{u^2}{2}\nabla\cdot\mathbf{v}^*\,,$$

  integrando su D ed applicando il teorema della divergenza si ottiene:

$$\int_D\mathbf{v}^*\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}dD=\int_{\partial D}\frac{u^2}{2}\mathbf{v}^*\cdot\mathbf{n}d\sigma-\int_D\frac{u^2}{2}\nabla\cdot\mathbf{v}^*\,dD\,.$$

  Dalla precedente identitá, in virtú delle condizioni al contorno e della solenoidalitá di $\mathbf{v}^*$, si ricava

$$\int_D\mathbf{v}^*\cdot\nabla\mathbf{u}\cdot\mathbf{u}\,dD=0\,.$$

- iii) Analogamente si ha:

$$\int_D\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{v}^*\cdot\mathbf{u}dD=0\,.$$

- iv) Essendo

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \left[\mathbf{u} \frac{u^2}{2} \right] - \left(\frac{u^2}{2} \right) \nabla \cdot \mathbf{u}$$

l'integazione su D fornisce:

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, dD = \int_D \nabla \cdot \left(\mathbf{u} \frac{u^2}{2} \right) \, dD - \int_D \frac{u^2}{2} \nabla \cdot \mathbf{u} \, dD \, .$$

Dalla precedente relazione, in virtú del teorema della divergenza, delle condizioni al contorno e della solenoidalitá di $\mathbf{u}$, si ricava:

$$\int_D \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, dD = 0 \, .$$

- v) Infine, essendo

$$\nabla \pi \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot (\pi \mathbf{u}) - \pi \nabla \cdot \mathbf{u} \, ,$$

l'incompressibilitá del fluido e le condizioni al contorno, comportano che

$$\int_D \nabla \pi \cdot \mathbf{u} \, dD = 0 \, .$$

A questo punto, nello studio della stabilità della soluzione stazionaria $(\mathbf{v}^*, p^*)$, si distinguano i seguenti casi:

1) Fluido Perfetto

2) Fluido Viscoso

1) Se il **fluido è perfetto**, in virtú delle precedenti considerazioni, si ottiene:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_D \mathbf{u}^2 \, dD = 0 \, . \qquad (134)$$

Pertanto, scegliendo la norma in L^2 come misura della generica perturbazione, si perviene ad un risultato di stabilità semplice, essendo

$$\|\mathbf{u}\|_2^2 = \|\mathbf{u}_0\|_2^2 \, .$$

2) Se il **fluido è viscoso**, essendo

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} &= \sum_{i,j} u_{i,jj} \, u_i = \sum_{i,j} \left[(u_{i,j} \, u_i)_{,j} - (u_{i,j} \, u_{i,j}) \right] \\ &= - \left| \nabla \mathbf{u} \right|^2 + \left[u_{i,j} \, u_i \mathbf{e}_j \right]_j \end{aligned}$$

in virtú delle condizioni al contorno, l'integrazione su D comporta che

$$\nu \int_D \Delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \, dD = -\nu \int_D |\nabla \mathbf{u}|^2 \, dD \, .$$

Pertanto, se il fluido é viscoso si ottiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega \mathbf{v}^2 \, d\Omega = -\nu \int_\Omega |\nabla \mathbf{v}|^2 \, d\Omega$$

da cui si evince l'effetto stabilizzante, rispetto alla norma L^2, del termine $\nu \Delta \mathbf{v}$.

Osservazione 7 *Si verifica facilmente che i precedenti risultati, determinati considerando condizioni al contorno di tipo stress-free, continuano a valere anche nell'ipotesi che il contorno del dominio del moto sia rigido.*

10 Teorema di Arnold (1965 - RUSSIA)

Il teorema di Arnold fornisce una condizione sufficiente a garantire, nel caso di un fluido perfetto ed incompressibile sottoposto all'azione di una forza conservativa in un dominio D limitato, la stabilità di una soluzione stazionaria $\mathbf{v}^* = \nabla^\perp \varphi^*$ rispetto alla norma $\int_D (|\nabla \psi|^2 + |\Delta \psi|^2) dD$, essendo $\mathbf{u} = \nabla^\perp \psi$ la generica perturbazione piana. Prima di enunciare e dimostrare il Teorema di Arnold, occorre premettere alcuni risultati.

Teorema 5 (Teorema di Thomson.) *Se il contorno Γ del dominio D del moto, pur potendosi deformare, é una linea materiale, allora*

$$\oint_\Gamma \mathbf{v}^* \cdot dP = c \, , \quad c = costante \, . \tag{135}$$

Un utile risultato derivante dal teorema di Thomson é il seguente. Essendo

$$\mathbf{v}^* \cdot dP = v_1^* dx + v_2^* dy = \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} dx - \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} dy = \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} [-cos(y, \tau)] + \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} [cos(x, \tau)] =$$

$$= \frac{\partial \varphi^*}{\partial x} [cos(x, n)] + \frac{\partial \varphi^*}{\partial y} [cos(y, n)] = \nabla \varphi^* \cdot \mathbf{n} = \frac{d\varphi^*}{d\mathbf{n}} \, ,$$

la (135) si scrive

$$\oint_\Gamma \mathbf{v}^* \cdot dP = \oint_\Gamma \frac{d\varphi^*}{d\mathbf{n}} \, d\sigma = c \, . \tag{136}$$

Osservazione 8 . *Si osservi che il risultato ottenuto non dipende in alcun modo dalla stazionarietá di* φ^*. *Pertanto se si considera un generico moto stazionario* $\mathbf{v}^*$ *piano, la cui stream-function sia* φ^* *e si indica con* $\mathbf{u}$ *la generica perturbazione piana, la quale non é detto che sia stazionaria, indicata con* ψ *la relativa stream-function, risulta* $\oint_\Gamma \frac{d\psi}{dn}\, d\sigma = c$.

Proposizione 3 . Γ *é una linea di livello.*

Dimostrazione. $\mathbf{v}^*\cdot\mathbf{n} = 0 \Leftrightarrow v_1^* cos(x,n) + v_2^* cos(y,n) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial\varphi^*}{\partial y} cos(x,n) + \frac{\partial\varphi^*}{\partial x} cos(y,n) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\partial\varphi^*}{\partial y} cos(y,\tau) - \frac{\partial\varphi^*}{\partial x} cos(x,\tau) = 0 \Leftrightarrow \nabla\varphi^*\cdot\tau = 0 \Leftrightarrow d\varphi^* = 0$ quindi φ^* é costante. Posto $\mathbf{v} = \mathbf{v}^* + \mathbf{u}$ ed indicata con $\psi_1 = \varphi^* + \psi$ la sua stream-function, essendo $\mathbf{v}$ soluzione del problema, la (136) vale anche per la ψ_1. Pertanto dovrá necessariamente risultare

$$\oint_\Gamma \varphi^* \frac{d\psi}{d\mathbf{n}}\, ds = 0 \tag{137}$$

da cui la tesi.

Se in generale $\underline{\Omega} = \underline{\Omega}(P_*, t)$, la (132) conferma che, nel caso in esame, $\underline{\Omega} = \underline{\Omega}(P_*) =$ costante. Pertanto, considerata una qualsiasi funzione integrabile $f[\underline{\Omega}(P_*)]$ essa é costante e si ottiene *l'integrale primo*

$$\int_D f[\underline{\Omega}(P_*)]\, dD = cost\,. \tag{138}$$

Un'altro *integrale primo* é dato dalla (134) ed é quello dell'energia cinetica. Nell'ambito della classe dei moti stazionari $\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial t} = 0$, quindi l'equazione di Eulero nel caso di moti bidimensionali e stazionari diventa

$$(\varphi_{x_2}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x_1} - \varphi_{x_1}\frac{\partial\Delta\varphi}{\partial x_2}) = 0 \tag{139}$$

Se si va alla ricerca di soluzioni della (139) del tipo $\Delta\varphi = g(\varphi)$ con g invertibile e $G = g^{-1}$, posto $\phi = \int G(\eta)\, d\eta$ allora $\varphi = G(\Delta\varphi)$. Estendendo tale ragionamento su tutto $I\!R$, si consideri la funzione

$$\phi : \xi \in I\!R \longrightarrow \int_0^\xi G(\eta)\, d\eta$$

da cui $\phi'(\xi) = G(\xi)$; ma $\xi = \Delta\varphi \Rightarrow \phi'(\Delta\varphi) = G(\Delta\varphi) = \varphi$ quindi $\nabla\varphi = \phi''\nabla(\Delta\varphi) \Rightarrow \phi'' = \frac{\nabla\varphi}{\nabla(\Delta\varphi)}$. Sussiste il seguente teorema.

Teorema 6 (Teorema di Arnold) *Sia F un fluido non viscoso e incompressibile soggetto ad una sollecitazione attiva conservativa e sia $\mathbf{v}(x_1, x_2)$ un moto piano stazionario la cui stream function $\varphi(x_1, x_2)$ soddisfi l'equazione $\Delta\varphi = g(\varphi)$, con g funzione invertibile. Se esistono due costanti positive c e C, tali che $0 < c \leq \dfrac{\nabla\varphi}{\nabla(\Delta\varphi)} \leq C$, allora $\mathbf{v}$ é stabile rispetto alla norma $\displaystyle\int_D |\nabla\psi|^2 + |\Delta\psi|^2 \; dD$ essendo ψ la stream-function della generica perturbazione piana $\mathbf{u}$ del moto piano stazionario $\mathbf{v}$.*

Dimostrazione. Si consideri lo sviluppo in serie di Taylor di ϕ arrestato al secondo ordine:

$$\phi(\xi + h) = \phi(\xi) + \phi^{'}(\xi)h + \phi^{''}(\xi + \theta h)\frac{h^2}{2}$$

essendo h il generico incremento e $0 < \theta < 1$. Dalla precedente relazione si ottiene:

$$\phi^{''}(\xi + \theta h)\frac{h^2}{2} = \phi(\xi + h) - \phi(\xi) - \phi^{'}(\xi)h \, .$$

Essendo per ipotesi $c \leq \phi^{''} = \dfrac{\nabla\varphi}{\nabla(\Delta\varphi)} \leq C$, si ha

$$c\frac{h^2}{2} \leq \phi(\xi + h) - \phi(\xi) - \phi^{'}(\xi)h \leq C\frac{h^2}{2}$$

onde, posto $\xi = \Delta\varphi$ e $h = \Delta\psi$, si ottiene

$$c\frac{(\Delta\psi)^2}{2} \leq \phi(\Delta\varphi + \Delta\psi) - \phi(\Delta\varphi) - \phi^{'}(\Delta\varphi)\Delta\psi \leq C\frac{(\Delta\psi)^2}{2} \, .$$

Sommando in tutti i membri della precedente disuguaglianza il termine $1/2\, |\nabla\psi|^2$ ed integrando su D si ottiene:

$$\begin{aligned} &\int_D \left[\frac{1}{2}\,|\nabla\psi|^2 + c\frac{(\Delta\psi)^2}{2}\right] \; dD \leq \\ \leq &\int_D \left[\frac{1}{2}\,|\nabla\psi|^2 + \phi(\Delta\varphi + \Delta\psi) - \phi(\Delta\varphi) - \phi^{'}(\Delta\varphi)\Delta\psi\right] \; dD \leq \qquad (140) \\ \leq &\int_D \left[\frac{1}{2}\,|\nabla\psi|^2 + C\frac{(\Delta\psi)^2}{2}\right] \; dD \, . \end{aligned}$$

Si prenda in esame il termine centrale della (140) e si definisca la funzione

$$H(f) = \int_D \left[\frac{1}{2}(\nabla f)^2 + \phi(\Delta f)\right] \; dD \, .$$

In virtú dei precedenti risultati,la funzione $H(f)$ risulta costante in corrispondenza di $f = \varphi$ e di $f = \varphi + \psi$, essendo del tipo (138). Pertanto, anche la funzione

$$H(\varphi+\psi)-H(\varphi) = \int_D \left[\frac{1}{2}(\nabla\varphi + \nabla\psi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \phi(\Delta\varphi + \Delta\psi) - \phi(\Delta\varphi)\right] dD$$

é costante. Essendo

$$\frac{1}{2}(\nabla\varphi + \nabla\psi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 = \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi) + \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 =$$

$$= (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi) + \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2$$

applicando il teorema della divergenza ed in virtú della (137) con $\varphi^* = \varphi$, si ha

$$\int_D (\nabla\varphi)\cdot(\nabla\psi)\ dD = \int_D \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\ dD =$$

$$= \int_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)\right]\ dD - \int_D \varphi\Delta\psi\ dD =$$

$$= \int_{\partial D} \varphi\left[\frac{\partial\psi}{\partial x}cos(x,n) + \frac{\partial\psi}{\partial y}cos(y,n)\right]\ d\sigma - \int_D \varphi\Delta\psi\ dD =$$

$$= \int_{\partial D} \varphi\frac{d\psi}{d\mathbf{n}}d\sigma - \int_D \varphi\Delta\psi\ dD = -\int_D \varphi\Delta\psi\ dD\,.$$

Inoltre essendo $\varphi\Delta\psi = \phi^{'}(\Delta\varphi)\Delta\psi$, sostituendo i risultati ottenuti in $H(\varphi+\psi) - H(\varphi)$, si ottiene

$$H(\varphi+\psi)-H(\varphi) = \int_D \left[\frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 - \phi^{'}(\Delta\varphi)\Delta\psi + \phi(\Delta\varphi + \Delta\psi) - \phi(\Delta\varphi)\right] dD = \text{cost.}\,,$$

che coincide con il termine centrale della (140). Pertanto, in virtú della stazionarietá di φ, la (140) diventa:

$$\int_D \left[\frac{1}{2}\left|\nabla\psi\right|^2 + c\frac{(\Delta\psi)^2}{2}\right]\ dD \leq$$
$$\leq \int_D \left[\frac{1}{2}\left|\nabla\psi_0\right|^2 + \phi(\Delta\varphi + \Delta\psi_0) - \phi(\Delta\varphi) - \phi^{'}(\Delta\varphi)\Delta\psi_0\right]\ dD \leq \qquad (141)$$
$$\leq \int_D \left[\frac{1}{2}\left|\nabla\psi\right|^2 + C\frac{(\Delta\psi)^2}{2}\right]\ dD\,,$$

essendo $\psi_0 = \psi(x_1, x_2, 0)$. In particolare, si osservi che essendo

$$\phi(\Delta\varphi + \Delta\psi_0) - \phi(\Delta\varphi) - \phi^{'}(\Delta\varphi)\Delta\psi_0 = \phi^{''}\frac{(\Delta\psi_0)^2}{2} \leq C\frac{(\Delta\psi_0)^2}{2}$$

ció consente di ottenere dalla (141) la seguente disuguaglianza:

$$\int_D \left[\frac{1}{2} |\nabla\psi|^2 + c\frac{(\Delta\psi)^2}{2} \right] \, dD \leq \int_D \left[\frac{1}{2} |\nabla\psi_0|^2 + C\frac{(\Delta\psi_0)^2}{2} \right] \, dD\,. \qquad (142)$$

Al fine di ottenere un risultato di stabilitá del moto piano stazionario $\mathbf{v}$ rispetto alla norma $\int_D (|\nabla\psi|^2 + |\Delta\psi|^2) dD$, per il momento la presenza delle costanti c, C non ci consente ancora di pervenire al risultato sperato. Pertanto al fine di dimostrare la stabilitá, occorre distinguere i seguenti casi.

1. $0 \leq c \leq 1$
   In tal caso si ha $c(\nabla\psi)^2 \leq (\nabla\psi)^2$, pertanto

   $$\int_D \left[|\nabla\psi|^2 + c(\Delta\psi)^2 \right] dD \geq c \int_D \left[|\nabla\psi|^2 + (\Delta\psi)^2 \right] dD$$

   - se $C < 1$
     si ha $C(\Delta\psi_0)^2 < (\Delta\psi_0)^2$ e quindi

     $$c \int_D \left[|\nabla\psi|^2 + (\Delta\psi)^2 \right] dD \leq \int_D \left[|\nabla\psi_0|^2 + (\Delta\psi_0)^2 \right] dD$$

     In tal caso, scegliendo $\delta < c\epsilon$ si ha la stabilitá di $\mathbf{v}$ rispetto alla norma scelta.

   - se $C \geq 1$ allora

     $$c \int_D \left[|\nabla\psi|^2 + (\Delta\psi)^2 \right] dD \leq C \int_D \left[|\nabla\psi_0|^2 + (\Delta\psi_0)^2 \right] dD$$

     e pertanto, scegliendo $\delta < c/C\epsilon$, la stabilitá risulta dimostrata.

2. $1 < c \leq C$
   In tal caso si ha

   $$\int_D \left[|\nabla\psi|^2 + (\Delta\psi)^2 \right] dD < C \int_D \left[|\nabla\psi_0|^2 + (\Delta\psi_0)^2 \right] dD$$

   e scegliendo $\delta \leq \epsilon/C$, si perviene al risultato di stabilitá.

PARTE IV

CONVEZIONE NATURALE:
PROBLEMA DI BÉNARD

11 Problema di Bénard

Sia $\Omega = I\!R^2 \times [0, d]$ lo strato di $I\!R^3$ confinato tra i due piani rigidi paralleli $z = 0$ e $z = d$. Si supponga che lo strato sia riempito da un fluido (inizialmente in quiete) omogeneo, viscoso ed incompressibile soggetto unicamente alla forza di gravitá. Fra i due piani sia mantenuto un gradiente costante di temperatura: il piano inferiore sia "piú" caldo. Se il gradiente di temperatura é "piccolo", il fluido rimane in quiete ed il calore é trasportato attraverso il fluido soltanto per conduzione. Tuttavia quando il gradiente di temperatura supera un certo valore critico, il fluido é sottoposto a moti stazionari detti *correnti convettive*. Negli esperimenti effettuati da Bénard é stato osservato che all'insorgere dell'instabilitá il fluido si dispone con regolaritá in un certo numero di celle, la cui forma dipende dalla forma del contenitore in cui viene effettuato l'esperimento, ed il moto avviene entro queste celle. La spiegazione qualitativa del fenomeno della "convezione naturale" é la seguente. La porzione di fluido che confina con il piano inferiore delimitante lo strato si espande a causa del riscaldamento e diventando meno densa della parte rimanente in virtú del principio di Archimede dá luogo ad una forza di spinta che tende a portarla in alto. Questa forza di spinta é tuttavia frenata, ad esempio, dalla viscositá del fluido. Se il gradiente di temperatura é "piccolo", le forze viscose sono dominanti e il fluido rimane in quiete (il calore essendo trasportato solo per conduzione); quando il gradiente di temperatura supera un certo valore critico, le forze di spinta vincono la viscositá ed insorgono le correnti convettive. La sistemazione teorica di tale fenomeno fu data da Lord Rayleigh, il quale dimostró che a decidere la stabilitá/instabilitá del fluido fosse il parametro adimensionale

$$R^2 = \frac{g\alpha\beta}{k\nu} d^4 \qquad \text{(numero di Rayleigh)} \tag{143}$$

essendo, tra gli altri, d la profonditá dello strato e β il gradiente di temperatura. Rayleigh dimostró che se

$$R^2 > R_c^2 \tag{144}$$

si ha instabilitá, e quest'ultima insorge mediante un moto secondario stazionario.

Sorge cosí il problema fondamentale della determinazione numerica di R_c^2, noto come *problema di Bénard*. A tale scopo, supponendo che nello strato non vi sia alcuna sorgente di calore, se si suppone la validitá dell' approssimazione di *Oberbeck-Boussinesq* (i.e.: la densitá del fluido é costante in tutti i termini delle equazioni di *Navier-Stokes*, fatta eccezione del termine di forza nel quale essa varia linearmente con la temperatura), le equazioni di *Navier-Stokes* per i fluidi incompressibili diventano

$$\begin{cases} \mathbf{v}_t + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\nabla \left(\dfrac{p}{\rho_0} \right) + \mathbf{g}[1 - \alpha(T - T_0)] + \nu \Delta \mathbf{v} \\ \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \,, \end{cases} \tag{145}$$

con $\alpha =$ costante > 0 e T_0 un' opportuna temperatura di riferimento. Occorre osservare peró che il sistema (145) non é chiuso, in quanto manca l'equazione di evoluzione della temperatura.
Posto

$$f = \rho_0 c_P T \tag{146}$$

essendo $\rho(T_0) = \rho_0$ la densitá (costante) del fluido alla temperatura di riferimento T_0, $T(\mathbf{x}, t)$ il campo termico e c_P il calore specifico a pressione costante, applicando il *Teorema del Trasporto di Reynolds* e tenendo conto dell'incompressibilitá del fluido si ha

$$\frac{d}{dt}\int_{C(t)} f\ dC = \int_{C(t)} \dot{f} dC\,,$$

e quindi, in virtú della (146):

$$\frac{d}{dt}\int_{C(t)} f\ dC = \rho_0 c_P \int_{C(t)} \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T\right) dC$$

Indicato con $\mathbf{j}$ il flusso di f attraverso la frontiera di C, si ha

$$\frac{d}{dt}\int_{C(t)} f dC = -\int_{\partial C} \mathbf{j}\cdot\mathbf{n} d\sigma + \int_C \sigma\ dC = -\int_C \nabla\cdot\mathbf{j} dC + \int_C \sigma\ dC\,. \tag{147}$$

In virtú della legge di Fourier: $\mathbf{j} = -K\nabla T$ essendo K la conducibilitá termica, nell'ipotesi che K sia costante, si ha $\nabla\cdot\mathbf{j} = -K\Delta T$ e pertanto, in assenza di sorgenti di calore all'interno dello strato ($\sigma = 0$) si ottiene:

$$\int_C \left(\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T - k\Delta T\right) dC = 0\,, \quad k = K/(\rho_0 c_P)$$

i.e.

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T = k\Delta T\,. \tag{148}$$

La (148) é l'equazione di evoluzione della temperatura e va aggiunta al sistema (145). In definitiva il modello matematico per lo studio del problema di Bénard é il seguente

$$\begin{cases} \mathbf{v}_t + \mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{v} = -\nabla\left(\dfrac{p}{\rho_0}\right) + \mathbf{g}[1 - \alpha(T - T_0)] + \nu\Delta\mathbf{v} \\ \nabla\cdot\mathbf{v} = 0 \\ \dfrac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla T = k\Delta T\,. \end{cases} \tag{149}$$

Indicato con $\beta = \dfrac{T_1 - T_2}{d}$ il gradiente (medio) di temperatura nello strato, nel quale d é la distanza fra i due piani, lo scopo é quello di determinare il

gradiente termico critico, β_c, al di sopra del quale insorge la convezione ed al di sotto del quale il calore si trasporta solo per conduzione (assenza di convezione termica).
A tal fine si va alla ricerca della soluzione stazionaria (di conduzione): $\mathbf{v}_b = 0$ del problema (149) con le seguenti condizioni al contorno per la temperatura

$$\begin{cases} T = T_1 & \text{su } z = 0 \\ T = T_2 & \text{su } z = d\,, \end{cases} \tag{150}$$

nell'ipotesi che $T_1 > T_2$ e quindi che lo strato fluido sia riscaldato dal basso.

Dalla $(149)_3$, per la richiesta stazionarietá, si ricava necessariamente che $\Delta T_b = 0$, i.e. $T_b(z) = \alpha_1 z + \alpha_2$. Inoltre, in virtú delle condizioni al contorno si ottiene $\alpha_1 = -\beta$, $\alpha_2 = T_1$, e pertanto $T_b(z) = -\beta z + T_1$. La pressione si ottiene dalla $(149)_1$ ricordando che $\mathbf{v}_b = 0$. Infatti si ha

$$\nabla \left(\frac{p_b}{\rho_0} \right) + \mathbf{g}[1 - \alpha(-\beta z + T_1 - T_0)] = 0$$

da cui

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p_b}{\partial z} = -g[1 - \alpha(-\beta z + T_1 - T_0)]\,.$$

Pertanto la soluzione di conduzione é la seguente

$$m_0 = \{\mathbf{v}_b = 0, T_b(z) = -\beta z + T_1, p_b = p_b(z)\}\ . \tag{151}$$

Al fine di studiare la stabilitá e/o l'instabilitá della soluzione di conduzione m_0, si consideri la generica perturbazione $(\mathbf{u}, \theta, \pi)$. $(\mathbf{v}_b + \mathbf{u}, T_b(z) + \theta,\ p_b(z) + \pi)$ sará soluzione delle equazioni (149) e pertanto:

- dalla $(149)_1$ si ricava

$$(\mathbf{v}_b + \mathbf{u})_{,t} + (\mathbf{v}_b + \mathbf{u}) \cdot \nabla(\mathbf{v}_b + \mathbf{u}) = -\nabla \left(\frac{p_b + \pi}{\rho_0} \right) + \mathbf{g}[1 - \alpha(T_b + \theta - T_0)] +$$
$$+ \nu \Delta(\mathbf{v}_b + \mathbf{u})$$

  da cui essendo $\mathbf{v}_b = 0$, si ottiene

$$\mathbf{u}_{,t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{\pi}{\rho_0} \right) + g\alpha\theta\mathbf{k} + \nu\Delta\mathbf{u}\,;$$

- dalla $(149)_2$ (condizione di solenoidalitá) si ottiene $\nabla \cdot (\mathbf{v}_b + \mathbf{u}) = 0$ da cui segue

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0\,;$$

- infine dalla $(149)_3$ si ricava

$$\frac{\partial(T_b+\theta)}{\partial t} + (\mathbf{v}_b + \mathbf{u}) \cdot \nabla(T_b+\theta) = k(\Delta T_b + \Delta\theta)$$

da cui per la stazionarietá di T_b ed essendo $\mathbf{v}_b = 0$, si ottiene

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla T_b + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = k\Delta\theta\,.$$

Inoltre, essendo $\nabla T_b = (0,0,-\beta)$ e $\mathbf{u} = (u,v,w)$, si ha che $\mathbf{u}\cdot\nabla T_b = -\beta w$ e pertanto

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = \beta w + k\Delta\theta\,.$$

Riassumendo i risultati ottenuti, le equazioni che regolano l'evoluzione della generica perturbazione $(\mathbf{u},\theta,\pi)$ sono le seguenti

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\nabla\left(\dfrac{\pi}{\rho_0}\right) + g\alpha\theta\mathbf{k} + \nu\Delta\mathbf{u} \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \\ \dfrac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta = \beta w + k\Delta\theta\,, \end{cases} \tag{152}$$

cui si associano i dati iniziali:

$$\mathbf{u}(x,0) = \mathbf{u}_0(x)\,, \qquad \theta(x,0) = \theta_0(x)\,. \tag{153}$$

Nell'ipotesi che non ci sia conduzione attraverso i piani, si avrá che $\theta = 0$ su $z=0$ e $z=d$. Per quanto riguarda il campo cinetico, si possono considerare diversi tipi di condizioni al contorno:

1. si puó supporre che $\mathbf{u} = 0$ su $z=0$ e $z=d$, nel qual caso si ammette che i piani siano *Rigidi*;
2. si puó supporre che $w = 0$, $\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial v}{\partial z} = 0$ su $z=0$ e $z=d$. In tal caso si dirá che i piani delimitanti lo strato sono *Stress-Free*, i.e. liberi da sforzi tangenziali;
3. si puó supporre di considerare anche condizioni di tipo *misto* nell'ipotesi che un piano sia *rigido* mentre l'altro sia *stress-free*.

Nell'ipotesi che le perturbazioni siano periodiche[3] nelle direzioni x e y di periodi rispettivamente $2\pi/a_x$ e $2\pi/a_y$, ove a_x e a_y sono i numeri d'onda,

[3] Tale ipotesi é fisicamente plausibile, dal momento che é stato sperimentalmente dimostrato che il fluido si dispone in celle ed all'interno di ogni celletta la situazione si evolve allo stesso modo. Pertanto é plausibile assumere che la generica pertubazione al moto base stazionario (assenza di moti convettivi) siano periodiche.

indicata con $\Omega = \left[0, \frac{2\pi}{a_x}\right] \times \left[0, \frac{2\pi}{a_y}\right] \times [0, d]$ la cella di periodicitá, si ammetterano valide le seguenti condizioni:

$$\langle u \rangle = \langle v \rangle = 0\,, \tag{154}$$

al fine di assicurarsi l'unicitá di m_0.
In seguito, come giá accenato precedentemente, si dimostrerá che il "vero responsabile" dei risultati di stabilitá/instabilitá della soluzione di conduzione é il *numero di Rayleigh*:

$$R = \sqrt{\frac{\alpha g \beta d^4}{k\nu}}$$

essendo α il coefficiente di espansione termica, g l'accelerazione di gravitá, β il gradiente termico, k la conducibilitá termica e ν la viscositá cinematica del fluido.

Per raggiungere tale scopo si proceda ad adimensionalizzare il sistema (152) con le condizioni (153), adoperando la seguente adimensionalizzazione:

$$\begin{cases} t = \dfrac{d^2}{\nu} t^*\,, \qquad \mathbf{x} = d\mathbf{x}^* \qquad \pi = P\pi^*\,, \qquad P = \dfrac{\nu^2 \rho_0}{d^2} \\[2ex] \mathbf{u} = U\mathbf{u}^*\,, \qquad U = \dfrac{\nu}{d}\,, \qquad \theta = \bar{T}\theta^*\,, \qquad \bar{T} = U\sqrt{\dfrac{\beta\nu}{k\alpha g}} \end{cases}$$

ottenendo pertanto il sistema adimensionale

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} = -\nabla\pi + R\theta\mathbf{k} + \Delta\mathbf{u} \\[2ex] \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \\[2ex] Pr\left(\dfrac{\partial\theta}{\partial t} + \mathbf{u}\cdot\nabla\theta\right) = Rw + \Delta\theta \end{cases} \tag{155}$$

essendo $Pr = \nu/k$ il *numero di Prandtl*. Nel seguito, in conformitá con l'esperienza, si supporrá la periodicitá dei campi di perturbazione essendo $\Omega = [0, 2\pi/a_x] \times [0, 2\pi/a_y] \times [0, 1]$ la cella di periodicitá.
Sussistono le seguenti stime funzionali.

Teorema 7 (Disuguaglianza di Poincaré)
Sia Ω un dominio limitato di $\mathbb{R}^3$ con frontiera sufficientemente regolare. Allora in $C_0^2(\Omega)$ sussite la seguente disuguaglianza:

$$\|f\|^2 \leq \gamma\,\|\nabla f\|^2 \tag{156}$$

essendo $\gamma(\Omega)$ una costante positiva, dipendente dalla geometria e dalla misura di Ω.

Corollario 8 *Sia Ω un dominio di $I\!\!R^3$ limitato in almeno una direzione e si assuma che esso sia contenuto tra i piani $z = \pm l/2$. Sia I l'insieme delle funzioni appartenenti a $C_0^2(\Omega)$, periodiche nelle direzioni x e y di periodi, rispettivamente, a e b. In tale ipotesi la disuguaglianza (156) continua a sussistere in ogni cella di periodicitá, i.e. in ogni dominio V del tipo $[0, 2\pi/a] \times [0, 2\pi/b] \times [z_1, z_2]$ dove $z_i = z_i(x, y)$, $i = 1, 2$ sono le intersezioni $\partial V \cap \partial\Omega$. Nel caso in esame $l^2/2$ rapresenta un limite superiore per $\gamma(\Omega)$. In particolare se Ω é lo strato $z \in [0, 1]$, allora $V = [0, 2\pi/a] \times [0, 2\pi/b] \times [0, 1]$ é la relativa cella di periodicitá e si ottiene*

$$\gamma(\Omega) \leq \frac{1}{\pi^2}\,.$$

Teorema 9 (Disuguaglianza di Wirtinger)
Sia Ω un dominio limitato di $I\!\!R^3$ con frontiera sufficientemente regolare. Sia V una "cella" tridimensionale che per semplicitá si suppone data da: $V = [0, 2\pi/a] \times [0, 2\pi/b] \times [0, 1]$. nell'ipotesi che

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad su\ z = 0, 1 \tag{157}$$

ed inoltre

$$\langle f \rangle = 0\,, \tag{158}$$

allora sussiste la seguente disuguaglianza funzionale:

$$\|f\|^2 \leq k(\Omega)\|\nabla f\|^2\,, \tag{159}$$

nella quale k é una costante positiva dipendente da Ω.

Si effettuerá lo studio della stabilitá della soluzione nulla di (155) rispetto alla norma

$$V = \frac{1}{2}\,\|\mathbf{u}\|^2 + \frac{Pr}{2}\,\|\theta\|^2 \tag{160}$$

essendo $\|f\| = \left(\int_\Omega f^2 d\Omega\right)^{1/2}$ e $\langle f \rangle = \int_\Omega f d\Omega$. V é una funzione di Liapunov e puó, essere considerata come l'energia cinetica della perturbazione, quindi nel seguito si cercherá di sfruttare i teoremi di Liapunov per studiare la stabilitá. Per tale motivo si osservi che

$$\dot{V} = \frac{dV}{dt} = \int_\Omega \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}_{,t} d\Omega + Pr \int_\Omega \theta\theta_{,t} d\Omega$$

in particolare, lungo le soluzioni del sistema, risulta

$$\frac{dV}{dt} = \int_\Omega \mathbf{u}[-\mathbf{u}\cdot\nabla\mathbf{u} - \nabla\pi + R\theta\mathbf{k} + \Delta\mathbf{u}]d\Omega + \int_\Omega \theta[-Pr\mathbf{u}\cdot\nabla\theta + Rw + \Delta\theta]d\Omega =$$

$$= -\int_\Omega \nabla \cdot [\frac{u^2}{2}\mathbf{u} + \pi\mathbf{u}]d\Omega + 2R < \theta w > + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (u_i u_{i,j})_{,j} d\Omega +$$

$$- \|\nabla \mathbf{u}\|^2 + \int_\Omega \nabla \cdot [Pr\frac{\theta^2}{2}\mathbf{u}]d\Omega + \int_\Omega \nabla \cdot (\theta \nabla \theta) d\Omega - \|\nabla \theta\|^2$$

La particolare forma del dominio e le condizioni al contorno considerate, determinano le seguenti semplificazioni:

$$\int_\Omega \nabla \cdot (\theta \nabla \theta) d\Omega = \int_{\partial\Omega} \theta \nabla \theta \cdot \mathbf{n} d\sigma = 0\,;$$

$$\int_\Omega \nabla \cdot \left[Pr\frac{\theta^2}{2}\mathbf{u} \right] d\Omega = 0\,;$$

$$\int_\Omega \nabla \cdot \left[\frac{u^2}{2}\mathbf{u} + \pi\mathbf{u} \right] d\Omega = \int_{\partial\Omega} \left[\left(\frac{u^2}{2} + \pi \right) \mathbf{u} \right] \mathbf{n} d\sigma = 0\,;$$

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{3} (u_i u_{i,j})_{,j} d\Omega = 0\,,$$

in virtú delle quali si ottiene

$$\frac{dV}{dt} = 2R < \theta w > - \|\nabla \theta\|^2 - \|\nabla \mathbf{u}\|^2\,, \tag{161}$$

onde posto $D = \|\nabla \theta\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|^2$ e $I = 2 < \theta w >$, si ricava il seguente bilancio

$$\frac{dV}{dt} = D \left(R\frac{I}{D} - 1 \right). \tag{162}$$

La (162) rappresenta il punto di partenza per l'analisi della stabilitá/instabilitá della soluzione di conduzione, collegata all'esistenza del massimo del funzionale integrale

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}, \theta) = \frac{I}{D}\,. \tag{163}$$

L'esistenza del massimo per un funzionale di questo tipo é stata dimostrata nel 1968 dal prof. Salvatore Rionero, nell'ipotesi che il funzionale fosse limitato. Nel caso in esame, volendo ripercorrere la strada indicata dal prof. Salvatore Rionero, applicando la disuguaglianza di Poincaré, si ottiene il seguente limite superiore per il funzionale $\mathcal{F}$:

$$\begin{aligned} I = 2\langle \theta w \rangle = 2\int_\Omega \theta w d\Omega \le \|\theta\|^2 + \|w\|^2 \le \\ \le \gamma_1 \|\nabla \theta\|^2 + \gamma_1 \|\nabla w\|^2 \le \widetilde{\gamma}(\|\nabla \theta\|^2 + \|\nabla \mathbf{u}\|^2) \end{aligned} \tag{164}$$

con $\widetilde{\gamma} = max\{\gamma_1, \gamma_2\}$ e pertanto essendo

$$\mathcal{F} \le \tilde{\gamma}\,,$$

esiste certamente

$$\frac{1}{R_c} = \max_{\mathcal{H}} \frac{I}{D} \tag{165}$$

essendo $\mathcal{H}$ la classe delle perturbazioni cinematicamente ammissibili, i.e.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \{\mathbf{u}, \theta \in W^{1,2}(\Omega) : \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \text{ periodiche nelle direzioni } x \text{ e } y \\ \text{e verificanti le condizioni al contorno assegnate}\,.\} \end{aligned} \tag{166}$$

Osservazione 9 *Si osservi che, nella classe delle perturbazioni cinematicamente ammissibili, se $\langle w\theta \rangle < 0$, si ha stabilitá della soluzione di conduzione, per ogni valore del numero di Rayleigh R. Pertanto le perturbazioni piú pericolose sono quelle per le quali, nella classe delle perturbazioni cinematicamente ammissibili, risulti $\langle w\theta \rangle > 0$.*

Le equazioni di *Eulero-Lagrange* relative a (165), si ottengono considerando le variazioni prime del funzionale (163) rispetto a $\mathbf{u}$ e θ. Siano $\varepsilon \in I\!R$ e $\mathbf{u}' \in \mathcal{H}$ e si calcoli la variazione prima di $\mathcal{F}$ rispetto al campo cinetico $\mathbf{u}$, ponendo:

$$\mathcal{F}(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{u}', \theta) = \frac{2\langle \theta(w + \varepsilon w') \rangle - \langle (\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{u}')\nabla\omega \rangle}{\langle (\nabla \mathbf{u} + \varepsilon \nabla \mathbf{u}')^2 \rangle + \|\nabla\theta\|^2} = \frac{I(\varepsilon)}{D(\varepsilon)} \tag{167}$$

essendo ω un moltiplicatore di Lagrange che traduce l'esistenza del vincolo di solenoidalitá del campo cinetico. Dalla (167) si ottiene:

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\varepsilon} = \frac{[2\langle \theta w' \rangle - 2\langle \mathbf{u}'\nabla\omega \rangle] D(\varepsilon)}{D^2(\varepsilon)} - \frac{I(\varepsilon) 2\langle (\nabla \mathbf{u} + \varepsilon \nabla \mathbf{u}')\nabla \mathbf{u}' \rangle}{D^2(\varepsilon)}$$

e pertanto, in corrispondenza di $\varepsilon = 0$, si ricava:

$$\left(\frac{d\mathcal{F}}{d\varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\langle \theta w' \rangle - 2\langle \mathbf{u}'\nabla\omega \rangle}{D(0)} - \frac{I(0)}{D(0)} \frac{2\langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}' \rangle}{D(0)} = 0$$

i.e.

$$R_c < \theta w' > - R_c < \mathbf{u}'\nabla\omega > - < \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}' > = 0 \qquad \forall \mathbf{u}' \in \mathcal{H}\,.$$

Inoltre, essendo $\langle \nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{u}' \rangle = -\langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle$ si ottiene

$$R_c \langle \theta \mathbf{u}' \mathbf{k} \rangle - R_c \langle \mathbf{u}'\nabla\omega \rangle + \langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle = 0\,.$$

Pertanto, posto $\omega_1 = R_c \omega \Rightarrow \nabla\omega_1 = R_c \nabla\omega$ si ricava

$$R_c \langle \theta \mathbf{u}' \mathbf{k} \rangle - \langle \mathbf{u}'\nabla\omega_1 \rangle + \langle \Delta \mathbf{u}, \mathbf{u}' \rangle = 0 \Leftrightarrow \int_\Omega (R_c \theta \mathbf{k} - \nabla\omega_1 + \Delta \mathbf{u})\mathbf{u}' d\Omega = 0\,,$$

i.e.

$$R_c \theta \mathbf{k} + \Delta \mathbf{u} = \nabla\omega_1\,. \tag{168}$$

Si consideri ora la variazione prima del funzionale $\mathcal{F}$, rispetto a θ, e ripercorrendo la dimostrazione che ha condotto alla (168), si ponga

$$\mathcal{F}(\mathbf{u},\theta+\varepsilon\theta') = \frac{2\langle w(\theta+\varepsilon\theta')\rangle - 2\langle \mathbf{u}'\nabla\mathbf{u}\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2 + \langle(\nabla\theta+\varepsilon\nabla\theta')^2\rangle} = \frac{I(\varepsilon)}{D(\varepsilon)}$$

ed essendo:

$$\frac{dF}{d\varepsilon} = \frac{2\langle w\theta'\rangle D(\varepsilon) - I(\varepsilon)2\langle(\nabla\theta+\varepsilon\nabla\theta')\nabla\theta'\rangle}{D^2(\varepsilon)}$$

si ottiene:

$$\left(\frac{dF}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad R_c\langle w\theta'\rangle + \langle\Delta\theta'\rangle = 0\,, \qquad \forall\theta' \in \mathcal{H}$$

i.e.:

$$R_c w + \Delta\theta = 0\,. \tag{169}$$

Le equazioni di Eulero-Lagrange relative al problema variazionale (165) sono pertanto:

$$\begin{cases} R_c\theta\mathbf{k} + \Delta\mathbf{u} = \nabla\omega_1 \\ \\ R_c w + \Delta\theta = 0\,. \end{cases} \tag{170}$$

Effettuando la proiezione sull'asse z del doppio rotore alla $(170)_1$ si ottiene un'equazione nelle sole incognite θ e w che puó essere risolta insieme alla $(170)_2$. Infatti, cosí facendo si ottiene il sistema

$$\begin{cases} R_c\Delta_1\theta + \Delta\Delta w = 0 \\ \\ R_c w + \Delta\theta = 0\,. \end{cases} \tag{171}$$

Il sistema (171) é autonomo e pertanto é possibile separare la dipendenza spaziale da quella temporale, considerando il seguente sviluppo (*Normal Modes Solutions*):

$$w(x,y,z,t) = w(z)e^{i(a_x x + a_y y) - \sigma t}\,, \qquad \theta(x,y,z,t) = \theta(z)e^{i(a_x x + a_y y) - \sigma t}\,.$$

Sostituendo le soluzioni di tipo *Normal modes* nel sistema (171), nel caso di condizioni al contorno di tipo *stress-free*, si ottiene:

$$\begin{cases} -R_c a^2\theta(z) + (D^2 - a^2)^2 w(z) = 0 \\ \\ R_c w(z) + (D^2 - a^2)\theta(z) = 0\,. \end{cases} \tag{172}$$

In particolare dalla $(172)_1$ si ricava $\theta(z) = \dfrac{(D^2-a^2)^2 w(z)}{R_c a^2}$ che, sostituita nella $(172)_2$, porta al seguente risultato

$$R_c w(z) + \frac{1}{R_c a^2}(D^2 - a^2)^3 w(z) = 0\,. \tag{173}$$

La (173) é un'equazione di sesto grado nella funzione incognita $w(z)$. In virtú delle *Trial Functions* (Funzioni Test), si ottiene il valore cercato per R_c. Infatti, posto $w(z) = w_0 sen(n\pi z)$ si ha $R_c^2 = \dfrac{(n^2\pi^2 + a^2)^3}{a^2}$ ed il valore critico sará $\widetilde{R_c} = \min\limits_n \min\limits_{a^2} R_c^2 = 657.511$. I casi in cui le condizioni al contorno sono di tipo *rigido* o di tipo *misto* non sono altrettanto semplici da risolvere. Nel primo caso il valore critico é: $R_c^2 = 1707.76$; nel caso *misto*, invece $R_c^2 = 1100.65$.

12 Principio di linearizzazione

Quando si studia un fenomeno F ad un numero finito di gradi di libertá, il cui modello matematico é costituito da equazioni differenziali a derivate ordinarie (O.D.Es.), generalmente i risultati di stabilitá/instabilitá lineare possono essere trasferiti al caso non lineare, in virtú del *principio di linearizzazione*, attraverso l'analisi degli autovalori della matrice dei coefficienti del sistema linearizzato.
Nell'intento di ottenere un analogo principio di linearizzazione nell'ambito di modelli retti da equazioni differenziali a derivate parziali (P.D.Es.), insorgono una serie di complicazioni. In tal caso, infatti, trattandosi di un fenomeno ad un numero infinito di gradi di libertá, occorre specificare la norma rispetto alla quale si vuole studiare la stabilitá/instabilitá di una assegnata soluzione stazionaria. Inoltre, essendo in uno spazio infinito-dimensionale, lo spettro dell'operatore lineare L del modello matematico considerato é costituito da infiniti autovalori.
Rinunciando ad enunciare il principio nel caso generale, ci si limiti a studiare in dettaglio cosa accade nel caso specifico del *Problema di Bénard*. A tal fine, linearizzando il modello di Oberbeck-Boussinesq e scrivendolo in forma astratta, si studierá l'operatore lineare L, concludendo, nel caso specifico, che i risultati di stabilitá della soluzione di conduzione coincidono con quelli di instabilitá. Linearizzando il sistema (155) si ottiene

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla\pi + R\theta\mathbf{k} + \Delta\mathbf{u} \\ \nabla\cdot\mathbf{u} = 0 \\ Pr\dfrac{\partial\theta}{\partial t} = Rw + \Delta\theta \end{cases} \tag{174}$$

cui si associano le condizioni iniziali

$$\mathbf{u}(\mathbf{x},0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})\,, \qquad \theta(\mathbf{x},0) = \theta_0(\mathbf{x})$$

e le condizioni al contorno di tipo *stress-free*.
Per scrivere il sistema in forma astratta si ricorre al vettore a cinque compo-

nenti $\mathbf{U}$: $\mathbf{U}^t = (u, v, w, \pi, \theta)$ ed a due operatori B ed L di cui L é l'operatore lineare del modello, in modo tale da poter scrivere

$$B\mathbf{U}_{,\mathbf{t}} = L\mathbf{U}\,. \tag{175}$$

Sritto il sistema (174) componente per componente, i.e.:

$$\begin{cases} u_{,t} = -\dfrac{\partial \pi}{\partial x} + \Delta u \\[2ex] v_{,t} = -\dfrac{\partial \pi}{\partial y} + \Delta v \\[2ex] w_{,t} = -\dfrac{\partial \pi}{\partial z} + \Delta w + R\theta \\[2ex] 0 = -\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial w}{\partial x} \\[2ex] Pr\dfrac{\partial \theta}{\partial t} = Rw + \Delta\theta \end{cases} \tag{176}$$

si ha che

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Pr \end{pmatrix}$$

e

$$L = \begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 & -\partial_x & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & -\partial_y & 0 \\ 0 & 0 & \Delta & -\partial_z & R \\ -\partial_x & -\partial_y & -\partial_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R & 0 & \Delta \end{pmatrix}$$

Sussiste la seguente proprietá.

Proposizione 4 *L'operatore lineare L é simmetrico rispetto al prodotto scalare di L^2.*

Dimostrazione Dalla definizione di L, si ha che

$$< L\mathbf{U_1}, \mathbf{U_2} >= \int_\Omega \left[\left(\Delta u_1 - \frac{\partial \pi_1}{\partial x} \right) u_2 + \left(\Delta v_1 - \frac{\partial \pi_1}{\partial y} \right) v_2 \right] d\Omega + \tag{177}$$

$$+ \int_\Omega \left[\left(\Delta w_1 - \frac{\partial \pi_1}{\partial z} + R\theta_1 \right) w_2 + \left(-\frac{\partial u_1}{\partial x} - \frac{\partial v_1}{\partial y} - \frac{\partial w_1}{\partial z} \right) \pi_2 + (Rw_1 + \Delta\theta_1)\theta_2 \right] d\Omega\,.$$

Considerando ora singolarmente i termini della (177), si ricava che

- 1)
$$\int_\Omega \Delta u_1 \cdot u_2 d\Omega = \int_\Omega \nabla\cdot(u_2\nabla u_1)d\Omega - \int_\Omega \nabla u_2\cdot\nabla u_1 d\Omega =$$
$$= \int_\Omega \nabla\cdot[u_2\nabla u_1 - u_1\nabla u_2]d\Omega + \int_\Omega u_1\Delta u_2 d\Omega$$
da cui, applicando il teorema della divergenza, servendosi delle condizioni al contorno e ricordando la periodicitá lungo le direzioni x e y dei campi cinetico e termico, si ottiene $\int_\Omega \nabla\cdot[u_2\nabla u_1 - u_1\nabla u_2]d\Omega = 0$ e pertanto $\int_\Omega \Delta\mathbf{u}_1\cdot\mathbf{u}_2 d\Omega = \int_\Omega \mathbf{u}_1\cdot\Delta\mathbf{u}_2 d\Omega$.

- 2) Un discorso analogo si ripete per $\int_\Omega \Delta v_1 \cdot v_2 d\Omega$, $\int_\Omega \Delta w_1\cdot w_2 d\Omega$, $\int_\Omega \Delta\theta_1\,\theta_2 d\Omega$.

- 3)
$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial\pi}{\partial x}u_2 + \frac{\partial\pi}{\partial y}v_2 + \frac{\partial\pi}{\partial z}w_2\right)d\Omega =$$
$$-\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x}(\pi_1 u_2) + \frac{\partial}{\partial y}(\pi_1 v_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\pi_1 w_2)\right)d\Omega +$$
$$-\int_\Omega \left(\pi_1\frac{\partial u_2}{\partial x} + \pi_1\frac{\partial v_2}{\partial y} + \pi_1\frac{\partial w_2}{\partial z}\right)d\Omega = -\int_\Omega \pi_1\nabla\cdot\mathbf{u}_2 d\Omega = 0\,.$$

- 4) Analizzando i termini che restano si puó osservare che essi non creano alcun problema dal punto di vista della simmetria, da cui la tesi.

La simmetria dell'operatore lineare L comporta pertanto che i suoi autovalori $\{\sigma_n\}_n$ siano reali. Inoltre gli autovalori sono al piú un'infinitá numerabile, si accumulano all'infinito e le parti reali possono essere ordinate in senso crescente. $re(\sigma_1) \leq re(\sigma_2) \leq \ldots$ (*Teorema di Prodi-Sattinger*).
Essendo la (175) una P.D.E. vettoriale ed autonoma, separando la dipendenza spaziale da quella temporale, si ottiene

$$\begin{cases} u(P,t) = u(P)e^{\sigma t} \\ v(P,t) = v(P)e^{\sigma t} \\ w(P,t) = w(P)e^{\sigma t} \\ \pi(P,t) = \pi(P)e^{\sigma t} \\ \theta(P,t) = \theta(P)e^{\sigma t} \end{cases} \tag{178}$$

e pertanto la (175) diventa

$$B\sigma U(P)e^{\sigma t} = LU(P)e^{\sigma t} \quad \Leftrightarrow \quad B\sigma U(P) = LU(P)$$

che rappresenta un classico problema agli autovalori. In virtú delle proprietá degli autovalori di L, si ottiene l'instabilitá lineare se il piú piccolo autovalore risulta essere positivo. In particolare, separando la dipendenza spaziale da quella temporale nei campi di perturbazione del sistema (174), si ottiene

$$\begin{cases} \sigma \mathbf{u}(P) = -\nabla \pi(P) + R\theta(P) + \Delta \mathbf{u} \\ \\ Pr\sigma\theta(P) = Rw + \Delta\theta \,. \end{cases} \tag{179}$$

Il parametro critico R_c, per il quale la condizione

$$R > R_c$$

assicura l'instabilitá della soluzione di conduzione, é quello per il quale

$$\begin{cases} R_c\theta + \Delta \mathbf{u} = \nabla \pi \\ \\ R_c w + \Delta\theta = 0 \end{cases} \tag{180}$$

le quali, considerata la terza componente del doppio rotore della $(180)_1$, coincidono con le equazioni di *Eulero-Lagrange* per la determinazione della soglia critica di stabilitá non lineare.

Riferimenti bibliografici

1. S. Rionero, "Lezioni di Meccanica Razionale", Liguori Editore (1976)

2. S. Rionero, Appunti dattiloscritti del Corso di "Istituzioni di Fisica Matematica" (A.A. 1983-1984)