



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI ENNA "KORE"

FACOLTÀ DI INGEGNERIA ED ARCHITETTURA

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA CIVILE E AMBIENTALE

CORSO DI LAUREA IN INGEGNERIA AEROSPAZIALE

E DELLE INFRASTRUTTURE AERONAUTICHE

ESEMPI SVOLTI DI PROVE D'ESAME DI

SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

AGGIORNATO AL COMPITO DEL 06/03/2012

Indice

Indice.....	2
Introduzione	3
1 Esercizio tipo.....	4
2 Soluzione del compito dell'8 febbraio 2011	13
3 Soluzione del compito del 22 febbraio 2011	27
4 Soluzione del compito del 16 giugno 2011.....	40
5 Soluzione del compito del 18 luglio 2011	53
6 Soluzione del compito del 05 settembre 2011	62
7 Soluzione del compito del 19 settembre 2011	72
8 Soluzione del compito del 06 ottobre 2011	82
9 Soluzione del compito del 16 febbraio 2012	90
10 Soluzione del compito del 6 marzo 2012.....	99

Introduzione

In questo documento vengono riportate le soluzioni complete e commentate di alcuni esercizi d'esame di Scienza delle Costruzioni. L'intenzione dello scrivente è quella di costituire un database di esercizi d'esame mediante il quale l'allievo possa prepararsi ad affrontare la prova scritta. Il numero degli esercizi riportati nel seguito, quindi, è destinato ad aumentare man mano che si svolgeranno gli esami scritti di Scienza delle Costruzioni.

I primi esercizi sono stati commentati per intero ed in modo esaustivo, e, quando possibile, sono state presentate diverse strategie di soluzione. Per i successivi esercizi si sono evitate inutili ripetizioni e si sono presentati solamente i risultati significativi, riservandosi di commentare ogni passaggio più delicato o l'introduzione di un concetto o di una operazione mai affrontata prima.

Ricordando che lo spirito della presente raccolta è quello di fornire agli allievi un supporto didattico di preparazione alla prova scritta, si invitano i lettori a dare riscontro di ogni errore od inesattezza riscontrata.

Il docente del corso
Giacomo Navarra

1 Esercizio tipo

Tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione e verificare la sezione più sollecitata del sistema in Figura 1.1 trascurando la deformabilità assiale e a taglio.

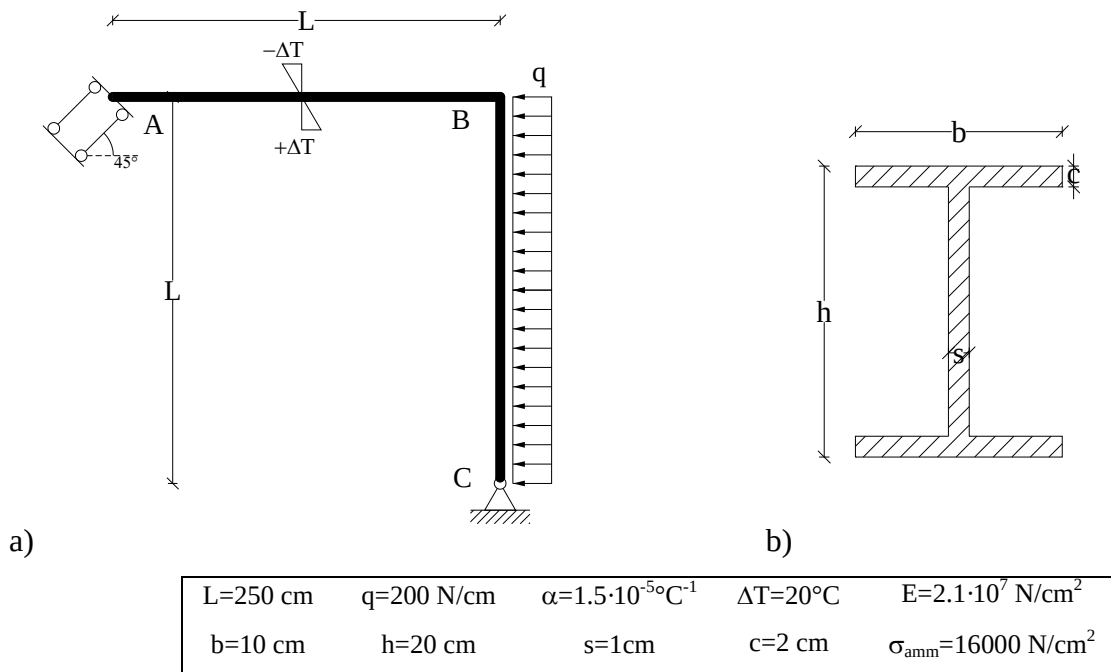


Figura 1.1. Sistema da analizzare; a) schema d'assi; b) sezione trasversale.

1.1 Riconoscimento dei gradi di iperstaticità

Il sistema è composto da due aste vincolate da un incastro interno (vicolo di continuità) e quindi possiede nel piano tre gradi di libertà. I gradi di libertà sottratti dai vincoli esterni sono quattro, quindi il sistema è una volta iperstatico ($q = 3n - v = 3 + (2 + 2) = -1$).

1.2 Calcolo delle caratteristiche inerziali della sezione trasversale

La sezione trasversale a I possiede due assi di simmetria quindi il baricentro G coinciderà con l'intersezione di tali assi. Inoltre gli assi di simmetria saranno anche assi principali di inerzia ed il centro di taglio C_T coinciderà con il baricentro.

L'area della sezione vale:

$$A = bh - (b - s)(h - 2c) = 56 \text{ cm}^2 \quad (1.1)$$

Il momento di inerzia rispetto l'asse forte (l'asse orizzontale baricentrico x_1) si calcola come:

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-s)(h-2c)^3}{12} = 3594.67 \text{ cm}^4 \quad (1.2)$$

1.3 Metodo di analisi (metodo delle forze): posizione del problema

Secondo quanto prescritto dal metodo delle forze, il sistema assegnato è equivalente alla sovrapposizione dei due schemi 0) e 1) indicati in Figura 1.2, in cui l'incognita iperstatica X deve essere valutata in maniera tale che la rotazione del punto A φ_A deve essere nulla, ovvero deve essere verificata la seguente equazione di congruenza:

$$\varphi_A = \varphi_A^{(0)} + \varphi_A^{(1)} X = 0 \quad (1.3)$$

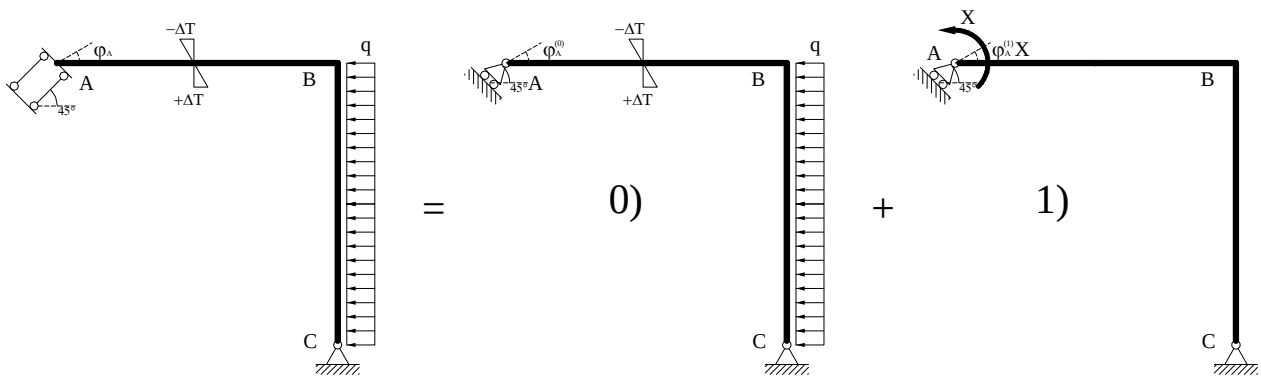


Figura 1.2. Struttura iperstatica e sua scomposizione negli schemi isostatici 0) e 1).

Una volta determinata l'incognita iperstatica X come mostrato nel seguito, i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione agenti sul sistema assegnato possono essere ricavate mediante il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{cases} N(x_3) = N^{(0)}(x_3) + N^{(1)}(x_3) X \\ T(x_3) = T^{(0)}(x_3) + T^{(1)}(x_3) X \\ M(x_3) = M^{(0)}(x_3) + M^{(1)}(x_3) X \end{cases} \quad (1.4)$$

1.4 Soluzione dello schema isostatico 0)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 0) si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 1.3, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$H_A^{(0)} = V_A^{(0)} = V_C^{(0)} = \frac{qL}{4} = 12500 \text{ N}; \quad H_C^{(0)} = \frac{3qL}{4} = 37500 \text{ N}; \quad (1.5)$$

$$N_{AB}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{4} = ; \quad N_{BC}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4} \quad (1.6)$$

$$T_{AB}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4}; \quad T_{BC}^{(0)}(x_3) = q\left(\frac{L}{4} - x_3\right) \quad (1.7)$$

$$M_{AB}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4}x_3; \quad M_{BC}^{(0)}(x_3) = \frac{q}{4}(L^2 + Lx_3 - 2x_3^2) \quad (1.8)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 1.3-a.

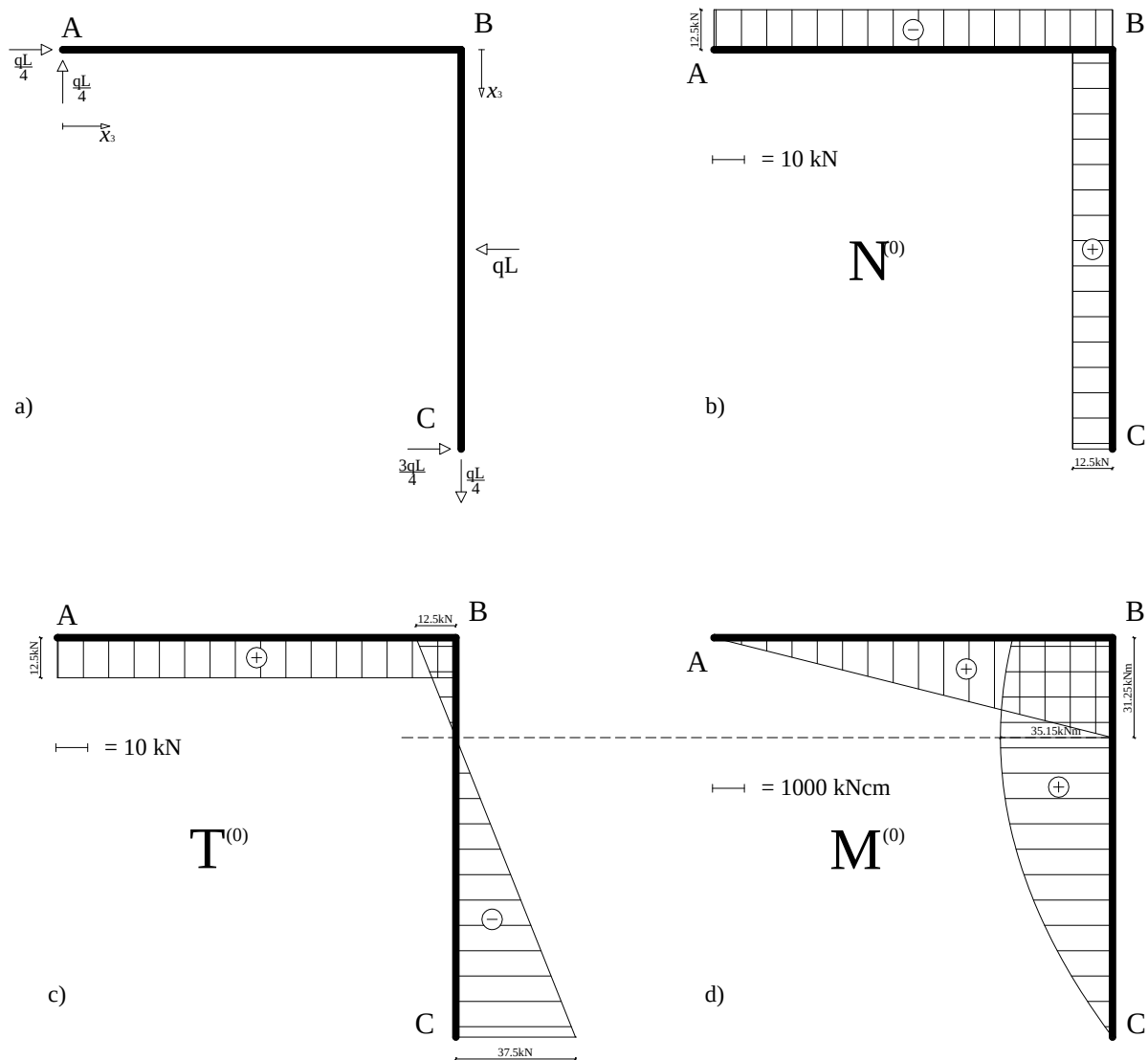


Figura 1.3. Schema isostatico 0); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

1.5 Soluzione dello schema isostatico 1)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 1), in cui l'incognita iperstatica assume valore unitario ($X=1$), si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche

della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 1.4, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$H_A^{(1)} = V_A^{(1)} = H_C^{(1)} = V_C^{(1)} = \frac{1}{2L} \quad (1.9)$$

$$N_{AB}^{(1)}(x_3) = -\frac{1}{2L} = ; \quad N_{BC}^{(1)}(x_3) = \frac{1}{2L} \quad (1.10)$$

$$T_{AB}^{(1)}(x_3) = \frac{1}{2L} ; \quad T_{BC}^{(1)}(x_3) = \frac{1}{2L} \quad (1.11)$$

$$M_{AB}^{(1)}(x_3) = \frac{x_3 - 2L}{2L} ; \quad M_{BC}^{(1)}(x_3) = \frac{x_3 - L}{2L} \quad (1.12)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 1.4-a.

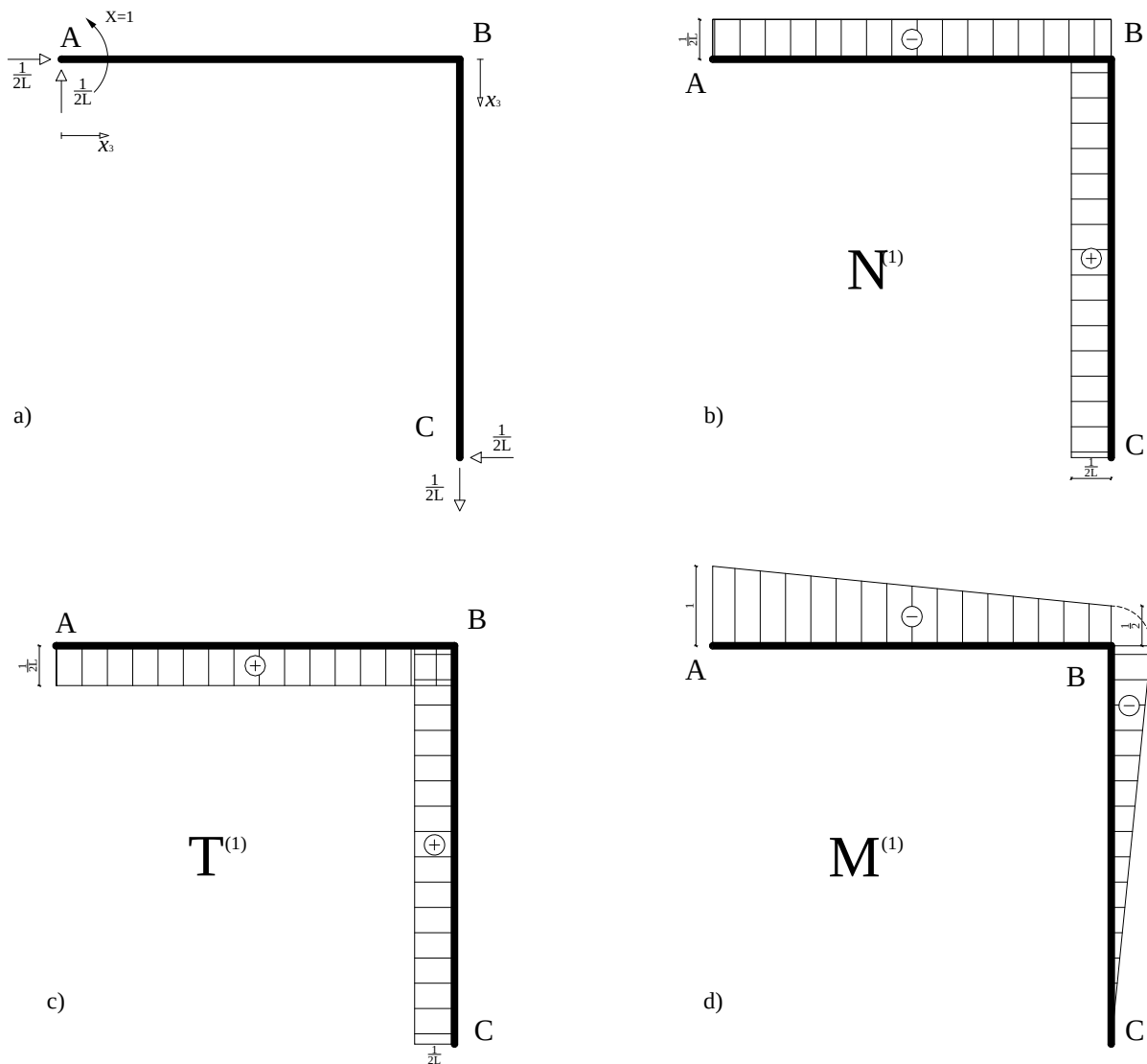


Figura 1.4. Schema isostatico 1); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

1.6 Determinazione dell'incognita iperstatica

Come detto in precedenza l'incognita iperstatica va determinata imponendo l'equazione di congruenza (1.3). Per compiere questo passo è necessario procedere al calcolo delle rotazioni $\varphi_A^{(0)}$ e $\varphi_A^{(1)}$. A tale scopo si utilizzerà il metodo della forza unitaria.

1.6.1 Calcolo di $\varphi_A^{(0)}$

La determinazione di $\varphi_A^{(0)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 0) come sistema congruente reale ed il sistema 1) come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 0) vale:

$$L_e = 1 \cdot \varphi_A^{(0)} \quad (1.13)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni (meccaniche e distorcenti) del sistema 0) vale:

$$\begin{aligned} L_i &= \int_S M^{(1)}(x_3) \left[\frac{M^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} + k_T \right] dx_3 \\ &= \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \left(\frac{M_{AB}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} + \frac{2\alpha\Delta T}{h} \right) dx_3 + \int_0^L M_{BC}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BC}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 \end{aligned} \quad (1.14)$$

che, sostituendo le espressioni ricavate in (1.8) e in (1.12), diventa:

$$L_i = \int_0^L \frac{x_3 - 2L}{2L} \left(\frac{qLx_3}{4EI_{x_1}} + \frac{2\alpha\Delta T}{h} \right) dx_3 + \int_0^L \frac{x_3 - L}{2L} \frac{q}{4EI_{x_1}} (L^2 + Lx_3 - 2x_3^2) dx_3 \quad (1.15)$$

Risolvendo l'integrale in (1.15) ed eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$\varphi_A^{(0)} = -\frac{7}{48} \frac{qL^3}{EI_{x_1}} - \frac{3\alpha\Delta TL}{2h} = -0.0116621 \text{ rad} \quad (1.16)$$

1.6.2 Calcolo di $\varphi_A^{(1)}$

La determinazione di $\varphi_A^{(1)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 1) sia come sistema congruente reale che come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 1) vale:

$$L_e = 1 \cdot \varphi_A^{(1)} \quad (1.17)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni (solo meccaniche) del sistema 1) vale:

$$L_i = \int_S M^{(1)}(x_3) \left[\frac{M^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} \right] dx_3 = \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BC}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BC}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 \quad (1.18)$$

che, sostituendo le espressioni ricavate in (1.12), diventa:

$$L_i = \int_0^L \frac{1}{EI_{x_1}} \left(\frac{x_3 - 2L}{2L} \right)^2 dx_3 + \int_0^L \frac{1}{EI_{x_1}} \left(\frac{x_3 - L}{2L} \right)^2 dx_3 = \frac{2L}{3EI_{x_1}} \quad (1.19)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$\varphi_A^{(1)} = \frac{2L}{3EI_{x_1}} = 2.20786 \cdot 10^{-9} \text{ rad/Ncm} \quad (1.20)$$

1.6.3 Calcolo della incognita iperstatica

La determinazione del valore della incognita iperstatica X può essere condotta sostituendo i valori delle rotazioni appena determinati nell'equazione di congruenza (1.3):

$$\varphi_A^{(0)} + \varphi_A^{(1)} X = 0 \rightarrow X = -\frac{\varphi_A^{(0)}}{\varphi_A^{(1)}} = \frac{7}{32} qL^2 + \frac{9EI_{x_1} \alpha \Delta T}{4h} = 52821.2 \text{ Nm} \quad (1.21)$$

1.7 Determinazione dei diagrammi della sollecitazione

Applicando l'equazione (1.4), come descritto in precedenza, è possibile ricavare i valori delle reazioni vincolari e l'andamento delle caratteristiche della sollecitazione del sistema iperstatico assegnato:

$$H_A = V_A = V_C = \frac{qL}{4} + \frac{X}{2L} = 23064 \text{ N}; \quad (1.22)$$

$$H_C = \frac{3qL}{4} - \frac{X}{2L} = 26935 \text{ N}; \quad M_A = X = 52821.2 \text{ Nm}$$

$$N_{AB}(x_3) = -\frac{qL}{4} - \frac{X}{2L} = -23064 \text{ N}; \quad N_{BC}(x_3) = \frac{qL}{4} + \frac{X}{2L} = 23064 \text{ N}; \quad (1.23)$$

$$T_{AB}(x_3) = \frac{qL}{4} + \frac{X}{2L} = 23064 \text{ N}; \quad T_{BC}(x_3) = q \left(\frac{L}{4} - x_3 \right) + \frac{X}{2L} = 23064 - 200 x_3 \text{ N} \quad (1.24)$$

$$M_{AB}(x_3) = \frac{qL}{4} x_3 + X \frac{x_3 - 2L}{2L} = -52821.2 + 23064 x_3 \text{ Ncm} \quad (1.25)$$

$$M_{BC}(x_3) = -100(x_3 - 250)(x_3 + 19.3581) \text{ Ncm}$$

I corrispondenti diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione sono riportati nella seguente Figura 1.5.

1.8 Verifica della sezione più sollecitata

Dall'esame dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione riportati nella Figura 1.5 si deduce che la sezione più sollecitata è quella denotata con la lettera **A**, che è soggetta alle seguenti caratteristiche della sollecitazione:

$$N_A = -23064\text{N}; \quad T_A = 23064\text{N}; \quad M_A = -5282120\text{Ncm}. \quad (1.26)$$

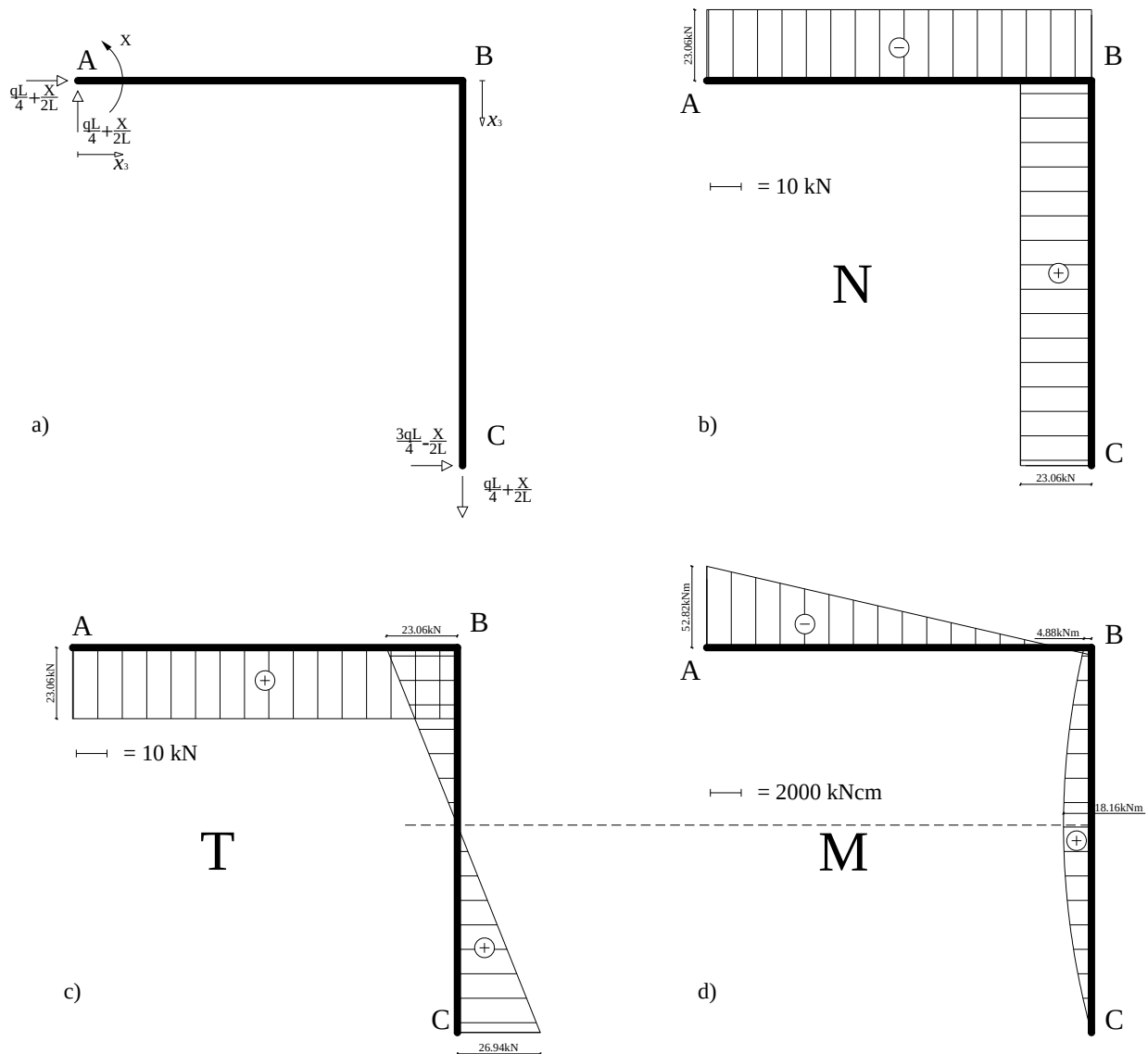


Figura 1.5. Schema iperstatico; a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

La distribuzione delle tensioni normali e tangenziali dovute alle caratteristiche della sollecitazione riportate nella (1.26) si calcolano, rispettivamente, applicando la formula di Navier per le tensioni normali e la teoria approssimata del taglio secondo Jourawski per le tensioni tangenziali.

Per quanto riguarda le tensioni normali, l'andamento è quello indicato dalla relazione:

$$t_{33} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_{x_1}} x_2 = -\frac{23064}{56} - \frac{5282120}{3594.67} x_2 = -411.85 - 1469.43 x_2 \text{ N/cm}^2 \quad (1.27)$$

I valori estremi delle tensioni si verificano in corrispondenza delle fibre inferiori ed superiori ottenendo:

$$t_{33,i} = t_{33}|_{x_2=10\text{cm}} = -15106.16 \text{ N/cm}^2 \quad t_{33,s} = t_{33}|_{x_2=-10\text{cm}} = 14282.46 \text{ N/cm}^2 \quad (1.28)$$

Il diagramma delle tensioni normali t_{33} è riportato nella Figura 1.6.

Per quanto attiene alle tensioni tangenziali, la loro determinazione può essere condotta applicando la nota formula di Jourawski a due sezioni, una posta sull'ala della sezione a I, l'altra posta sull'anima, così come illustrato nella Figura 1.6:

$$t_{31} = -\frac{TS_{x_1}^{\Omega'}}{I_{x_1}c} = \frac{T(h-c)}{2I_{x_1}} y = 57.746y \text{ N/cm}^2 \text{ con } t_{31,max} = t_{31}|_{y=\frac{b}{2}} = 288.73 \text{ N/cm}^2 \quad (1.29)$$

$$t_{32} = -\frac{TS_{x_1}^{\Omega''}}{I_{x_1}s} = -1154.92 - 51.3298z + 3.20811z^2 \text{ N/cm}^2 \text{ con } S_{x_1}^{\Omega''} = \frac{bc(h-c)}{2} + sz\left(\frac{h}{2} - c - \frac{z}{2}\right); \quad (1.30)$$

il valori estremi della tensione t_{32} si hanno in corrispondenza della fibra baricentrica ed in corrispondenza dell'intersezione delle ali all'anima in cui valgono:

$$t_{32,max} = t_{32}|_{z=\frac{h}{2}-c} = -1360.24 \text{ N/cm}^2 \quad t_{32,min} = t_{32}|_{z=0} = -1154.92 \text{ N/cm}^2 \quad (1.31)$$

Il diagramma delle tensioni tangenziali t_{31} e t_{32} è riportato nella Figura 1.6.

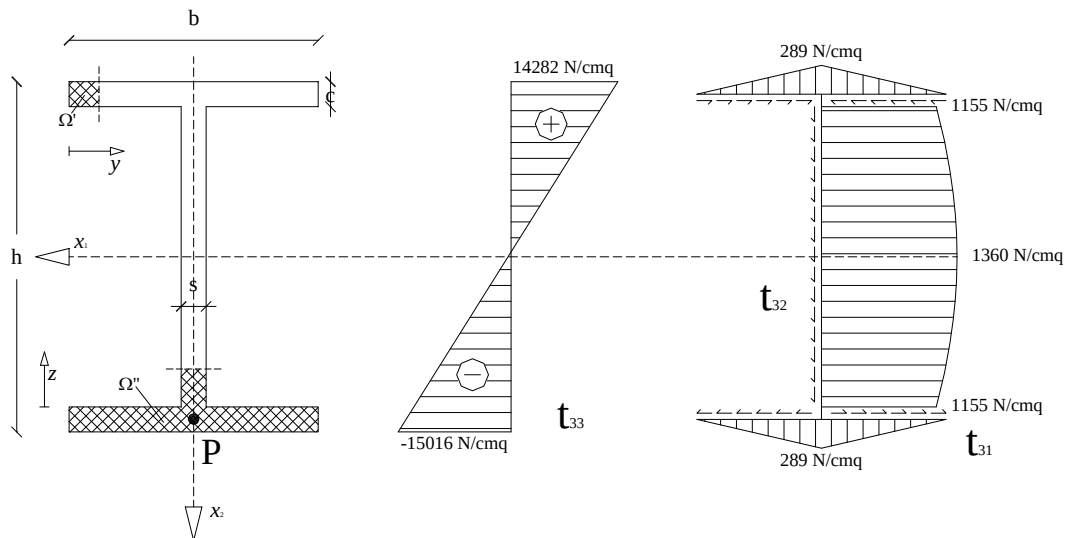


Figura 1.6. Tensioni normali e tangenziali sulla sezione trasversale.

Data l'entità delle tensioni appena determinate, la verifica di sicurezza può essere condotta, secondo il criterio di resistenza di Von Mises, in corrispondenza del punto **P** di intersezione tra l'ala inferiore e l'anima, assumendo, che lì agiscano le tensioni $t_{33,i}$, $t_{31,max}$ e $t_{32,min}$:

$$\sigma_{id} = \sqrt{t_{33,i}^2 + 3(t_{31,max}^2 + t_{32,min}^2)} = 15246.2 \text{ N/cm}^2 < \sigma_{amm} = 16000 \text{ N/cm}^2 \quad (1.32)$$

VERIFICA SODDISFATTA

2 Soluzione del compito dell'8 febbraio 2011

- Tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della struttura riportata in figura
- Verificare la sezione più sollecitata.

Dati:

$E = 2.1 \cdot 10^6 \text{ daN/cm}^2$	$\sigma_{amm} = 1900 \text{ daN/cm}^2$	$\phi_0 = 0.01 \text{ rad}$
$L = 300 \text{ cm}$	$q = 10 \text{ daN/cm}$	$\theta = 45^\circ$
$b = 15 \text{ cm}$	$h = 25 \text{ cm}$	$c = 2 \text{ cm}$
		$s = 1 \text{ cm}$

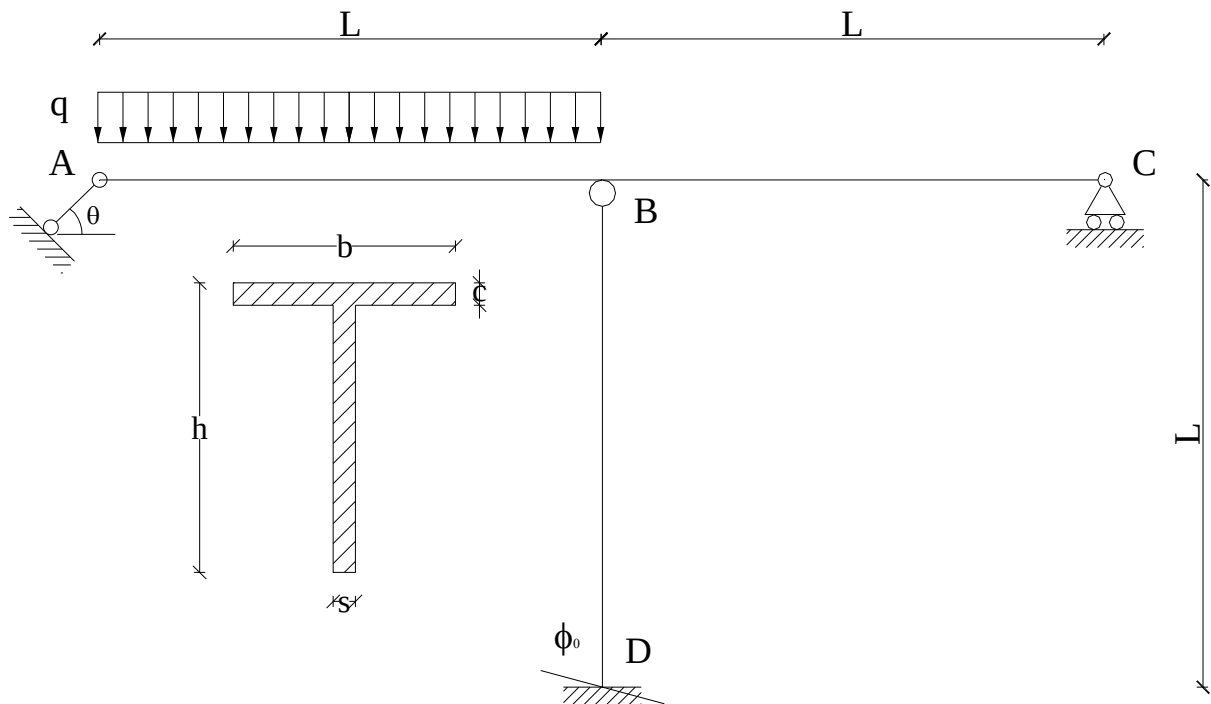


Figura 2.1. Sistema da analizzare; schema d'assi e sezione trasversale.

2.1 Riconoscimento dei gradi di iperstaticità

Il sistema privo di vincoli è composto da due aste e quindi possiede nel piano sei gradi di libertà. I gradi di libertà sottratti dai vincoli esterni ed interni sono sette, quindi il sistema è una volta iperstatico ($q = 3n - v = 6 - (1 + 1 + 3 + 2) = -1$).

2.2 Calcolo delle caratteristiche inerziali della sezione trasversale

La sezione trasversale a T possiede un asse di simmetria verticale, quindi il baricentro G si troverà su tale asse. Per determinare la coordinata x_2 del baricentro G si determinano dapprima l'area:

$$A = bh - (b-s)(h-c) = 53 \text{ cm}^2 \quad (2.1)$$

ed il momento statico rispetto un asse passante per il lembo inferiore della sezione:

$$S_{x_0} = \frac{bh^2}{2} - \frac{(b-s)(h-c)^2}{2} = 984.5 \text{ cm}^3 \quad (2.2)$$

La coordinata x_2 del baricentro sarà quindi:

$$y_G = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{984.5}{53} = 18.58 \text{ cm}^3 \quad (2.3)$$

Il momento di inerzia rispetto l'asse forte (l'asse orizzontale baricentrico x_1) si calcola come:

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{3} - \frac{(b-s)(h-c)^3}{3} - Ay_G^2 = 3058.11 \text{ cm}^4 \quad (2.4)$$

Infine è da rilevare che per una forza di taglio diretta in direzione x_2 , il centro di taglio C_T coinciderà con il baricentro G.

2.3 Metodo di analisi (metodo delle forze): posizione del problema

Secondo quanto prescritto dal metodo delle forze, il sistema assegnato è equivalente alla sovrapposizione di schemi isostatici ottenuti mediante la soppressione di un numero di vincoli a molteplicità semplice pari al grado di iperstaticità, quindi, nel caso in esame, sopprimendo una molteplicità vincolare. Vi saranno, ovviamente, diverse possibilità di scelta per pervenire agli schemi isostatici e nel seguito ne verranno esaminate due.

Una volta determinata l'incognita iperstatica X come mostrato nel seguito, i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione agenti sul sistema assegnato possono essere ricavate mediante il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{cases} N(x_3) = N^{(0)}(x_3) + N^{(1)}(x_3)X \\ T(x_3) = T^{(0)}(x_3) + T^{(1)}(x_3)X \\ M(x_3) = M^{(0)}(x_3) + M^{(1)}(x_3)X \end{cases} \quad (2.5)$$

2.4 Soluzione numero 1- Rimozione del carrello in C

Scegliendo di rendere isostatico il sistema mediante la soppressione del carrello in C si hanno gli schemi isostatici indicati in Figura 2.2, in cui l'incognita iperstatica X deve essere valutata in

maniera tale che l'abbassamento del punto **C** v_C , deve essere nullo, ovvero deve essere verificata la seguente equazione di congruenza:

$$v_C = v_C^{(0)} + v_C^{(1)} X = 0 \quad (2.6)$$

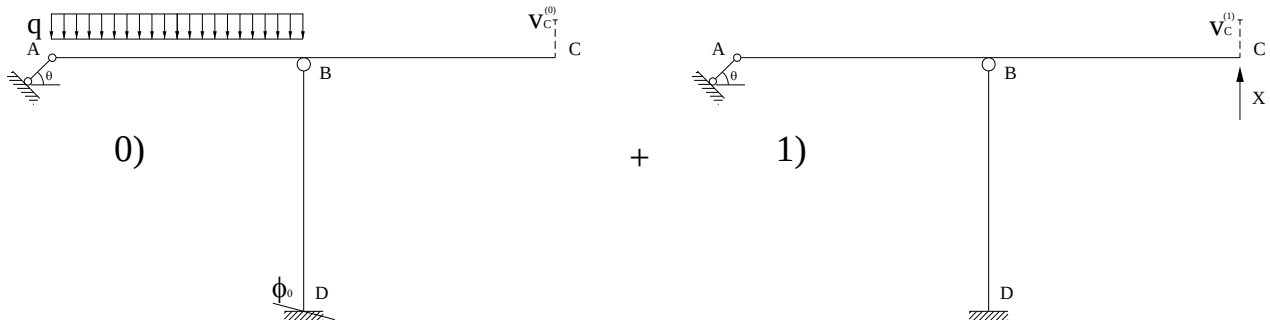


Figura 2.2. Scomposizione della struttura iperstatica negli schemi isostatici 0) e 1) – soluzione 1.

2.4.1 Soluzione dello schema isostatico 0)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 0) si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 2.3, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

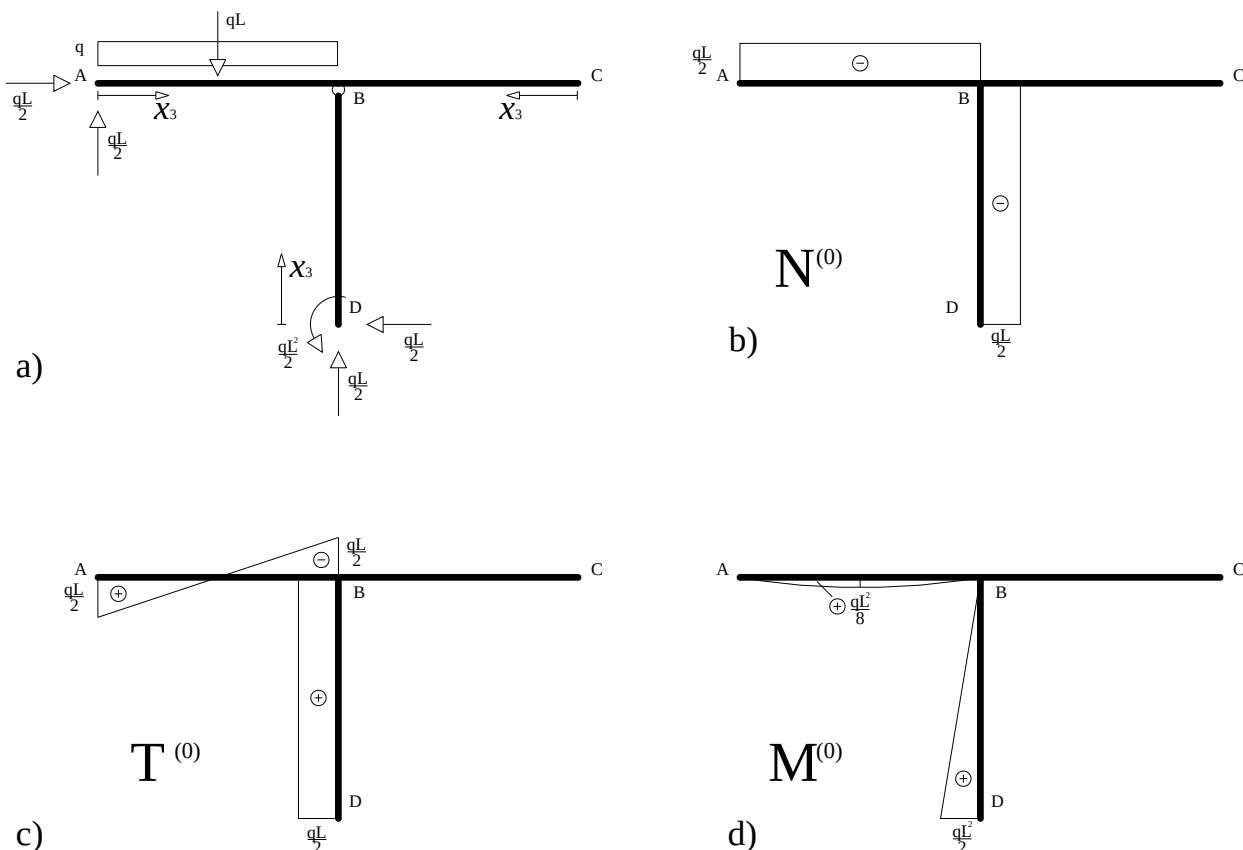


Figura 2.3. Schema isostatico 0); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

$$H_A^{(0)} = V_A^{(0)} = V_D^{(0)} = H_D^{(0)} = \frac{qL}{2} = 15\text{kN}; \quad M_D^{(0)} = \frac{qL^2}{2} = 4500 \text{ kNcm} \quad (2.7)$$

$$N_{AB}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{2}; \quad N_{BC}^{(0)}(x_3) = 0; \quad N_{BD}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{2}; \quad (2.8)$$

$$T_{AB}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{2} - qx_3; \quad T_{BC}^{(0)}(x_3) = 0; \quad T_{BD}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{2}; \quad (2.9)$$

$$M_{AB}^{(0)}(x_3) = \frac{q}{2}x_3(L - x_3); \quad M_{BC}^{(0)}(x_3) = 0; \quad M_{BD}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{2}(L - x_3); \quad (2.10)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 2.3-a.

2.4.2 Soluzione dello schema isostatico 1)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 1), in cui l'incognita iperstatica assume valore unitario ($X=1$), si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 2.4, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$H_A^{(1)} = V_A^{(1)} = H_D^{(1)} = 1; \quad V_D^{(1)} = 2; \quad M_D^{(1)} = L \quad (2.11)$$

$$N_{AB}^{(1)}(x_3) = -1; \quad N_{BC}^{(1)}(x_3) = 0; \quad N_{BD}^{(1)}(x_3) = 2; \quad (2.12)$$

$$T_{AB}^{(1)}(x_3) = 1; \quad T_{BC}^{(1)}(x_3) = 1; \quad T_{BD}^{(1)}(x_3) = 1; \quad (2.13)$$

$$M_{AB}^{(1)}(x_3) = x_3; \quad M_{BC}^{(1)}(x_3) = x_3; \quad M_{BD}^{(1)}(x_3) = L - x_3; \quad (2.14)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 2.4-a.

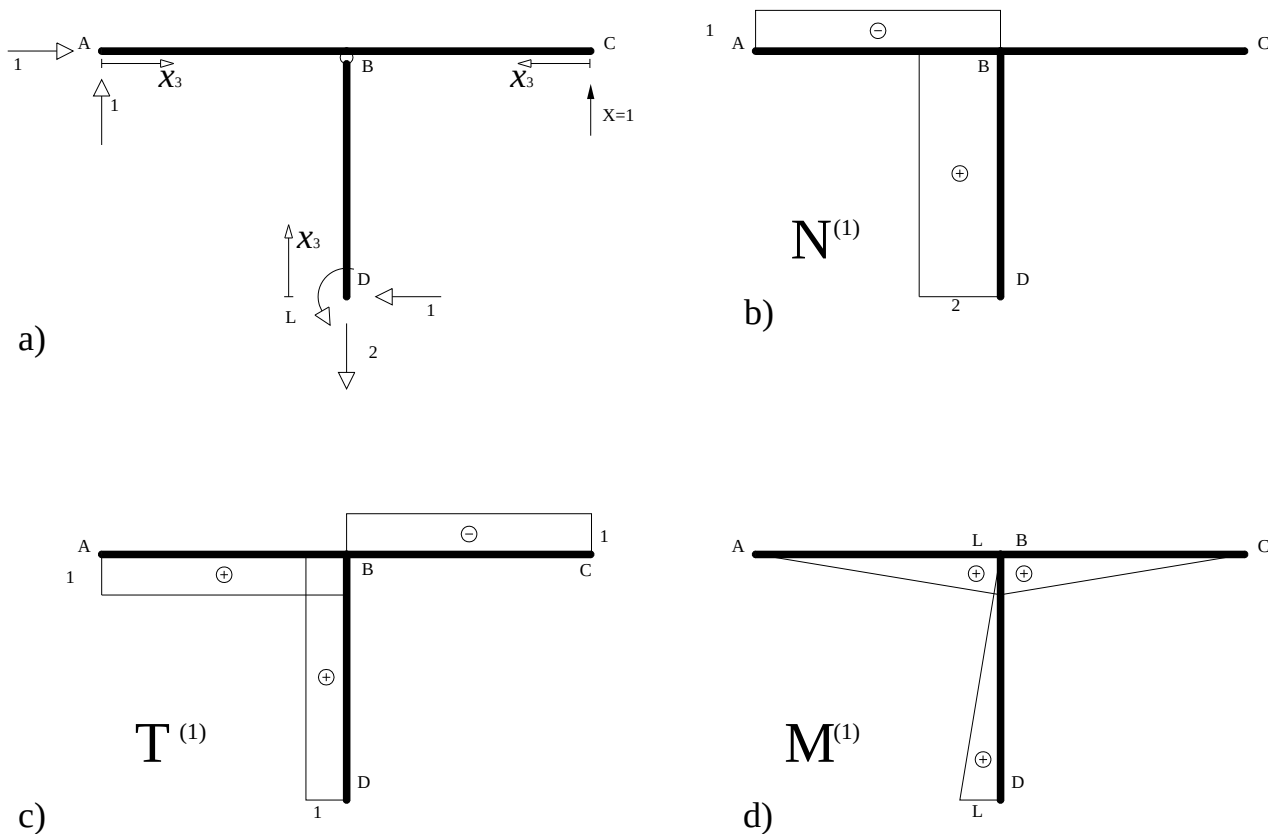


Figura 2.4. Schema isostatico 1); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

2.4.3 Determinazione dell'incognita iperstatica

Come detto in precedenza l'incognita iperstatica va determinata imponendo l'equazione di congruenza (2.6). Per compiere questo passo è necessario procedere al calcolo degli spostamenti $v_C^{(0)}$ e $v_C^{(1)}$. A tale scopo si utilizzerà il metodo della forza unitaria.

2.4.3.1 Calcolo di **Errore**. *Non si possono creare oggetti dalla modifica di codici di campo.*

La determinazione di $v_C^{(0)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 0) come sistema congruente reale ed il sistema 1) come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 0) vale:

$$L_e = 1 \cdot v_C^{(0)} + M_D^{(1)} \cdot \phi_0 = v_C^{(0)} - \phi_0 L \quad (2.15)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 0) vale:

$$\begin{aligned} L_i &= \int_S M^{(1)}(x_3) \left[\frac{M^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} \right] dx_3 \\ &= \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \left(\frac{M_{AB}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} \right) dx_3 + \int_0^L M_{BD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BD}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 \end{aligned} \quad (2.16)$$

che, sostituendo le espressioni ricavate in (2.10) e in (2.14), diventa:

$$L_i = \int_0^L \frac{q x_3^2}{2EI_{x_1}} (L - x_3) dx_3 + \int_0^L \frac{qL}{2EI_{x_1}} (L - x_3)^2 dx_3 = \frac{5}{24} \frac{qL^4}{EI_{x_1}} \quad (2.17)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$v_C^{(0)} = \frac{5}{24} \frac{qL^4}{EI_{x_1}} + \phi_0 L = 5.6276 \text{ cm} \quad (2.18)$$

2.4.3.2 Calcolo di $v_C^{(1)}$

La determinazione di $v_C^{(1)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 1) sia come sistema congruente reale che come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 1) vale:

$$L_e = 1 \cdot v_C^{(1)} \quad (2.19)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 1) vale:

$$\begin{aligned} L_i &= \int_S M^{(1)}(x_3) \left[\frac{M^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} \right] dx_3 = \\ &= \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BC}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BC}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BD}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 \end{aligned} \quad (2.20)$$

che, sostituendo le espressioni ricavate in (2.14), diventa:

$$L_i = 2 \int_0^L \frac{x_3^2}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L \frac{(L - x_3)^2}{EI_{x_1}} dx_3 = \frac{L^3}{EI_{x_1}} \quad (2.21)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$v_C^{(1)} = \frac{L^3}{EI_{x_1}} = 4.20427 \cdot 10^{-4} \text{ cm/N} \quad (2.22)$$

2.4.3.3 Calcolo della incognita iperstatica

La determinazione del valore della incognita iperstatica X può essere condotta sostituendo i valori delle rotazioni appena determinati nell'equazione di congruenza (2.6):

$$v_C^{(0)} + v_C^{(1)}X = 0 \rightarrow X = -\frac{v_C^{(0)}}{v_C^{(1)}} = -\frac{5}{24}qL - \frac{EI_{x_1}\phi_0}{L^2} = -13385.3\text{N} \quad (2.23)$$

2.5 Soluzione numero 2- Rimozione dell'incastro in D

Scegliendo di rendere isostatico il sistema mediante la soppressione della molteplicità vincolare legata alla rotazione in D si hanno gli schemi isostatici indicati in Figura 2.5, in cui l'incognita iperstatica X deve essere valutata in maniera tale che la rotazione del punto **D**, φ_D , deve essere pari al cedimento anelastico ϕ_0 , ovvero deve essere verificata la seguente equazione di congruenza:

$$\varphi_D = \varphi_D^{(0)} + \varphi_D^{(1)}X = \phi_0 \quad (2.24)$$

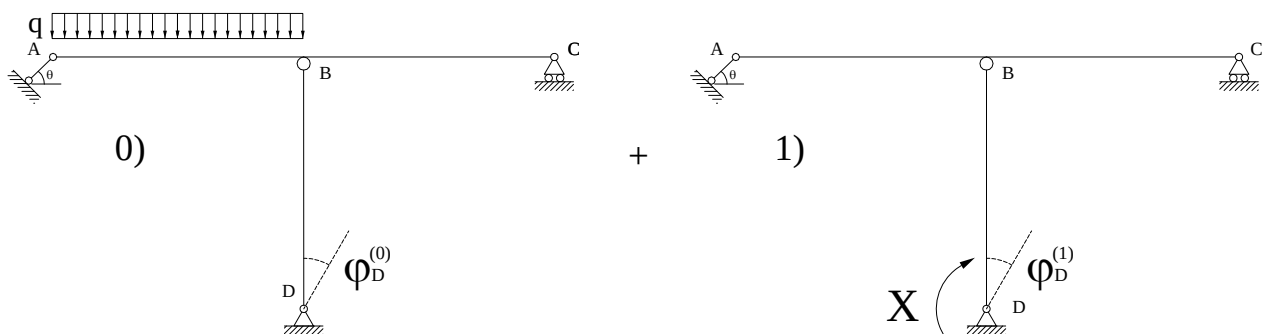


Figura 2.5. Scomposizione della struttura iperstatica negli schemi isostatici 0) e 1) – soluzione 2.

2.5.1 Soluzione dello schema isostatico 0)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 0) si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 2.6, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

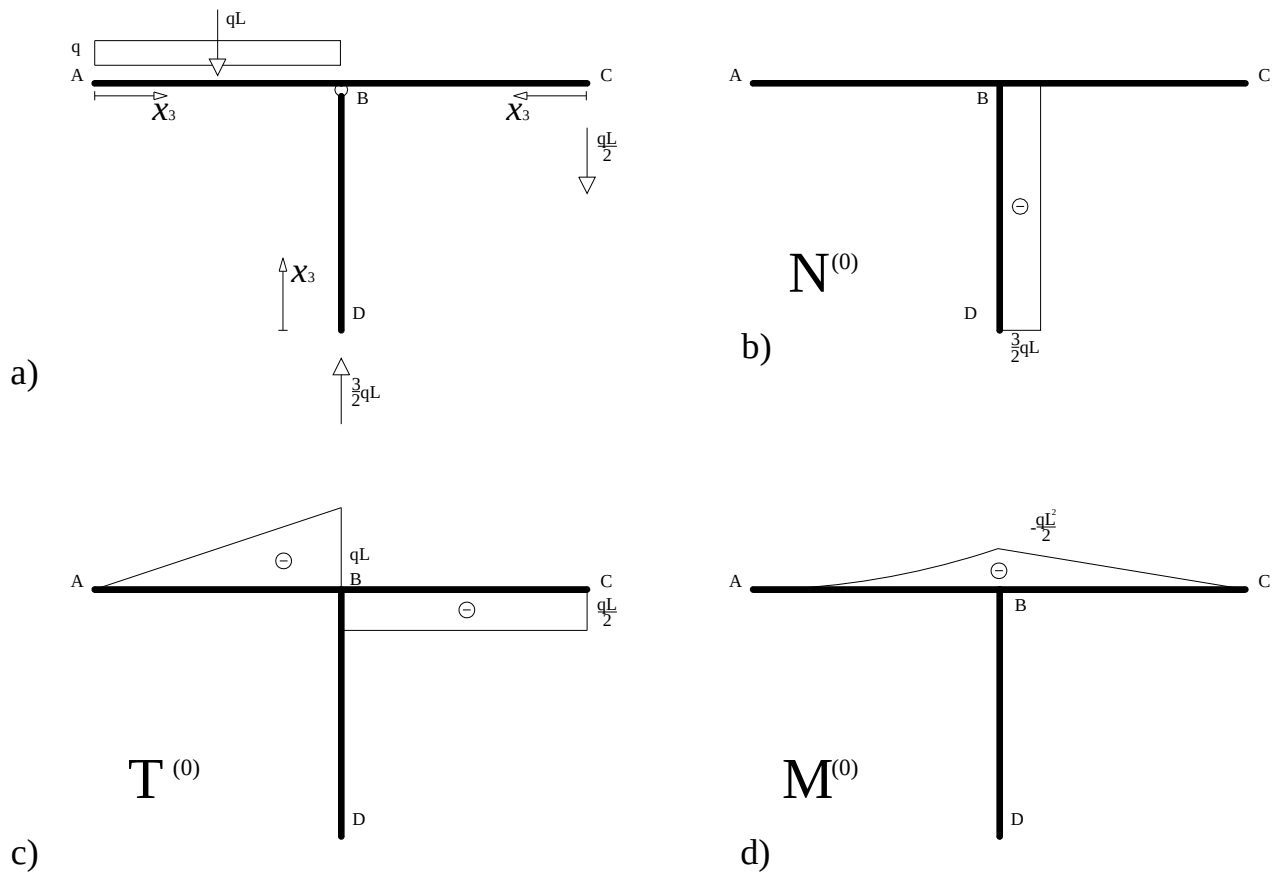


Figura 2.6. Schema isostatico 0); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

$$H_A^{(0)} = V_A^{(0)} = H_D^{(0)} = 0; \quad V_C^{(0)} = \frac{qL}{2} = 15 \text{ kN}; \quad V_D^{(0)} = \frac{3}{2} qL = 45 \text{ kN}; \quad (2.25)$$

$$N_{AB}^{(0)}(x_3) = 0; \quad N_{BC}^{(0)}(x_3) = 0; \quad N_{BD}^{(0)}(x_3) = -\frac{3}{2} qL; \quad (2.26)$$

$$T_{AB}^{(0)}(x_3) = -q x_3; \quad T_{BC}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{2}; \quad T_{BD}^{(0)}(x_3) = 0; \quad (2.27)$$

$$M_{AB}^{(0)}(x_3) = -\frac{q x_3^2}{2}; \quad M_{BC}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{2} x_3; \quad M_{BD}^{(0)}(x_3) = 0; \quad (2.28)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 2.6-a.

2.5.2 Soluzione dello schema isostatico 1)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 1), in cui l'incognita iperstatica assume valore unitario ($X=1$), si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 2.7, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$H_A^{(1)} = V_A^{(1)} = H_D^{(1)} = V_C^{(1)} = \frac{1}{L}; \quad V_D^{(1)} = \frac{2}{L}; \quad (2.29)$$

$$N_{AB}^{(1)}(x_3) = \frac{1}{L}; \quad N_{BC}^{(1)}(x_3) = 0; \quad N_{BD}^{(1)}(x_3) = -\frac{2}{L}; \quad (2.30)$$

$$T_{AB}^{(1)}(x_3) = -\frac{1}{L}; \quad T_{BC}^{(1)}(x_3) = \frac{1}{L}; \quad T_{BD}^{(1)}(x_3) = -\frac{1}{L}; \quad (2.31)$$

$$M_{AB}^{(1)}(x_3) = -\frac{x_3}{L}; \quad M_{BC}^{(1)}(x_3) = -\frac{x_3}{L}; \quad M_{BD}^{(1)}(x_3) = \frac{x_3 - L}{L}; \quad (2.32)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 2.7-a.

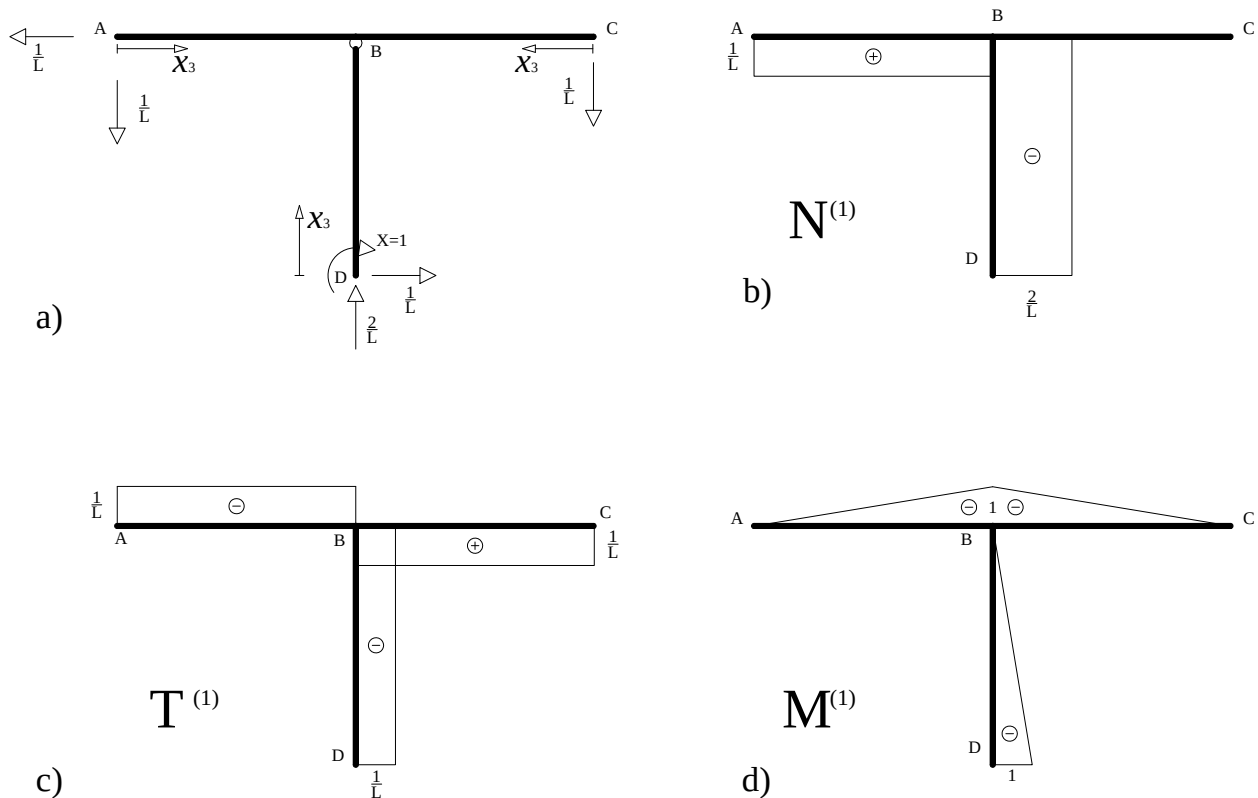


Figura 2.7. Schema isostatico 1); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

2.5.3 Determinazione dell'incognita iperstatica

L'incognita iperstatica va determinata imponendo l'equazione di congruenza (2.24). Per compiere questo passo è necessario procedere al calcolo delle rotazioni $\varphi_D^{(0)}$ e $\varphi_D^{(1)}$. A tale scopo si utilizzerà il metodo della forza unitaria.

2.5.3.1 Calcolo di $\varphi_D^{(0)}$

La determinazione di $\varphi_D^{(0)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 0) come sistema congruente reale ed il sistema 1) come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 0) vale:

$$L_e = 1 \cdot \varphi_D^{(0)} \quad (2.33)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 0) vale:

$$\begin{aligned} L_i &= \int_S M^{(1)}(x_3) \left[\frac{M^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} \right] dx_3 \\ &= \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \left(\frac{M_{AB}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} \right) dx_3 + \int_0^L M_{BC}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BC}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 \end{aligned} \quad (2.34)$$

che, sostituendo le espressioni ricavate in (2.28) e in (2.32), diventa:

$$L_i = \int_0^L \frac{q x_3^3}{2EI_{x_1} L} dx_3 + \int_0^L \frac{q x_3^2}{2EI_{x_1}} dx_3 = \frac{7}{24} \frac{qL^3}{EI_{x_1}} \quad (2.35)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$\varphi_D^{(0)} = \frac{7}{24} \frac{qL^3}{EI_{x_1}} = 1.22625 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \quad (2.36)$$

2.5.3.2 Calcolo di $\varphi_D^{(1)}$

La determinazione di $\varphi_D^{(1)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 1) sia come sistema congruente reale che come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 1) vale:

$$L_e = 1 \cdot \varphi_D^{(1)} \quad (2.37)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 1) vale:

$$\begin{aligned} L_i &= \int_S M^{(1)}(x_3) \left[\frac{M^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} \right] dx_3 = \\ &= \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BC}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BC}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BD}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 \end{aligned} \quad (2.38)$$

che, sostituendo le espressioni ricavate in (2.32), diventa:

$$L_i = 2 \int_0^L \frac{x_3^2}{EI_{x_1} L^2} dx_3 + \int_0^L \frac{(x_3 - L)^2}{EI_{x_1} L^2} dx_3 = \frac{L}{EI_{x_1}} \quad (2.39)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$\varphi_D^{(1)} = \frac{L}{EI_{x_1}} = 4.67141 \cdot 10^{-9} \text{ rad/Ncm} \quad (2.40)$$

2.5.4 Calcolo della incognita iperstatica

La determinazione del valore della incognita iperstatica X può essere condotta sostituendo i valori delle rotazioni appena determinati nell'equazione di congruenza (2.24):

$$\varphi_D^{(0)} + \varphi_D^{(1)} X = \phi_0 \rightarrow X = \frac{\phi_0 - \varphi_D^{(0)}}{\varphi_D^{(1)}} = -\frac{7}{24} qL^2 + \frac{EI_{x_1} \phi_0}{L} = -484320 \text{ Ncm} \quad (2.41)$$

2.6 Determinazione dei diagrammi della sollecitazione

Applicando l'equazione (2.5), come descritto in precedenza, è possibile ricavare i valori delle reazioni vincolari e l'andamento delle caratteristiche della sollecitazione del sistema iperstatico assegnato. Questo può essere fatto a partire dalle due soluzioni determinate ottenendo, ovviamente, gli stessi andamenti delle reazioni vincolari e delle caratteristiche della sollecitazione. Operando, per esempio, secondo la prima soluzione trovata si ha:

$$H_A = V_A = H_C = \frac{qL}{2} + X = 15000 - 13385 = 1615 \text{ N};$$
$$V_D = \frac{qL}{2} - 2X = 15000 + 26770 = 41770 \text{ N}; \quad V_D = X = 13385 \text{ N} \quad (2.42)$$

$$M_D = \frac{qL^2}{2} + XL = 4500 - 4015.5 = 484.5 \text{ kNcm}$$

$$N_{AB}(x_3) = -\frac{qL}{2} - X = -1615 \text{ N}; \quad N_{BC}(x_3) = 0 \quad N_{BD}(x_3) = -\frac{qL}{2} + 2X = -41770 \text{ N} \quad (2.43)$$

$$T_{AB}(x_3) = q \left(\frac{L}{2} - x_3 \right) + X = 1615 - 100 x_3 \text{ N}; \quad T_{BC}(x_3) = X = -13385 \text{ N} \quad (2.44)$$

$$T_{BD}(x_3) = \frac{qL}{2} + X = 1615 \text{ N}$$

$$\begin{aligned}
 M_{AB}(x_3) &= \frac{q x_3}{2} (L - x_3) + X x_3 = 1615 x_3 - 50 x_3^2 \text{ Ncm} \\
 M_{BC}(x_3) &= X x_3 = -13385 x_3 \text{ Ncm} \\
 M_{BD}(x_3) &= \left(\frac{qL}{2} + X \right) (L - x_3) = 484500 - 1615 x_3 \text{ Ncm}
 \end{aligned}
 \tag{2.45}$$

I corrispondenti diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione sono riportati nella seguente Figura 2.8.

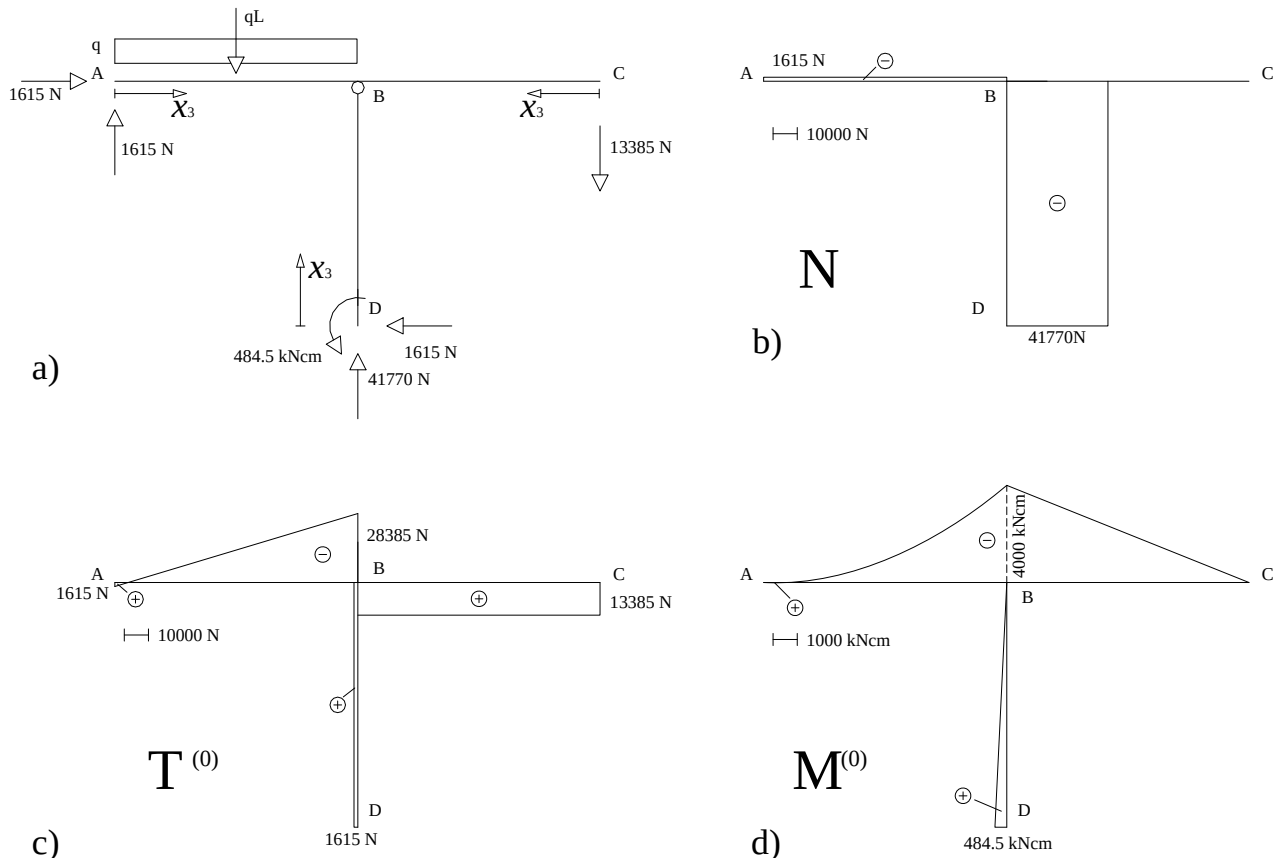


Figura 2.8. Schema iperstatico; a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

2.7 Verifica della sezione più sollecitata

Dall'esame dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione riportati nella Figura 2.8 si deduce che la sezione più sollecitata è quella denotata con la lettera **B**, che è soggetta alle seguenti caratteristiche della sollecitazione:

$$N_A = -1615 \text{ N}; \quad T_A = -28385 \text{ N}; \quad M_A = -4000 \text{ kNcm}.
 \tag{2.46}$$

La distribuzione delle tensioni normali e tangenziali dovute alle caratteristiche della sollecitazione riportate nella (2.46) si calcolano, rispettivamente, applicando la formula di Navier per le tensioni normali e la teoria approssimata del taglio secondo Jourawski per le tensioni tangenziali.

Per quanto riguarda le tensioni normali, l'andamento è quello indicato dalla relazione:

$$t_{33} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_{x_1}} x_2 = -\frac{1615}{53} - \frac{4000000}{3058.11} x_2 = -30.46 - 1313.12 x_2 \text{ N/cm}^2 \quad (2.47)$$

I valori estremi delle tensioni si verificano in corrispondenza delle fibre inferiori ed superiori ottenendo:

$$t_{33,i} = t_{33}|_{x_2=y_G} = -24422.3 \text{ N/cm}^2 \quad t_{33,s} = t_{33}|_{x_2=-(h-y_G)} = 8405.73 \text{ N/cm}^2 \quad (2.48)$$

Il diagramma delle tensioni normali t_{33} è riportato nella Figura 2.9

Per quanto attiene alle tensioni tangenziali, la loro determinazione può essere condotta applicando la nota formula di Jourawski a due sezioni, una posta sull'ala della sezione a T, l'altra posta sull'anima, così come illustrato nella Figura 2.9:

$$t_{31} = -\frac{TS'_{x_1}}{I_{x_1} c} = \frac{T \left(h - y_G - \frac{c}{2} \right)}{I_{x_1}} y = 50.351y \text{ N/cm}^2 \text{ con } t_{31,max} = t_{31}|_{y=\frac{b}{2}} = 377.63 \text{ N/cm}^2 \quad (2.49)$$

$$t_{32} = -\frac{TS''_{x_1}}{I_{x_1} s} = -172.42z + 4.614z^2 \text{ N/cm}^2 \text{ con } S''_{x_1} = sz \left(y_G - \frac{z}{2} \right); \quad (2.50)$$

il valore massimo della tensione t_{32} si ha in corrispondenza della fibra baricentrica in cui vale:

$$t_{32,max} = t_{32}|_{z=y_G} = -1601.38 \text{ N/cm}^2 \quad (2.51)$$

Il diagramma delle tensioni tangenziali t_{31} e t_{32} è riportato nella Figura 2.9

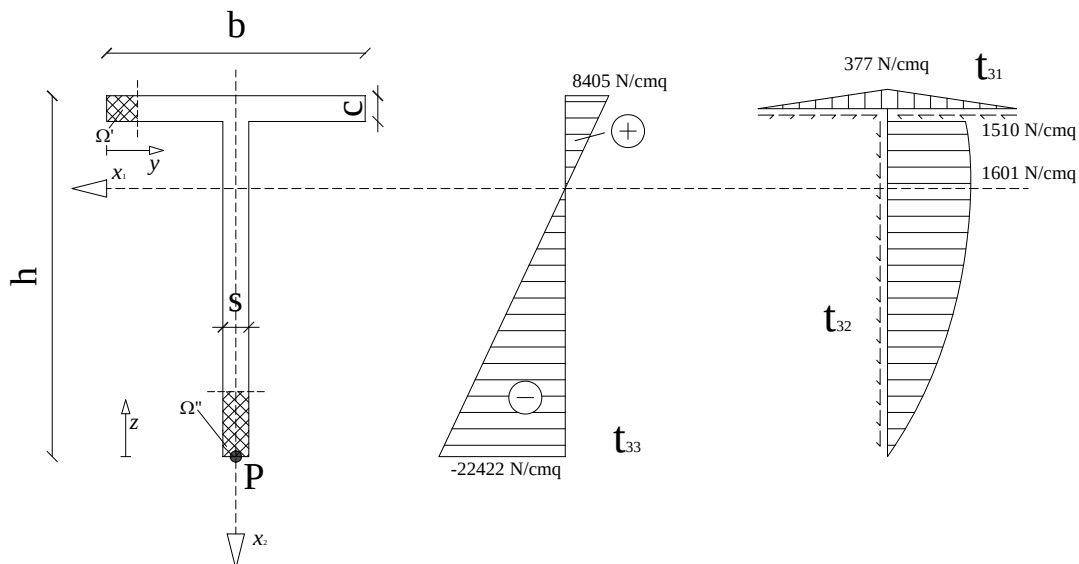


Figura 2.9. Tensioni normali e tangenziali sulla sezione trasversale.

Data l'entità delle tensioni appena determinate, la verifica di sicurezza può essere condotta, secondo il criterio di resistenza di Von Mises, in corrispondenza del punto **P** assumendo che lì agisca la sola tensione $t_{33,i}$:

$$\sigma_{id} = \sqrt{t_{33,i}^2} = 24422.3 \text{ N/cm}^2 > \sigma_{amm} = 16000 \text{ N/cm}^2 \quad (2.52)$$

VERIFICA NON SODDISFATTA

3 Soluzione del compito del 22 febbraio 2011

- Tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della struttura riportata in figura
- Verificare la sezione più sollecitata.

Dati:

$E = 2.1 \cdot 10^4 \text{ kN/cm}^2$	$\sigma_{amm} = 16 \text{ kN/cm}^2$	$\theta = 45^\circ$	$\alpha = 1.50 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$\Delta T = 15^\circ\text{C}$
$L = 300 \text{ cm}$	$q = 150 \text{ N/cm}$	$b = 10 \text{ cm}$	$h = 20 \text{ cm}$	$s = 1 \text{ cm}$

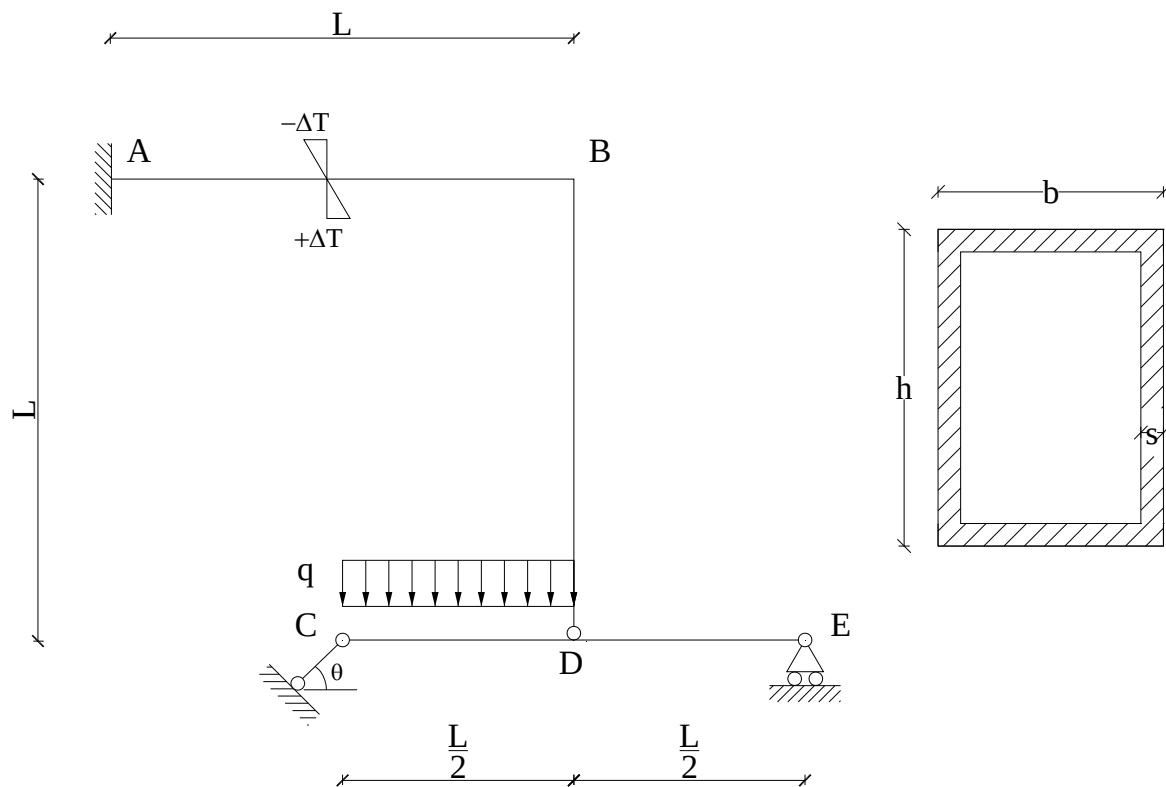


Figura 3.1. Sistema da analizzare; schema d'assi e sezione trasversale

3.1 Riconoscimento dei gradi di iperstaticità

Il sistema privo di vincoli è composto da due aste e quindi possiede nel piano sei gradi di libertà. I gradi di libertà sottratti dai vincoli esterni ed interni sono sette, quindi il sistema è una volta iperstatico ($q = 3n - v = 6 - (1 + 1 + 3 + 2) = -1$).

3.2 Calcolo delle caratteristiche inerziali della sezione trasversale

La sezione trasversale è scatolare e possiede due assi di simmetria, quindi il baricentro G si troverà nella loro intersezione.

Si determina l'area:

$$A = bh - (b - 2s)(h - 2s) = 56 \text{ cm}^2 \quad (3.1)$$

Il momento di inerzia rispetto l'asse forte (l'asse orizzontale baricentrico x_1) si calcola come:

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b - 2s)(h - 2s)^3}{12} = 2778.67 \text{ cm}^4 \quad (3.2)$$

Infine è da rilevare che, data la doppia simmetria, il centro di taglio C_T coinciderà con il baricentro G.

3.3 Metodo di analisi (metodo delle forze): posizione del problema

Secondo quanto prescritto dal metodo delle forze, il sistema assegnato è equivalente alla sovrapposizione di schemi isostatici ottenuti mediante la soppressione di un numero di vincoli a molteplicità semplice pari al grado di iperstaticità, quindi, nel caso in esame, sopprimendo una molteplicità vincolare. Vi saranno, ovviamente, diverse possibilità di scelta per pervenire agli schemi isostatici e nel seguito ne verranno esaminate due.

Una volta determinata l'incognita iperstatica X come mostrato nel seguito, i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione agenti sul sistema assegnato possono essere ricavate mediante il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{cases} N(x_3) = N^{(0)}(x_3) + N^{(1)}(x_3)X \\ T(x_3) = T^{(0)}(x_3) + T^{(1)}(x_3)X \\ M(x_3) = M^{(0)}(x_3) + M^{(1)}(x_3)X \end{cases} \quad (3.3)$$

3.4 Soluzione numero 1- Rimozione dell'incastro in A

Scegliendo di rendere isostatico il sistema mediante la soppressione della molteplicità vincolare legata alla rotazione in **A**, si hanno gli schemi isostatici indicati in Figura 3.2, in cui l'incognita iperstatica X deve essere valutata in maniera tale che la rotazione del punto **A** φ_A , deve essere nulla, ovvero deve essere verificata la seguente equazione di congruenza:

$$\varphi_A = \varphi_A^{(0)} + \varphi_A^{(1)}X = 0 \quad (3.4)$$

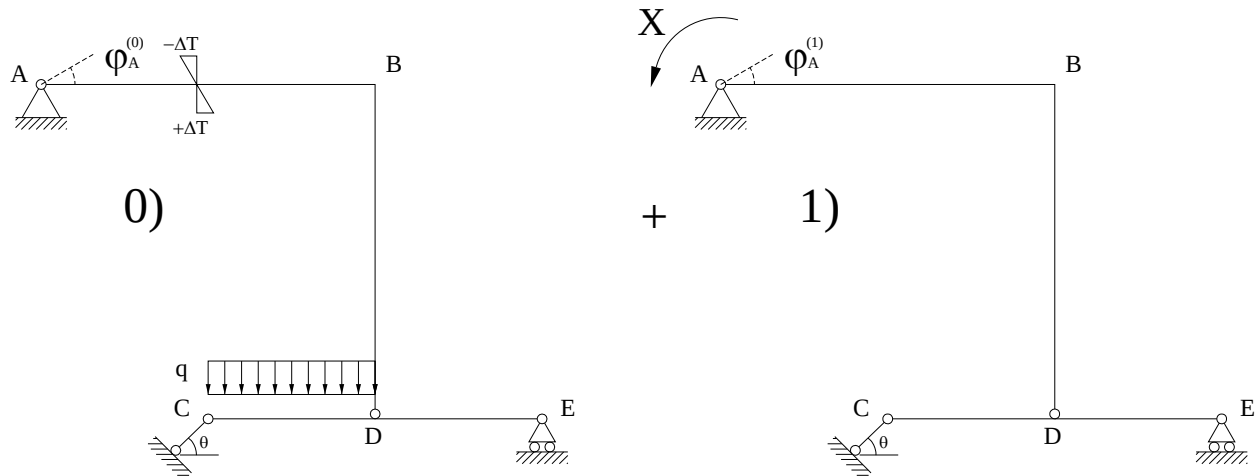


Figura 3.2. Scomposizione della struttura iperstatica negli schemi isostatici 0) e 1) – soluzione 1.

3.4.1 Soluzione dello schema isostatico 0)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 0) si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 3.3, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

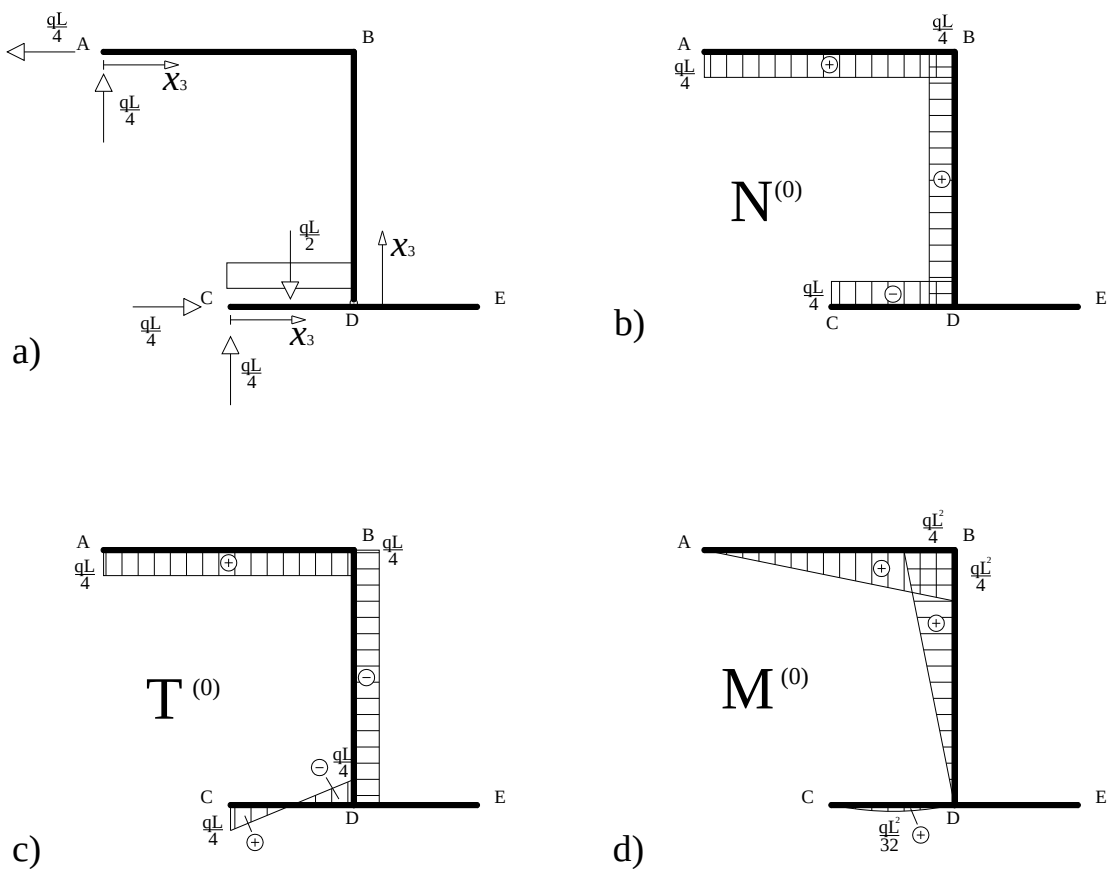


Figura 3.3. Schema isostatico 0); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

$$H_A^{(0)} = V_A^{(0)} = V_C^{(0)} = H_C^{(0)} = \frac{qL}{4} = 11.25\text{kN}; \quad V_E^{(0)} = 0; \quad (3.5)$$

$$N_{AB}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4}; \quad N_{BD}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4}; \quad N_{CD}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{4}; \quad N_{DE}^{(0)}(x_3) = 0; \quad (3.6)$$

$$T_{AB}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4}; \quad T_{BD}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{4}; \quad T_{CD}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4} - q x_3; \quad T_{DE}^{(0)}(x_3) = 0; \quad (3.7)$$

$$M_{AB}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4} x_3; \quad M_{BD}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4} x_3; \quad M_{CD}^{(0)}(x_3) = \frac{q x_3}{2} \left(\frac{L}{2} - x_3 \right); \quad M_{DE}^{(0)}(x_3) = 0; \quad (3.8)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 3.3-a.

3.4.2 Soluzione dello schema isostatico 1)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 1), in cui l'incognita iperstatica assume valore unitario ($X=1$), si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 3.4, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$H_A^{(1)} = V_C^{(1)} = H_C^{(1)} = V_E^{(1)} = \frac{1}{3L}; \quad V_A^{(1)} = \frac{2}{3L}; \quad (3.9)$$

$$N_{AB}^{(1)}(x_3) = -\frac{1}{3L}; \quad N_{BD}^{(1)}(x_3) = \frac{2}{3L}; \quad N_{CD}^{(1)}(x_3) = \frac{1}{3L}; \quad N_{DE}^{(1)}(x_3) = 0; \quad (3.10)$$

$$T_{AB}^{(1)}(x_3) = \frac{2}{3L}; \quad T_{BD}^{(1)}(x_3) = \frac{1}{3L}; \quad T_{CD}^{(1)}(x_3) = -\frac{1}{3L}; \quad T_{DE}^{(1)}(x_3) = \frac{1}{3L}; \quad (3.11)$$

$$M_{AB}^{(1)}(x_3) = -1 + \frac{2x_3}{3L}; \quad M_{BD}^{(1)}(x_3) = -\frac{1}{3L} x_3; \quad M_{CD}^{(1)}(x_3) = -\frac{1}{3L} x_3; \quad M_{DE}^{(1)}(x_3) = -\frac{1}{3} + \frac{x_3}{3L}; \quad (3.12)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 3.4-a.

3.4.3 Determinazione dell'incognita iperstatica

Come detto in precedenza l'incognita iperstatica va determinata imponendo l'equazione di congruenza (3.4). Per compiere questo passo è necessario procedere al calcolo degli spostamenti $\varphi_A^{(0)}$ e $\varphi_A^{(1)}$. A tale scopo si utilizzerà il metodo della forza unitaria.

3.4.3.1 Calcolo di $\varphi_A^{(0)}$

La determinazione di $\varphi_A^{(0)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 0) come sistema congruente reale ed il sistema 1) come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 0) vale:

$$L_e = 1 \cdot \varphi_A^{(0)} \quad (3.13)$$

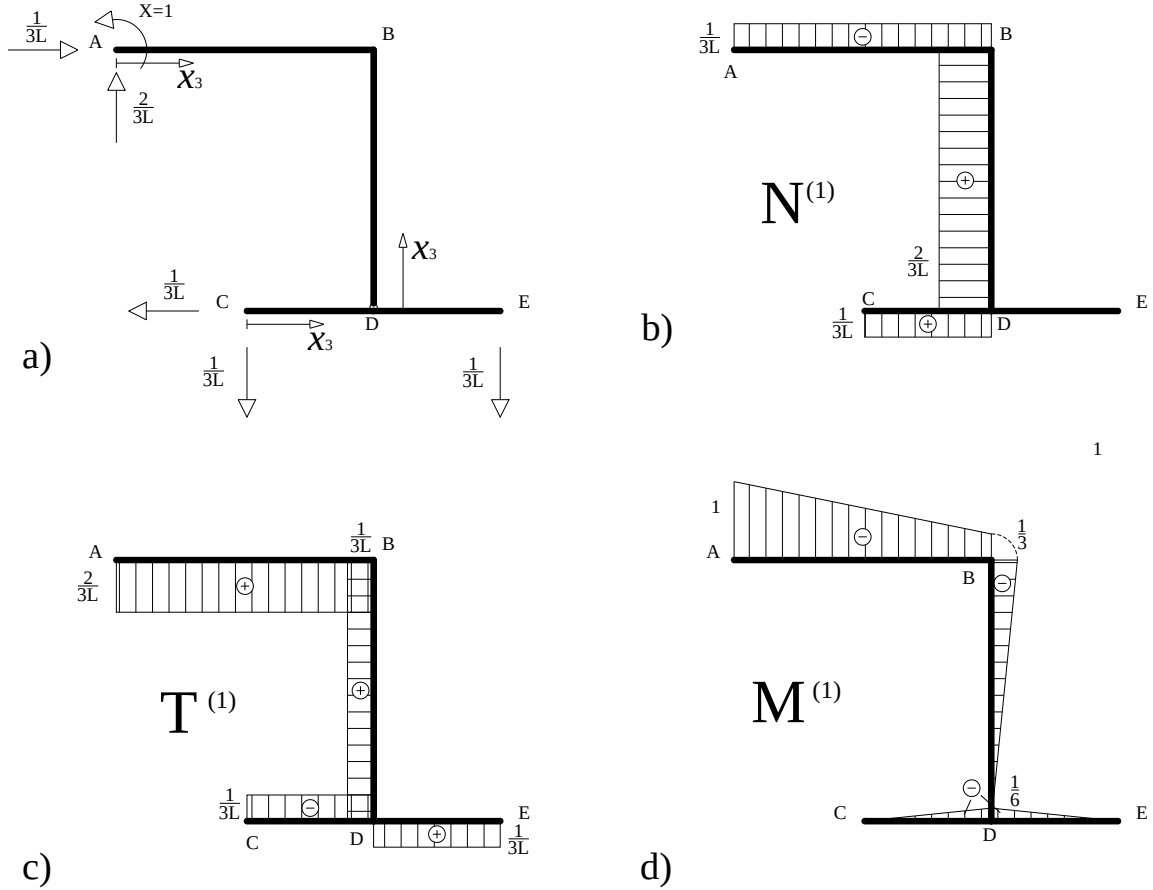


Figura 3.4. Schema isostatico 1); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 0), sostituendo le espressioni ricavate in (3.8) e in (3.12), può scriversi come:

$$L_i = \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \left(\frac{M_{AB}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} + \frac{2\alpha\Delta T}{h} \right) dx_3 + \int_0^L M_{BD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BD}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{L/2} M_{CD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CD}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_{L/2}^L M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 = -\frac{113}{1152} \frac{qL^3}{EI_{x_1}} - \frac{4}{3} \frac{\alpha\Delta TL}{h} \quad (3.14)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$\varphi_A^{(0)} = -\frac{113}{1152} \frac{qL^3}{EI_{x_1}} - \frac{4}{3} \frac{\alpha\Delta TL}{h} = -1.13081 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \quad (3.15)$$

3.4.3.2 Calcolo di $\varphi_A^{(1)}$

La determinazione di $\varphi_A^{(1)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 1) sia come sistema congruente reale che come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 1) vale:

$$L_e = 1 \cdot \varphi_A^{(1)} \quad (3.16)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 1) vale, sostituendo le espressioni ricavate in (3.12):

$$L_i = \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BD}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{L/2} M_{CD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CD}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_{L/2}^L M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 = \frac{19}{36} \frac{L}{EI_{x_1}} \quad (3.17)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$\varphi_A^{(1)} = \frac{19}{36} \frac{L}{EI_{x_1}} = 2.7134 \cdot 10^{-9} \text{ rad/Ncm} \quad (3.18)$$

3.4.3.3 Calcolo della incognita iperstatica

La determinazione del valore della incognita iperstatica X può essere condotta sostituendo i valori delle rotazioni appena determinati nell'equazione di congruenza (3.4):

$$\varphi_A^{(0)} + \varphi_A^{(1)} X = 0 \rightarrow X = -\frac{\varphi_A^{(0)}}{\varphi_A^{(1)}} = \frac{113}{608} qL^2 + \frac{48}{19} \frac{\alpha \Delta T EI_{x_1}}{h} = 4167.47 \text{ kNcm} \quad (3.19)$$

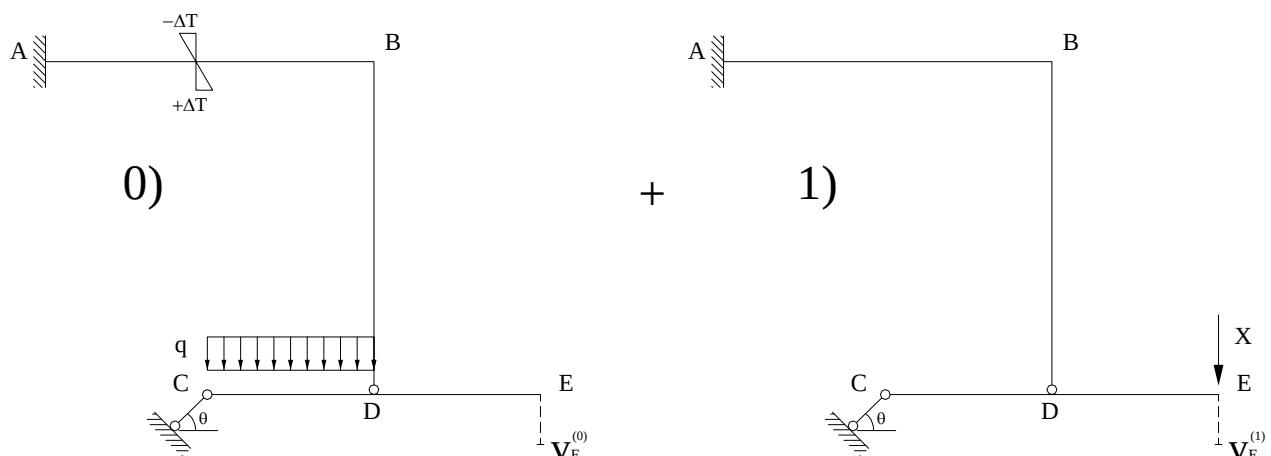
3.5 Soluzione numero 2- Rimozione del carrello in E

Figura 3.5. Scomposizione della struttura iperstatica negli schemi isostatici 0) e 1) – soluzione 2.

Scegliendo di rendere isostatico il sistema mediante la soppressione del carrello in **E** si hanno gli schemi isostatici indicati in Figura 3.5, in cui l'incognita iperstatica X deve essere valutata in maniera tale che l'abbassamento del punto **E**, v_E , deve essere nullo, ovvero deve essere verificata la seguente equazione di congruenza:

$$v_E = v_E^{(0)} + v_E^{(1)} X = 0 \quad (3.20)$$

3.5.1 Soluzione dello schema isostatico 0)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 0) si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 3.6, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

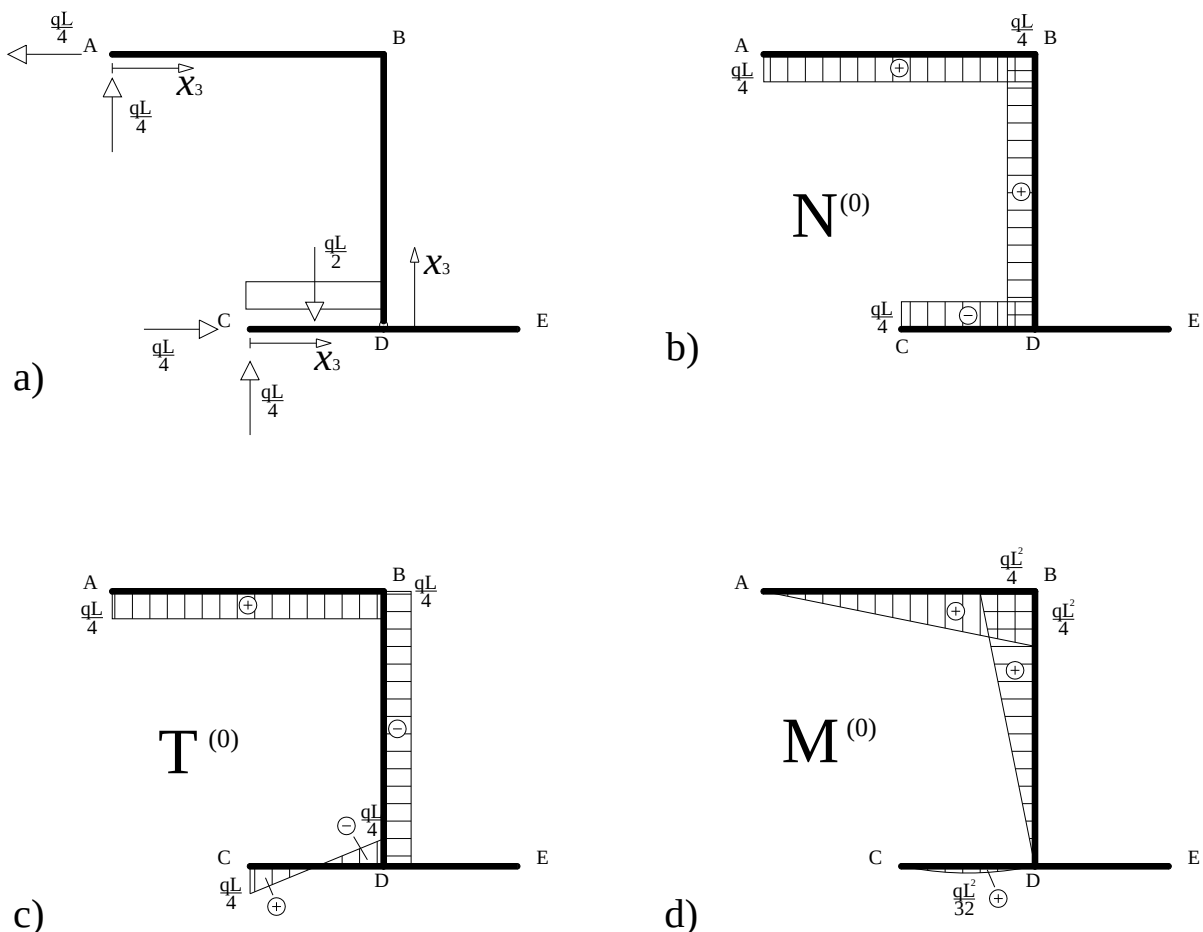


Figura 3.6. Schema isostatico 0); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

$$H_A^{(0)} = V_A^{(0)} = V_C^{(0)} = H_C^{(0)} = \frac{qL}{4} = 11.25 \text{ kN}; \quad M_A^{(0)} = 0; \quad (3.21)$$

$$N_{AB}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4}; \quad N_{BD}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4}; \quad N_{CD}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{4}; \quad N_{DE}^{(0)}(x_3) = 0; \quad (3.22)$$

$$T_{AB}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4}; \quad T_{BD}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{4}; \quad T_{CD}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4} - q x_3; \quad T_{DE}^{(0)}(x_3) = 0; \quad (3.23)$$

$$M_{AB}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4} x_3; \quad M_{BD}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4} x_3; \quad M_{CD}^{(0)}(x_3) = \frac{q x_3}{2} \left(\frac{L}{2} - x_3 \right); \quad M_{DE}^{(0)}(x_3) = 0; \quad (3.24)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 3.6-a.

3.5.2 Soluzione dello schema isostatico 1)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 1), in cui l'incognita iperstatica assume valore unitario ($X=1$), si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 3.7, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$H_A^{(1)} = V_C^{(1)} = H_C^{(1)} = 1; \quad V_A^{(1)} = 2; \quad M_A^{(1)} = 3L; \quad (3.25)$$

$$N_{AB}^{(1)}(x_3) = -1; \quad N_{BD}^{(1)}(x_3) = 2; \quad N_{CD}^{(1)}(x_3) = 1; \quad N_{DE}^{(1)}(x_3) = 0; \quad (3.26)$$

$$T_{AB}^{(1)}(x_3) = 2; \quad T_{BD}^{(1)}(x_3) = 1; \quad T_{CD}^{(1)}(x_3) = -1; \quad T_{DE}^{(1)}(x_3) = 1; \quad (3.27)$$

$$M_{AB}^{(1)}(x_3) = -3L + 2x_3; \quad M_{BD}^{(1)}(x_3) = -x_3; \quad M_{CD}^{(1)}(x_3) = -x_3; \quad M_{DE}^{(1)}(x_3) = -L + x_3; \quad (3.28)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 3.7-a.

3.5.3 Determinazione dell'incognita iperstatica

L'incognita iperstatica va determinata imponendo l'equazione di congruenza (3.20). Per compiere questo passo è necessario procedere al calcolo delle rotazioni $v_E^{(0)}$ e $v_E^{(1)}$. A tale scopo si utilizzerà il metodo della forza unitaria.

3.5.3.1 Calcolo di $v_E^{(0)}$

La determinazione di $v_E^{(0)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 0) come sistema congruente reale ed il sistema 1) come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 0) vale:

$$L_e = 1 \cdot v_E^{(0)} \quad (3.29)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 0), sostituendo le espressioni ricavate in (3.24) e in (3.28), vale:

$$\begin{aligned}
 L_i = & \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \left(\frac{M_{AB}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} + \frac{2\alpha\Delta T}{h} \right) dx_3 + \int_0^L M_{BD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BD}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \\
 & + \int_0^{L/2} M_{CD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CD}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_{L/2}^L M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 = -\frac{113}{384} \frac{qL^4}{EI_{x_1}} - \frac{4\alpha\Delta TL^2}{h}
 \end{aligned} \quad (3.30)$$

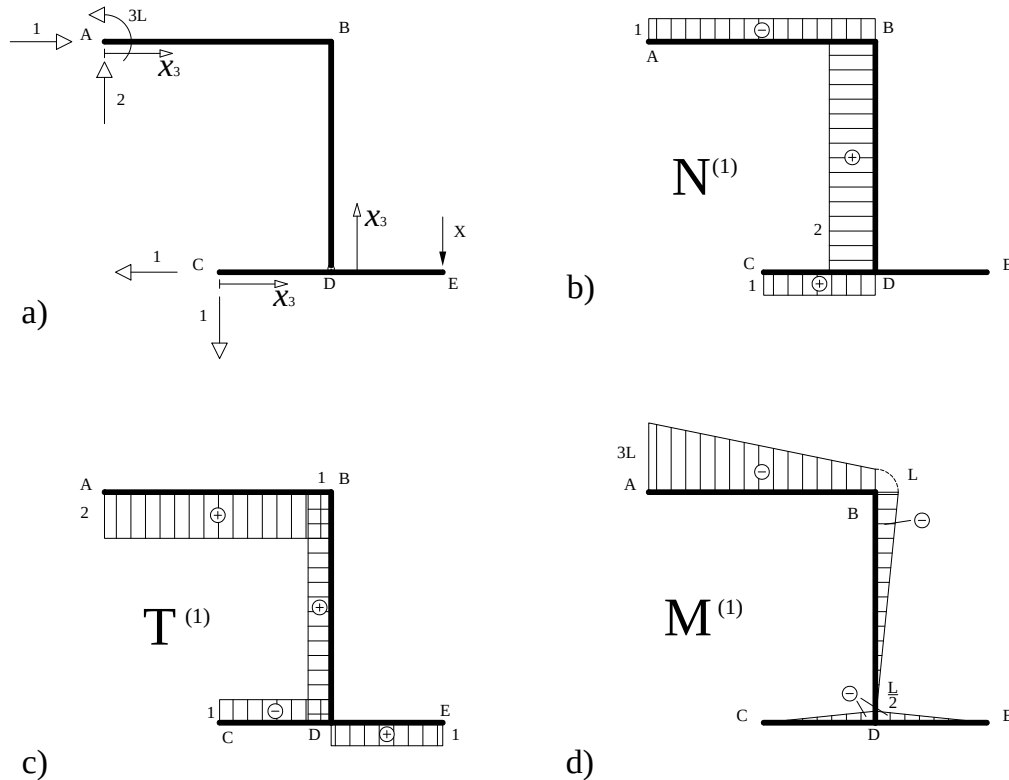


Figura 3.7. Schema isostatico 1); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$v_E^{(0)} = -\frac{113}{384} \frac{qL^4}{EI_{x_1}} - \frac{4\alpha\Delta TL^2}{h} = -10.1773 \text{ cm} \quad (3.31)$$

3.5.3.2 Calcolo di $v_E^{(1)}$

La determinazione di $v_E^{(1)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 1) sia come sistema congruente reale che come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 1) vale:

$$L_e = 1 \cdot v_E^{(1)} \quad (3.32)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 1), sostituendo le espressioni ricavate in (3.28), vale:

$$L_i = \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BD}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{L/2} M_{CD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CD}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_{L/2}^L M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 = \frac{19}{4} \frac{L^3}{EI_{x_1}} \quad (3.33)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$v_E^{(1)} = \frac{19}{4} \frac{L^3}{EI_{x_1}} = 2.19787 \cdot 10^{-3} \text{ cm/N} \quad (3.34)$$

3.5.4 Calcolo della incognita iperstatica

La determinazione del valore della incognita iperstatica X può essere condotta sostituendo i valori delle rotazioni appena determinati nell'equazione di congruenza (3.20):

$$v_E^{(0)} + v_E^{(1)} X = 0 \rightarrow X = -\frac{v_E^{(0)}}{v_E^{(1)}} = \frac{113}{1824} qL + \frac{16}{19} \frac{EI_{x_1} \alpha \Delta T}{hL} = 4630.52 \text{ N} \quad (3.35)$$

3.6 Determinazione dei diagrammi della sollecitazione

Applicando l'equazione (3.3), come descritto in precedenza, è possibile ricavare i valori delle reazioni vincolari e l'andamento delle caratteristiche della sollecitazione del sistema iperstatico assegnato. Questo può essere fatto a partire dalle due soluzioni determinate ottenendo, ovviamente, gli stessi andamenti delle reazioni vincolari e delle caratteristiche della sollecitazione. Operando, per esempio, secondo la prima soluzione trovata si ha:

$$H_A = V_C = H_C = \frac{qL}{4} - \frac{X}{3L} = 6619.48 \text{ N}; \quad V_A = \frac{qL}{4} + \frac{2X}{3L} = 20511.05 \text{ N}; \quad (3.36)$$

$$V_E = \frac{X}{3L} = 4630.52 \text{ N}; \quad M_A = X = 4167.47 \text{ kNcm}$$

$$N_{AB}(x_3) = \frac{qL}{4} - \frac{3X}{L} = 6619 \text{ N}; \quad N_{BD}(x_3) = \frac{qL}{4} + \frac{2X}{3L} = 20511 \text{ N}; \quad (3.37)$$

$$N_{CD}(x_3) = -\frac{qL}{4} + \frac{3X}{L} = -6619 \text{ N}; \quad N_{DE}(x_3) = 0$$

$$T_{AB}(x_3) = \frac{qL}{4} + \frac{2X}{3L} = 20511 \text{ N} \quad T_{BD}(x_3) = \frac{qL}{4} - \frac{X}{3L} = 6619 \text{ N} \quad (3.38)$$

$$T_{CD}(x_3) = \frac{qL}{4} - \frac{X}{3L} - q x_3 = 6619 - 150 x_3 \text{ N} \quad T_{DE}(x_3) = \frac{X}{3L} = 4631 \text{ N}$$

$$M_{AB}(x_3) = -X + \frac{qL}{4}x_3 + \frac{2X}{3L}x_3 = -4167 + 20.511x_3 \text{ kNcm}$$

$$M_{BD}(x_3) = \frac{qL}{4}x_3 - \frac{X}{3L}x_3 = 6.619x_3 \text{ kNcm}$$

$$M_{CD}(x_3) = \frac{qx_3}{2}\left(\frac{L}{2} - x_3\right) - \frac{X}{3L}x_3 = 6.619x_3 - 0.075x_3^2 \text{ kNcm} \quad (3.39)$$

$$M_{DE}(x_3) = \frac{X}{3L}x_3 - \frac{X}{3} = 4167\left(\frac{x_3 - 300}{900}\right) \text{ kNcm}$$

I corrispondenti diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione sono riportati nella seguente Figura 3.8.

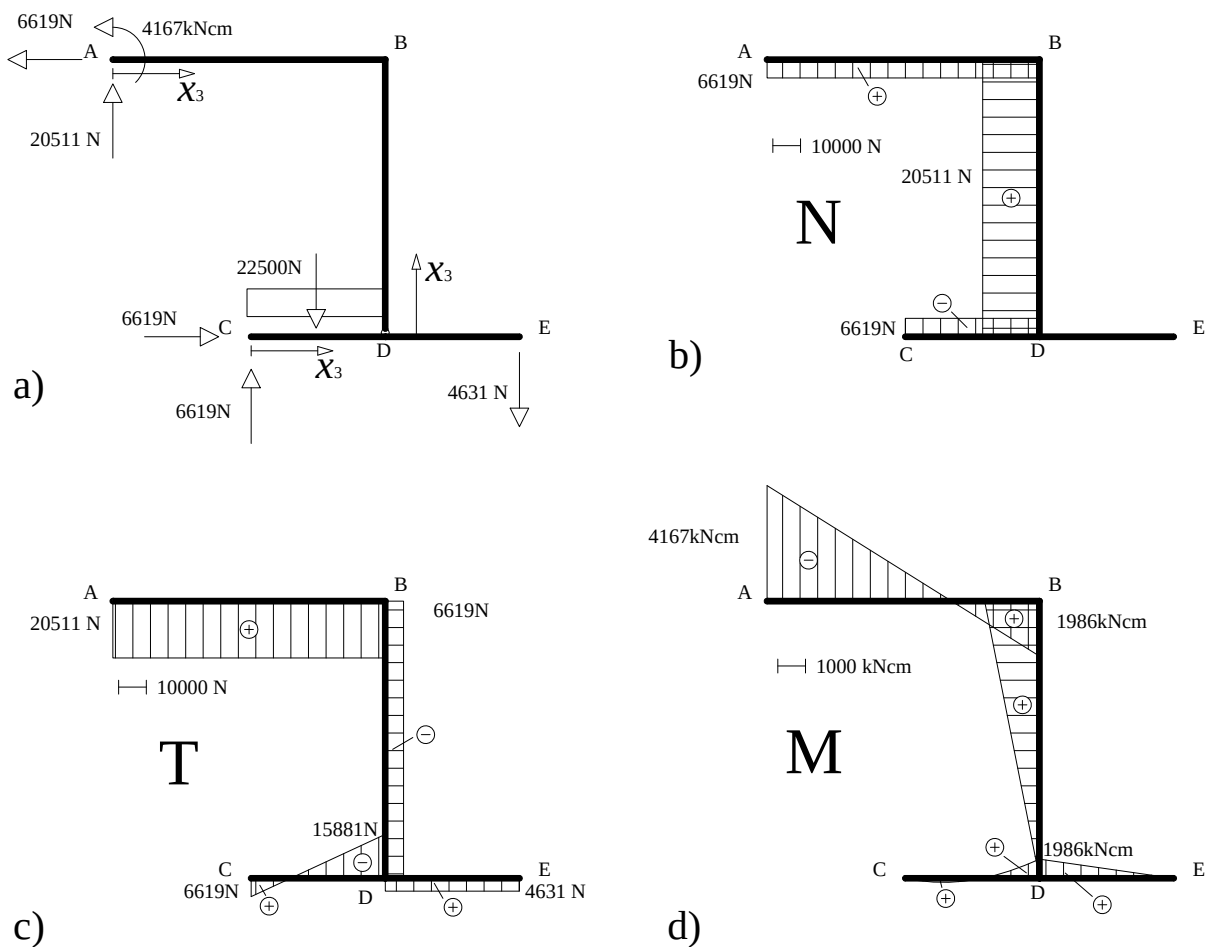


Figura 3.8. Schema iperstatico; a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

3.7 Verifica della sezione più sollecitata

Dall'esame dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione riportati nella Figura 3.8 si deduce che la sezione più sollecitata è quella denotata con la lettera **A**, che è soggetta alle seguenti caratteristiche della sollecitazione:

$$N_A = 6619\text{N}; \quad T_A = 20511\text{N}; \quad M_A = -4167\text{kNcm}. \quad (3.40)$$

La distribuzione delle tensioni normali e tangenziali dovute alle caratteristiche della sollecitazione riportate nella (3.40) si calcolano, rispettivamente, applicando la formula di Navier per le tensioni normali e la teoria approssimata del taglio secondo Jourawski per le tensioni tangenziali.

Per quanto riguarda le tensioni normali, l'andamento è quello indicato dalla relazione:

$$t_{33} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_{x_1}} x_2 = \frac{6619.48}{56} - \frac{416700000}{2778.67} x_2 = 118.205 - 1499.81 x_2 \quad \text{N/cm}^2 \quad (3.41)$$

I valori estremi delle tensioni si verificano in corrispondenza delle fibre inferiori ed superiori ottenendo:

$$t_{33,i} = t_{33}|_{x_2=10\text{cm}} = -14879.9 \text{ N/cm}^2 \quad t_{33,s} = t_{33}|_{x_2=-10\text{cm}} = 15116.3 \text{ N/cm}^2 \quad (3.42)$$

Il diagramma delle tensioni normali t_{33} è riportato nella Figura 3.9

Per quanto attiene alle tensioni tangenziali, la loro determinazione può essere condotta applicando la nota formula di Jourawski alle corde illustrate nella Figura 3.9:

$$t_{31} = -\frac{T_A S_{x_1}^{\Omega'}}{2I_{x_1} s} = 70.125y \text{ N/cm}^2 \quad \text{con} \quad S_{x_1}^{\Omega'} = 2sy \frac{h-s}{2}; \quad (3.43)$$

il valore massimo della tensione t_{31} si ha sullo spigolo della sezione:

$$t_{31,max} = t_{31}|_{y=\frac{b}{2}} = 350.63 \text{ N/cm}^2 \quad (3.44)$$

L'andamento delle tensioni tangenziali t_{32} , invece, è dato dalla:

$$t_{32} = -\frac{T_A S_{x_1}^{\Omega''}}{2I_{x_1} s} = -350.63 - 66.43z + 3.69z^2 \text{ N/cm}^2 \quad \text{con} \quad S_{x_1}^{\Omega''} = bs \frac{h-s}{2} + 2sz \left(\frac{h}{2} - s - \frac{z}{2} \right); \quad (3.45)$$

il valore massimo della tensione t_{32} si ha in corrispondenza della fibra baricentrica in cui vale:

$$t_{32,max} = t_{32}|_{z=\frac{h}{2}-s} = -649.58 \text{ N/cm}^2 \quad (3.46)$$

Il diagramma delle tensioni tangenziali t_{31} e t_{32} è riportato nella Figura 3.9

Data l'entità delle tensioni appena determinate, la verifica di sicurezza può essere condotta, secondo il criterio di resistenza di Von Mises, in corrispondenza del punto **P** assumendo che lì agiscano la tensione $t_{33,i}$, la $t_{31,max}$ e la $t_{32}|_{z=0}$.

$$\sigma_{id} = \sqrt{t_{33,i}^2 + 3(t_{31,max}^2 + t_{32}|_{z=0}^2)} = 15140.7 \text{ N/cm}^2 < \sigma_{amm} = 16000 \text{ N/cm}^2 \quad (3.47)$$

VERIFICA SODDISFATTA

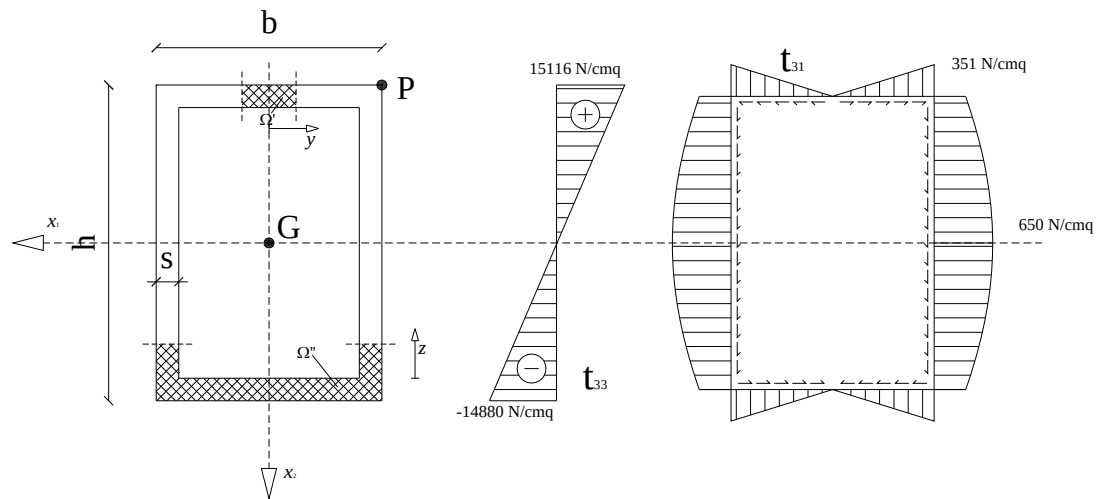


Figura 3.9. Tensioni normali e tangenziali sulla sezione trasversale.

4 Soluzione del compito del 16 giugno 2011

- Tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della struttura riportata in figura
- Verificare la sezione più sollecitata.

Dati:

$E = 210000 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{amm} = 160 \text{ N/mm}^2$	$L = 3000 \text{ mm}$	$q = 10 \text{ N/mm}$
$\alpha = 1.50 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$\Delta T_1 = +15^\circ\text{C}$	$\Delta T_2 = +25^\circ\text{C}$	
$b = 100 \text{ mm}$	$h = 200 \text{ mm}$	$s = 5 \text{ mm}$	$c = 10 \text{ mm}$

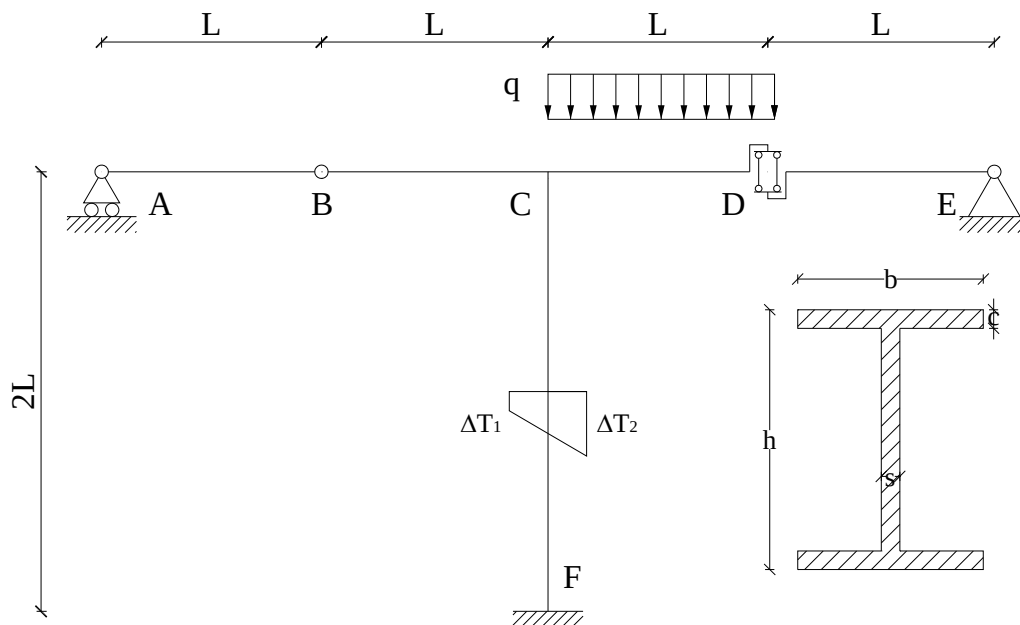


Figura 4.1. Sistema da analizzare; schema d'assi e sezione trasversale.

4.1 Riconoscimento dei gradi di iperstaticità

Il sistema privo di vincoli è composto da tre aste e quindi possiede nel piano nove gradi di libertà. I gradi di libertà sottratti dai vincoli esterni ed interni sono dieci, quindi il sistema è una volta iperstatico ($q = 3n - v = 9 - (1 + 2 + 2 + 2 + 3) = -1$).

4.2 Calcolo delle caratteristiche inerziali della sezione trasversale

La sezione trasversale è una sezione ad I e possiede due assi di simmetria, quindi il baricentro G si troverà nella loro intersezione.

Si determina l'area:

$$A = bh - (b - s)(h - 2c) = 2900 \text{ mm}^2 \quad (4.1)$$

Il momento di inerzia rispetto l'asse forte (l'asse orizzontale baricentrico x_1) si calcola come:

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b - s)(h - 2c)^3}{12} = 20496666.67 \text{ mm}^4 \quad (4.2)$$

Infine è da rilevare che, data la doppia simmetria, il centro di taglio coinciderà con il baricentro.

4.3 Metodo di analisi (metodo delle forze): posizione del problema

Secondo quanto prescritto dal metodo delle forze, il sistema assegnato è equivalente alla sovrapposizione di schemi isostatici ottenuti mediante la soppressione di un numero di vincoli a molteplicità semplice pari al grado di iperstaticità, quindi, nel caso in esame, sopprimendo una molteplicità vincolare. Vi saranno, ovviamente, diverse possibilità di scelta per pervenire agli schemi isostatici e nel seguito ne verranno esaminate due.

Una volta determinata l'incognita iperstatica X come mostrato nel seguito, i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione agenti sul sistema assegnato possono essere ricavate mediante il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{cases} N(x_3) = N^{(0)}(x_3) + N^{(1)}(x_3)X \\ T(x_3) = T^{(0)}(x_3) + T^{(1)}(x_3)X \\ M(x_3) = M^{(0)}(x_3) + M^{(1)}(x_3)X \end{cases} \quad (4.3)$$

4.4 Soluzione numero 1- Rimozione dell'incastro in F

Scegliendo di rendere isostatico il sistema mediante la soppressione della molteplicità vincolare legata alla rotazione in F, si hanno gli schemi isostatici indicati in Figura 4.2, in cui l'incognita iperstatica X deve essere valutata in maniera tale che la rotazione del punto F φ_F , deve essere nulla, ovvero deve essere verificata la seguente equazione di congruenza:

$$\varphi_F = \varphi_F^{(0)} + \varphi_F^{(1)}X = 0 \quad (4.4)$$

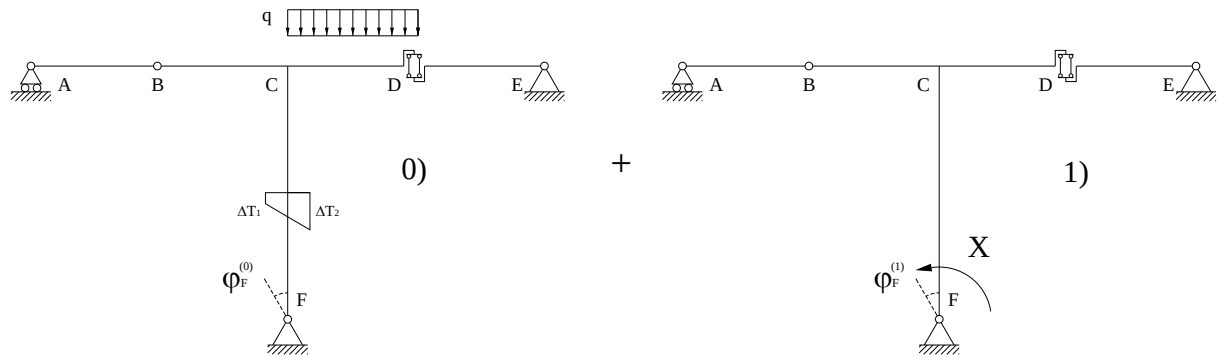


Figura 4.2. Scomposizione della struttura iperstatica negli schemi isostatici 0) e 1) – soluzione 1.

4.4.1 Soluzione dello schema isostatico 0)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 0) si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 4.3, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

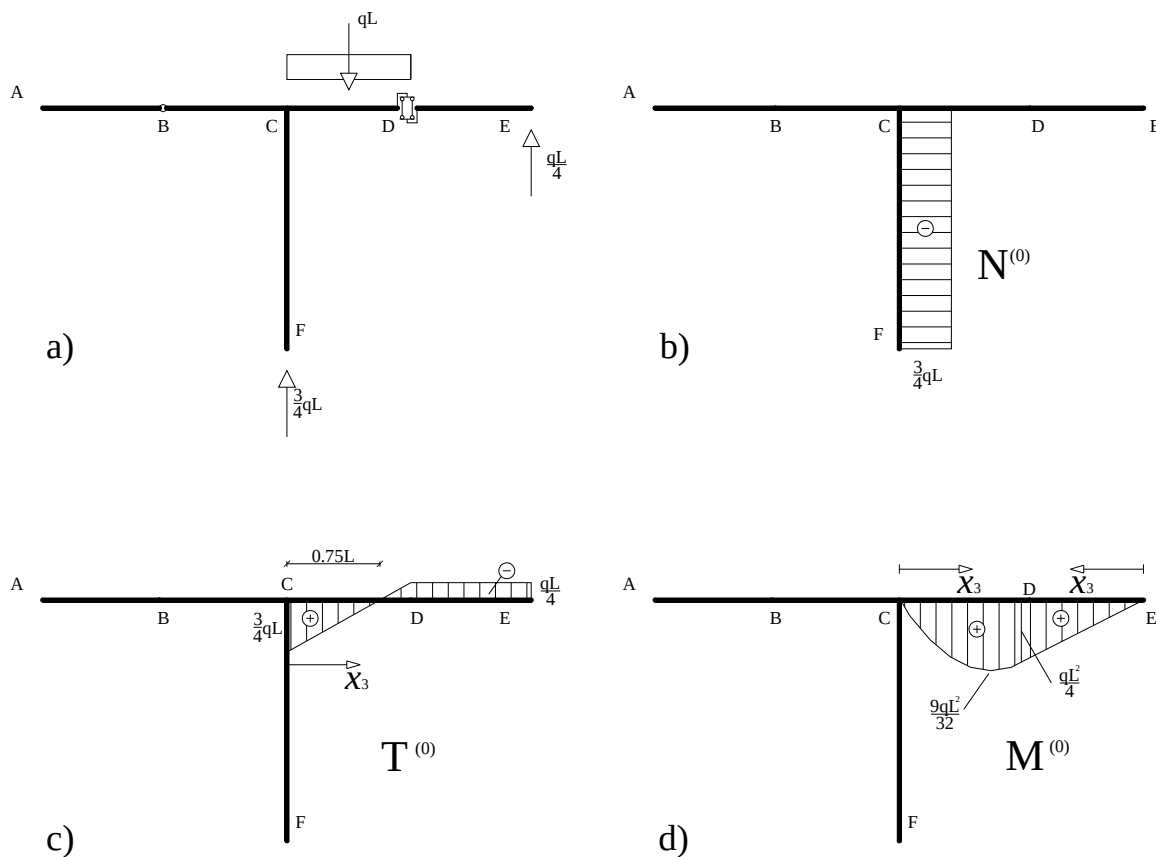


Figura 4.3. Schema isostatico 0); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

$$H_F^{(0)} = H_E^{(0)} = V_A^{(0)} = 0; V_E^{(0)} = \frac{qL}{4} = 7500\text{N}; V_F^{(0)} = \frac{3qL}{4} = 22500\text{N}; \quad (4.5)$$

$$N_{AB}^{(0)}(x_3) = 0 \quad N_{BC}^{(0)}(x_3) = 0 \quad N_{CD}^{(0)}(x_3) = 0 \quad N_{DE}^{(0)}(x_3) = 0 \quad N_{CF}^{(0)}(x_3) = -\frac{3qL}{4} \quad (4.6)$$

$$T_{AB}^{(0)}(x_3) = 0 \quad T_{BC}^{(0)}(x_3) = 0 \quad T_{CD}^{(0)}(x_3) = \frac{3qL}{4} - q x_3 \quad T_{DE}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{4} \quad T_{CF}^{(0)}(x_3) = 0 \quad (4.7)$$

$$M_{AB}^{(0)}(x_3) = 0 \quad M_{BC}^{(0)}(x_3) = 0 \quad M_{CD}^{(0)}(x_3) = \frac{q x_3}{2} \left(\frac{3L}{2} - x_3 \right) \quad M_{DE}^{(0)}(x_3) = \frac{qL x_3}{4} \quad M_{CF}^{(0)}(x_3) = 0 \quad (4.8)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 4.3.

4.4.2 Soluzione dello schema isostatico 1)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 1), in cui l'incognita iperstatica assume valore unitario ($X=1$), si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 4.4, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$V_A^{(1)} = H_E^{(1)} = H_F^{(1)} = 0; \quad V_E^{(1)} = V_F^{(1)} = \frac{1}{2L}; \quad (4.9)$$

$$N_{AB}^{(1)}(x_3) = 0 \quad N_{BC}^{(1)}(x_3) = 0 \quad N_{CD}^{(1)}(x_3) = 0 \quad N_{DE}^{(1)}(x_3) = 0 \quad N_{CF}^{(1)}(x_3) = -\frac{1}{2L} \quad (4.10)$$

$$T_{AB}^{(1)}(x_3) = 0 \quad T_{BC}^{(1)}(x_3) = 0 \quad T_{CD}^{(1)}(x_3) = \frac{1}{2L} \quad T_{DE}^{(1)}(x_3) = \frac{1}{2L} \quad T_{CF}^{(1)}(x_3) = 0 \quad (4.11)$$

$$M_{AB}^{(1)}(x_3) = 0 \quad M_{BC}^{(1)}(x_3) = 0 \quad M_{CD}^{(1)}(x_3) = -1 + \frac{x_3}{2L} \quad M_{DE}^{(1)}(x_3) = -\frac{x_3}{2L} \quad M_{CF}^{(1)}(x_3) = 1 \quad (4.12)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 4.4.

4.4.3 Determinazione dell'incognita iperstatica

Come detto in precedenza l'incognita iperstatica va determinata imponendo l'equazione di congruenza (2.6). Per compiere questo passo è necessario procedere al calcolo delle rotazioni $\varphi_F^{(0)}$ e $\varphi_F^{(1)}$. A tale scopo si utilizzerà il metodo della forza unitaria.

4.4.3.1 Calcolo di $\varphi_F^{(0)}$

La determinazione di $\varphi_F^{(0)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 0) come sistema congruente reale ed il sistema 1) come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 0) vale:

$$L_e = 1 \cdot \varphi_F^{(0)} \quad (4.13)$$

Per il calcolo del lavoro interno in questo caso, essendo presente una componente di deformazione termica costante, non può essere trascurato il contributo dello sforzo normale.

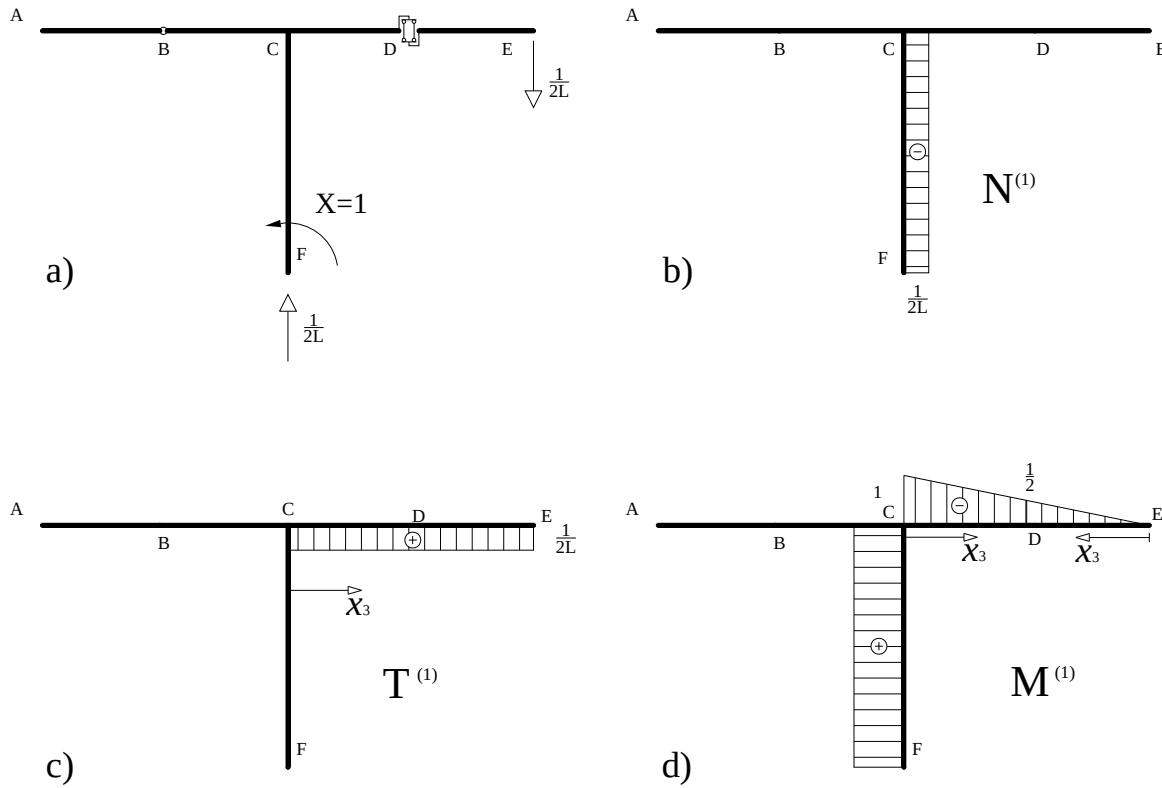


Figura 4.4. Schema isostatico 1); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

La componente costante ΔT_N e la componente a farfalla ΔT_M della deformazione termica valgono:

$$\Delta T_N = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2} = 20^\circ\text{C}; \quad \Delta T_M = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{2} = 5^\circ\text{C} \quad (4.14)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 0), sostituendo le espressioni ricavate in (4.6), (4.8), (4.10) e (4.12) e trascurando gli addendi in cui compaiono valori nulli delle sollecitazioni può scriversi come:

$$\begin{aligned} L_i = & \int_0^L M_{CD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CD}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{2L} M_{CF}^{(1)}(x_3) \left(-\frac{2\alpha\Delta T_M}{h} \right) dx_3 + \\ & + \int_0^{2L} N_{CF}^{(1)}(x_3) \left(\frac{N_{CF}^{(0)}(x_3)}{EA} + \alpha\Delta T_N \right) dx_3 = \frac{3}{4} \frac{qL}{EA} - \frac{3}{16} \frac{qL^3}{EI_{x_1}} - 4L \frac{\alpha\Delta T_M}{h} - \alpha\Delta T_N \end{aligned} \quad (4.15)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$\varphi_F^{(1)} = \frac{3}{4} \frac{qL}{EA} - \frac{3}{16} \frac{qL^3}{EI_{x_1}} - 4L \frac{\alpha\Delta T_M}{h} - \alpha\Delta T_N = -1.65245 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \quad (4.16)$$

4.4.3.2 Calcolo di $\varphi_F^{(1)}$

La determinazione di $\varphi_F^{(1)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 1) sia come sistema congruente reale che come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 1) vale:

$$L_e = 1 \cdot \varphi_F^{(1)} \quad (4.17)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 1), tenendo ancora in considerazione lo sforzo normale, sostituendo le espressioni ricavate in (4.10) e (4.12) e trascurando gli addendi in cui compaiono valori nulli delle sollecitazioni può scriversi come:

$$L_i = \int_0^L M_{CD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CD}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{2L} M_{CF}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CF}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{2L} N_{CF}^{(1)}(x_3) \frac{N_{CF}^{(1)}(x_3)}{EA} dx_3 = \frac{8L}{3EI_{x_1}} + \frac{1}{2LEA} \quad (4.18)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$\varphi_F^{(1)} = \frac{8L}{3EI_{x_1}} + \frac{1}{2LEA} = 1.85888 \cdot 10^{-9} \text{ rad/Nmm} \quad (4.19)$$

4.4.3.3 Calcolo della incognita iperstatica

La determinazione del valore della incognita iperstatica X può essere condotta sostituendo i valori delle rotazioni appena determinati nell'equazione di congruenza (4.4):

$$\varphi_F^{(0)} + \varphi_F^{(1)} X = 0 \rightarrow X = -\frac{\varphi_F^{(0)}}{\varphi_F^{(1)}} = 8.88952 \cdot 10^6 \text{ Nmm} \quad (4.20)$$

4.5 Soluzione numero 2- Sostituzione della cerniera in E con un carrello

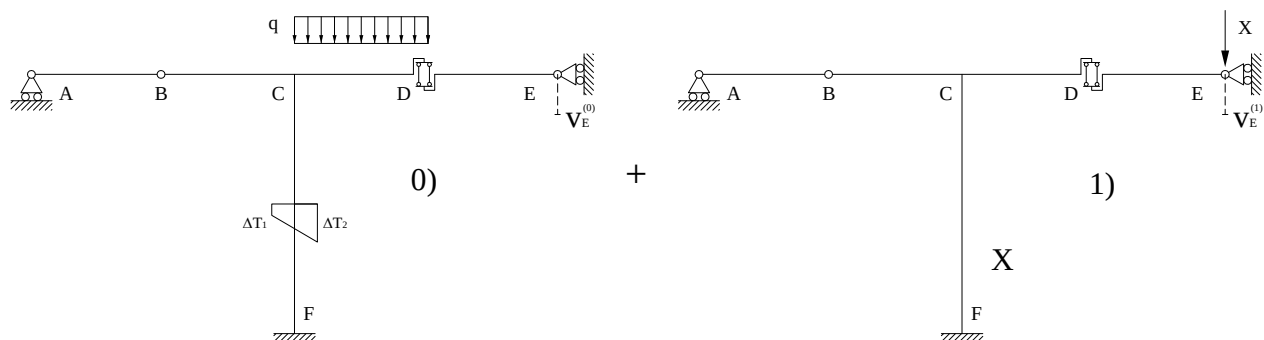


Figura 4.5. Scomposizione della struttura iperstatica negli schemi isostatici 0) e 1) – soluzione 2.

Scegliendo di rendere isostatico il sistema mediante la sostituzione della cerniera in **E** con un carrello ad asse di scorrimento verticale (altrimenti la struttura sarebbe labile ed iperstatica), si hanno gli schemi isostatici indicati in Figura 4.5, in cui l'incognita iperstatica X deve essere valutata in maniera tale che l'abbassamento del punto **E**, v_E , deve essere nullo, ovvero deve essere verificata la seguente equazione di congruenza:

$$v_E = v_E^{(0)} + v_E^{(1)}X = 0 \quad (4.21)$$

4.5.1 Soluzione dello schema isostatico 0)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 0) si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 4.6, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

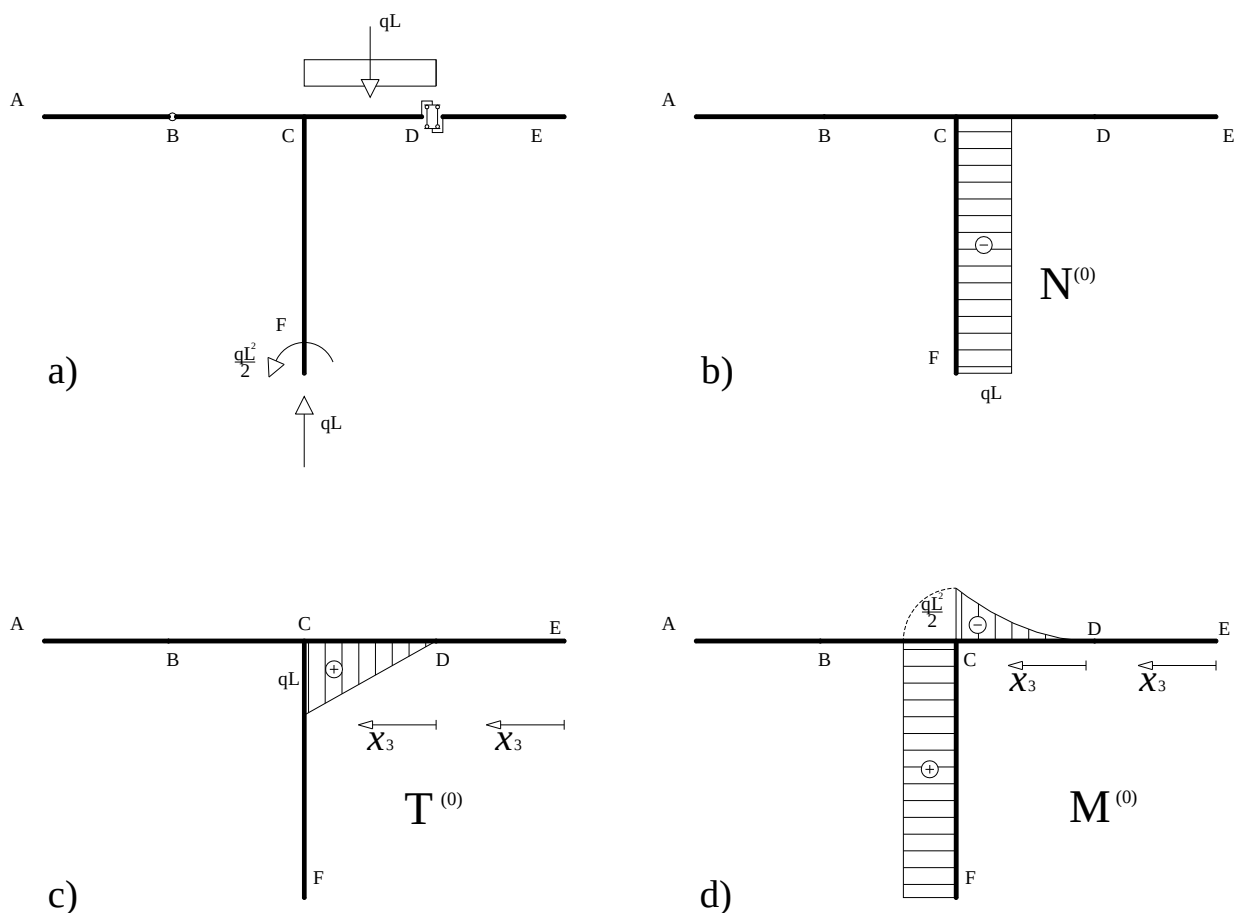


Figura 4.6. Schema isostatico 0); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

$$H_F^{(0)} = H_E^{(0)} = V_A^{(0)} = 0; V_F^{(0)} = qL = 30000\text{N}; M_F^{(0)} = \frac{qL^2}{2} = 4.5 \cdot 10^7 \text{ Nmm}; \quad (4.22)$$

$$N_{AB}^{(0)}(x_3) = 0 \quad N_{BC}^{(0)}(x_3) = 0 \quad N_{CD}^{(0)}(x_3) = 0 \quad N_{DE}^{(0)}(x_3) = 0 \quad N_{CF}^{(0)}(x_3) = -qL \quad (4.23)$$

$$T_{AB}^{(0)}(x_3) = 0 \quad T_{BC}^{(0)}(x_3) = 0 \quad T_{CD}^{(0)}(x_3) = qx_3 \quad T_{DE}^{(0)}(x_3) = 0 \quad T_{CF}^{(0)}(x_3) = 0 \quad (4.24)$$

$$M_{AB}^{(0)}(x_3) = 0 \quad M_{BC}^{(0)}(x_3) = 0 \quad M_{CD}^{(0)}(x_3) = -\frac{qx_3^2}{2} \quad M_{DE}^{(0)}(x_3) = 0 \quad M_{CF}^{(0)}(x_3) = \frac{qL^2}{2} \quad (4.25)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 4.6.

4.5.2 Soluzione dello schema isostatico 1)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 1), in cui l'incognita iperstatica assume valore unitario ($X=1$), si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 4.7, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$V_A^{(1)} = H_E^{(1)} = H_F^{(1)} = 0; \quad V_F^{(1)} = 1; \quad M_F^{(1)} = 2L; \quad (4.26)$$

$$N_{AB}^{(1)}(x_3) = 0 \quad N_{BC}^{(1)}(x_3) = 0 \quad N_{CD}^{(1)}(x_3) = 0 \quad N_{DE}^{(1)}(x_3) = 0 \quad N_{CF}^{(1)}(x_3) = -1 \quad (4.27)$$

$$T_{AB}^{(1)}(x_3) = 0 \quad T_{BC}^{(1)}(x_3) = 0 \quad T_{CD}^{(1)}(x_3) = 1 \quad T_{DE}^{(1)}(x_3) = 1 \quad T_{CF}^{(1)}(x_3) = 0 \quad (4.28)$$

$$M_{AB}^{(1)}(x_3) = 0 \quad M_{BC}^{(1)}(x_3) = 0 \quad M_{CD}^{(1)}(x_3) = -(x_3 + L) \quad M_{DE}^{(1)}(x_3) = -x_3 \quad M_{CF}^{(1)}(x_3) = 2L \quad (4.29)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 4.7-a.

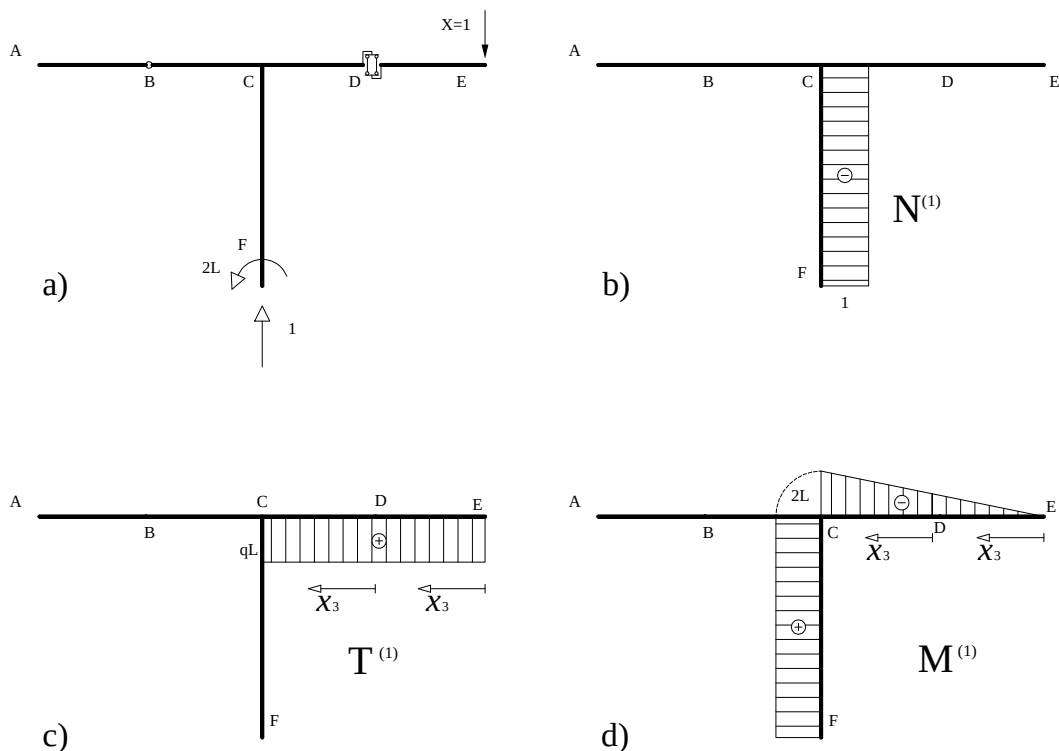


Figura 4.7. Schema isostatico 1); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

4.5.3 Determinazione dell'incognita iperstatica

L'incognita iperstatica va determinata imponendo l'equazione di congruenza (4.21). Per compiere questo passo è necessario procedere al calcolo degli spostamenti $v_E^{(0)}$ e $v_E^{(1)}$. A tale scopo si utilizzerà il metodo della forza unitaria.

4.5.3.1 Calcolo di $v_E^{(0)}$

La determinazione di $v_E^{(0)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 0) come sistema congruente reale ed il sistema 1) come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 0) vale:

$$L_e = 1 \cdot v_E^{(0)} \quad (4.30)$$

Per il calcolo del lavoro interno in questo caso, essendo presente una componente di deformazione termica costante, non può essere trascurato il contributo dello sforzo normale.

Le componenti ΔT_N e ΔT_M della deformazione termica sono quelle ricavate in (4.14).

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 0), sostituendo le espressioni ricavate in (4.23), (4.25), (4.27) e (4.29) e trascurando gli addendi in cui compaiono valori nulli delle sollecitazioni può scriversi come:

$$\begin{aligned} L_i = & \int_0^L M_{CD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CD}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{2L} M_{CF}^{(1)}(x_3) \left(\frac{M_{CF}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} - \frac{2\alpha\Delta T_M}{h} \right) dx_3 + \\ & + \int_0^{2L} N_{CF}^{(1)}(x_3) \left(\frac{N_{CF}^{(0)}(x_3)}{EA} + \alpha\Delta T_N \right) dx_3 = \frac{2qL^2}{EA} + \frac{55}{24} \frac{qL^4}{EI_{x_1}} - \frac{8\alpha\Delta T_M L^2}{h} - 2L\alpha\Delta T_N \end{aligned} \quad (4.31)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$v_E^{(0)} = \frac{2qL^2}{EA} + \frac{55}{24} \frac{qL^4}{EI_{x_1}} - \frac{8\alpha\Delta T_M L^2}{h} - 2L\alpha\Delta T_N = -402.75 \text{ mm} \quad (4.32)$$

4.5.3.2 Calcolo di $v_E^{(1)}$

La determinazione di $v_E^{(1)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 1) sia come sistema congruente reale che come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 1) vale:

$$L_e = 1 \cdot v_E^{(1)} \quad (4.33)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 1), tenendo ancora in considerazione lo sforzo normale, sostituendo le espressioni ricavate in (4.27) e (4.29) e trascurando gli addendi in cui compaiono valori nulli delle sollecitazioni può scriversi come:

$$L_i = \int_0^L M_{CD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CD}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{2L} M_{CF}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CF}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{2L} N_{CF}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CF}^{(1)}(x_3)}{EA} dx_3 = \frac{32}{3} \frac{L^3}{EI_{x_1}} + \frac{2L}{EA} \quad (4.34)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$v_E^{(1)} = \frac{32}{3} \frac{L^3}{EI_{x_1}} + \frac{2L}{EA} = 6.69197 \cdot 10^{-2} \text{ mm/N} \quad (4.35)$$

4.5.4 Calcolo della incognita iperstatica

La determinazione del valore della incognita iperstatica X può essere condotta sostituendo i valori delle rotazioni appena determinati nell'equazione di congruenza (4.21):

$$v_E^{(0)} + v_E^{(1)} X = 0 \rightarrow X = -\frac{v_E^{(0)}}{v_E^{(1)}} = -6018.41 \text{ N} \quad (4.36)$$

4.6 Determinazione dei diagrammi della sollecitazione

Applicando l'equazione (4.3), come descritto in precedenza, è possibile ricavare i valori delle reazioni vincolari e l'andamento delle caratteristiche della sollecitazione del sistema iperstatico assegnato. Questo può essere fatto a partire dalle due soluzioni determinate ottenendo, ovviamente, gli stessi andamenti delle reazioni vincolari e delle caratteristiche della sollecitazione. Operando, per esempio, secondo la seconda soluzione trovata si ha:

$$V_A = H_E = H_F = 0; \quad V_F = qL + X = 23981.6 \text{ N}; \quad M_F = \frac{qL^2}{2} + 2LX = 8.88952 \cdot 10^6 \text{ Nmm}; \quad V_E = X = -6018.41 \text{ N} \quad (4.37)$$

$$N_{AB}(x_3) = 0 \quad N_{BC}(x_3) = 0 \quad N_{CD}(x_3) = 0 \quad N_{DE}(x_3) = 0 \quad N_{CF}(x_3) = -qL - X = -23981.6 \text{ N} \quad (4.38)$$

$$T_{AB}(x_3) = 0 \quad T_{BC}(x_3) = 0 \quad T_{CD}(x_3) = qx_3 + X = 10x_3 - 6018.41 \text{ N} \quad T_{DE}(x_3) = X = -6018.41 \text{ N} \quad T_{CF}(x_3) = 0 \quad (4.39)$$

$$M_{AB}(x_3) = 0 \quad M_{BC}(x_3) = 0$$

$$M_{CD}(x_3) = -\frac{q x_3^2}{2} - X(L + x_3) = 1.8055 \cdot 10^7 + 6018.41 x_3 - 5 x_3^2 \text{ Nmm} \quad (4.40)$$

$$M_{DE}(x_3) = -X x_3 = 6018.41 x_3 \text{ Nmm}$$

I corrispondenti diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione sono riportati nella seguente Figura 4.8.

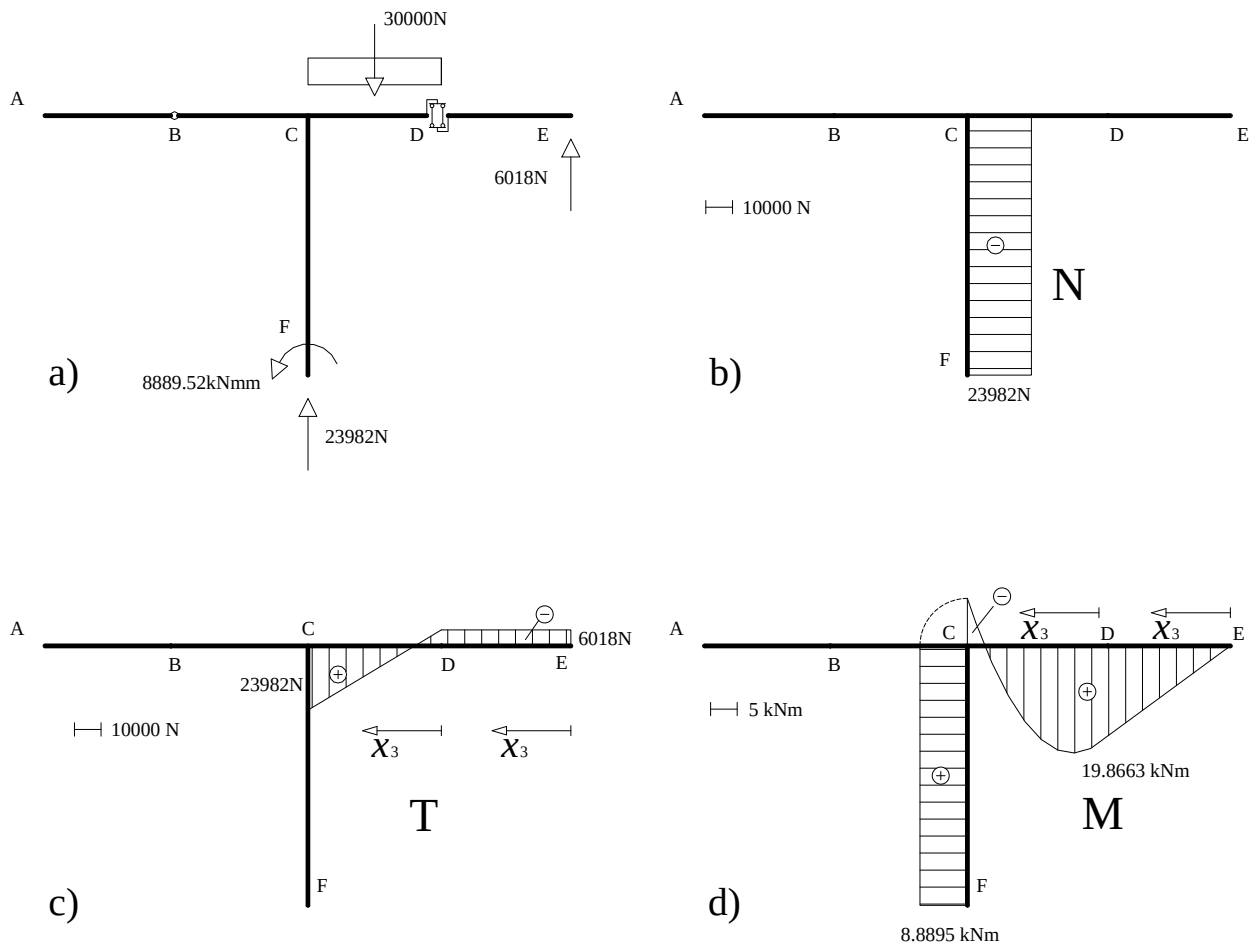


Figura 4.8. Schema iperstatico; a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

4.7 Verifica della sezione più sollecitata

Dall'esame dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione riportati nella Figura 4.8 si deduce che la sezione più sollecitata è quella nel tratto **CD** in cui agisce il momento massimo. Per determinare l'ascissa della sezione bisogna trovare il punto di nullo del diagramma del taglio:

$$T_{CD}(x_3) = 10 x_3 - 6018.41 \text{ N} = 0; \rightarrow x_3 = 601.84 \text{ mm} \quad (4.41)$$

La sezione più sollecitata è, quindi, soggetta alle seguenti caratteristiche della sollecitazione:

$$N = 0; \quad T = -6018.41 \text{ N}; \quad M = 1.98663 \cdot 10^7 \text{ Nmm}. \quad (4.42)$$

La distribuzione delle tensioni normali e tangenziali dovute alle caratteristiche della sollecitazione riportate nella (4.42) si calcolano, rispettivamente, applicando la formula di Navier per le tensioni normali e la teoria approssimata del taglio secondo Jourawski per le tensioni tangenziali.

Per quanto riguarda le tensioni normali, l'andamento è quello indicato dalla relazione:

$$t_{33} = \frac{N}{A} + \frac{M}{I_{x_1}} x_2 = \frac{19866300}{20496666} x_2 = 0.969246 x_2 \text{ N/mm}^2 \quad (4.43)$$

I valori estremi delle tensioni si verificano in corrispondenza delle fibre inferiori ed superiori ottenendo:

$$t_{33,i} = t_{33}|_{x_2=100\text{mm}} = 96.924 \text{ N/mm}^2 \quad t_{33,s} = t_{33}|_{x_2=-100\text{mm}} = -96.924 \text{ N/mm}^2 \quad (4.44)$$

Il diagramma delle tensioni normali t_{33} è riportato nella Figura 4.9.

Per quanto attiene alle tensioni tangenziali, la loro determinazione può essere condotta applicando la nota formula di Jourawski alle corde illustrate nella Figura 4.9:

$$t_{31} = -\frac{TS_{x_1}^{\Omega'}}{I_{x_1} c} = 0.02789 y \text{ N/mm}^2 \text{ con } S_{x_1}^{\Omega'} = cy \frac{h-c}{2}; \quad (4.45)$$

il valore massimo della tensione t_{31} si ha all'intersezione dell'ala con l'anima della sezione:

$$t_{31,max} = t_{31}|_{y=\frac{b}{2}} = 1.3974 \text{ N/mm}^2 \quad (4.46)$$

L'andamento delle tensioni tangenziali t_{32} , invece, è dato dalla:

$$t_{32} = -\frac{TS_{x_1}^{\Omega''}}{I_{x_1} s} = 5.579 + 0.02642z - 1.468 \cdot 10^{-4} z^2 \text{ N/mm}^2 \text{ con } S_{x_1}^{\Omega''} = bc \frac{h-c}{2} + 2sz \left(\frac{h-z}{2} - c \right); \quad (4.47)$$

il valore massimo della tensione t_{32} si ha in corrispondenza della fibra baricentrica in cui vale:

$$t_{32,max} = t_{32}|_{z=\frac{h}{2}-c} = 6.7682 \text{ N/mm}^2 \quad (4.48)$$

Il diagramma delle tensioni tangenziali t_{31} e t_{32} è riportato nella Figura 4.9

Data l'entità delle tensioni appena determinate, la verifica di sicurezza può essere condotta, secondo il criterio di resistenza di Von Mises, in corrispondenza del punto **P** assumendo che lì agiscano la tensione $t_{33,s}$, la $t_{31,max}$ e la $t_{32}|_{z=h-c}$:

$$\sigma_{id} = \sqrt{t_{33,i}^2 + 3(t_{31,max}^2 + t_{32}|_{z=h-c}^2)} = 97.435 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{amm} = 160 \text{ N/mm}^2 \quad (4.49)$$

VERIFICA SODDISFATTA

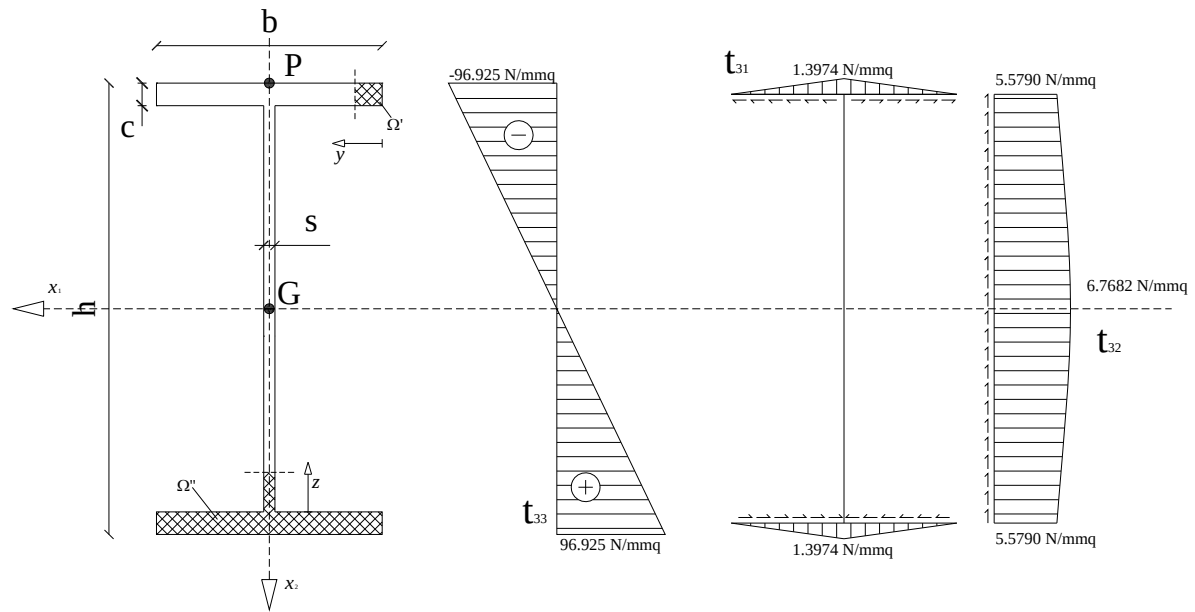


Figura 4.9. Tensioni normali e tangenziali sulla sezione trasversale.

5 Soluzione del compito del 18 luglio 2011

- Tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della struttura riportata in figura
- Verificare la sezione più sollecitata.

Dati:

$E = 210000 \text{ N/mm}^2$	$\sigma_{amm} = 160 \text{ N/mm}^2$	$\alpha = 1,50 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$\Delta T = 10^\circ\text{C}$	$q = 5 \text{ N/mm}$
$L = 3000 \text{ mm}$	$\theta = 45^\circ$	$b = 150 \text{ mm}$	$h = 200 \text{ mm}$	$c = 20 \text{ mm}$
			$s = 10 \text{ mm}$	

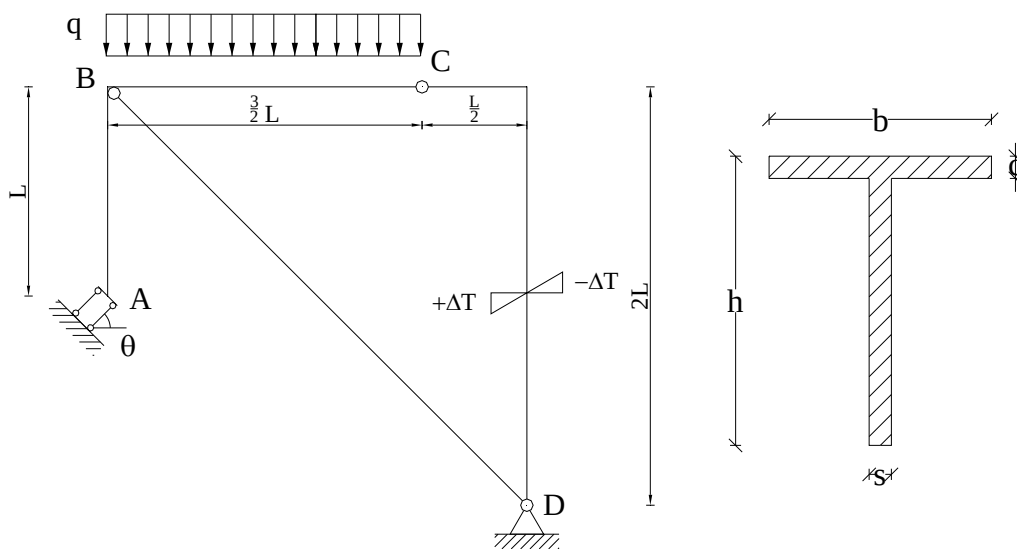


Figura 5.1. Sistema da analizzare; schema d'assi e sezione trasversale.

5.1 Riconoscimento dei gradi di iperstaticità

Per riconoscere il grado di iperstaticità del sistema si può considerare l'asta BD come un pendolo interno. Il sistema privo di vincoli è composto, quindi, da due aste ABC e CD e quindi possiede nel piano sei gradi di libertà. I gradi di libertà sottratti dai vincoli esterni sono quattro (due per il vincolo in A e due per il vincolo in D), mentre i vincoli esterni sottraggono tre gradi di libertà (due per la cerniera interna in C e uno per il pendolo interno BD), per un totale di sette molteplicità vincolari, quindi il sistema è una volta iperstatico $[q = 3n - v = 6 - (2 + 2) - (2 + 1) = -1]$.

5.2 Calcolo delle caratteristiche inerziali della sezione trasversale

La sezione trasversale a T possiede un asse di simmetria, quindi il baricentro G si troverà su di esso. Per determinare la posizione del baricentro si procede come segue: dapprima si determina l'area:

$$A = bh - (b-s)(h-c) = 4800 \text{ mm}^2 \quad (5.1)$$

Quindi si determina il momento statico della sezione con riferimento all'asse x_0 passante per il lembo inferiore della sezione:

$$S_{x_0} = \frac{bh^2}{2} - (b-s)\frac{(h-c)^2}{2} = 732000 \text{ mm}^3 \quad (5.2)$$

La posizione del baricentro rispetto al lembo inferiore della sezione si ottiene dalla relazione:

$$y_G = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{732000}{4800} = 152.5 \text{ mm} \quad (5.3)$$

Il momento di inerzia rispetto l'asse forte (l'asse orizzontale baricentrico x_1) si calcola come:

$$I_{x_1} = I_{x_0} - Ay_G^2 = \frac{bh^3}{3} - \frac{(b-s)(h-c)^3}{3} - Ay_G^2 = 16210000 \text{ mm}^4 \quad (5.4)$$

5.3 Metodo di analisi (metodo delle forze): posizione del problema

Secondo quanto prescritto dal metodo delle forze, il sistema assegnato è equivalente alla sovrapposizione di schemi isostatici ottenuti mediante la soppressione di un numero di vincoli a molteplicità semplice pari al grado di iperstaticità, quindi, nel caso in esame, sopprimendo una molteplicità vincolare. Vi saranno, ovviamente, diverse possibilità di scelta per pervenire agli schemi isostatici e nel seguito ne viene esaminata una.

Una volta determinata l'incognita iperstatica X come mostrato nel seguito, i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione agenti sul sistema assegnato possono essere ricavate mediante il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{cases} N(x_3) = N^{(0)}(x_3) + N^{(1)}(x_3)X \\ T(x_3) = T^{(0)}(x_3) + T^{(1)}(x_3)X \\ M(x_3) = M^{(0)}(x_3) + M^{(1)}(x_3)X \end{cases} \quad (5.5)$$

5.4 Soluzione dello schema iperstatico

Scegliendo di rendere isostatico il sistema mediante la soppressione della molteplicità vincolare legata alla rotazione del punto **A**, i sistemi isostatici sono quelli indicati in Figura 5.2, in cui l'incognita iperstatica X deve essere valutata in maniera tale che la rotazione del punto **A** φ_A , deve essere nulla, ovvero deve essere verificata la seguente equazione di congruenza:

$$\varphi_A = \varphi_A^{(0)} + \varphi_A^{(1)}X = 0 \quad (5.6)$$

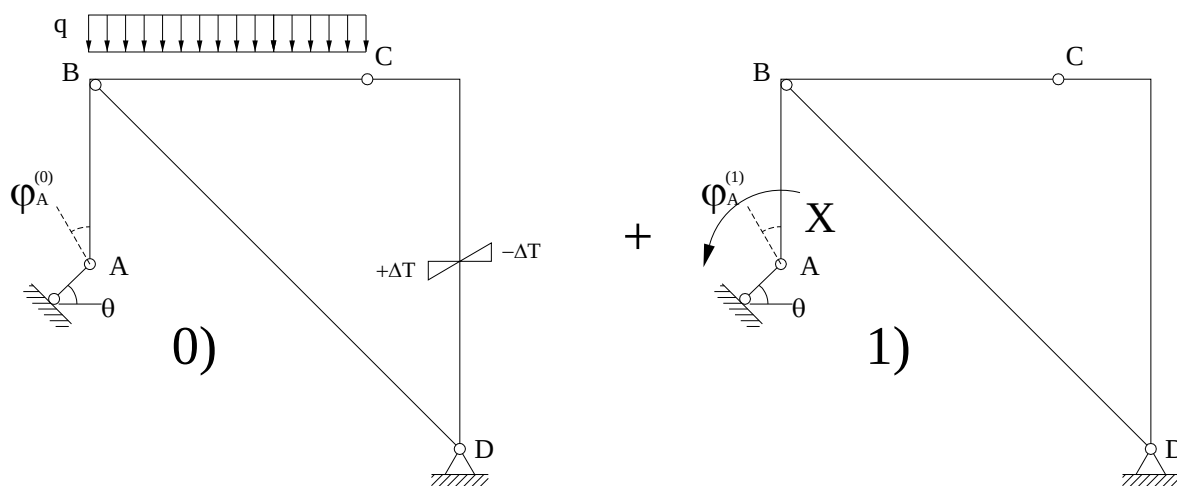


Figura 5.2. Scomposizione della struttura iperstatica negli schemi isostatici 0) e 1).

5.4.1 Soluzione dello schema isostatico 0)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 0) si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 5.3, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$H_A^{(0)} = V_A^{(0)} = H_D^{(0)} = \frac{5}{8}qL = 9375\text{N}; \quad V_D^{(0)} = \frac{7}{8}qL = 13125\text{N}; \quad R_B^{(0)} = \frac{13}{24}\sqrt{2}qL = 0.766qL = 11490\text{N}; \quad (5.7)$$

$$N_{AB}^{(0)}(x_3) = -\frac{5}{8}qL; \quad N_{BC}^{(0)}(x_3) = N_{CE}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{12}; \quad (5.8)$$

$$N_{DE}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{3}; \quad N_{BD}^{(0)}(x_3) = -\frac{13}{24}\sqrt{2}qL;$$

$$T_{AB}^{(0)}(x_3) = -\frac{5}{8}qL; \quad T_{BC}^{(0)}(x_3) = \frac{7}{6}qL - qx_3; \quad T_{CE}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{3}; \quad (5.9)$$

$$T_{DE}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{12}; \quad T_{BD}^{(0)}(x_3) = 0;$$

$$M_{AB}^{(0)}(x_3) = -\frac{5}{8}qLx_3; \quad M_{BC}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL^2}{2} + \frac{7}{6}qLx_3 - \frac{5}{8}qL^2; \quad M_{CE}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{3}x_3; \quad (5.10)$$

$$M_{DE}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{12}x_3; \quad M_{BD}^{(0)}(x_3) = 0;$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 5.3-a.

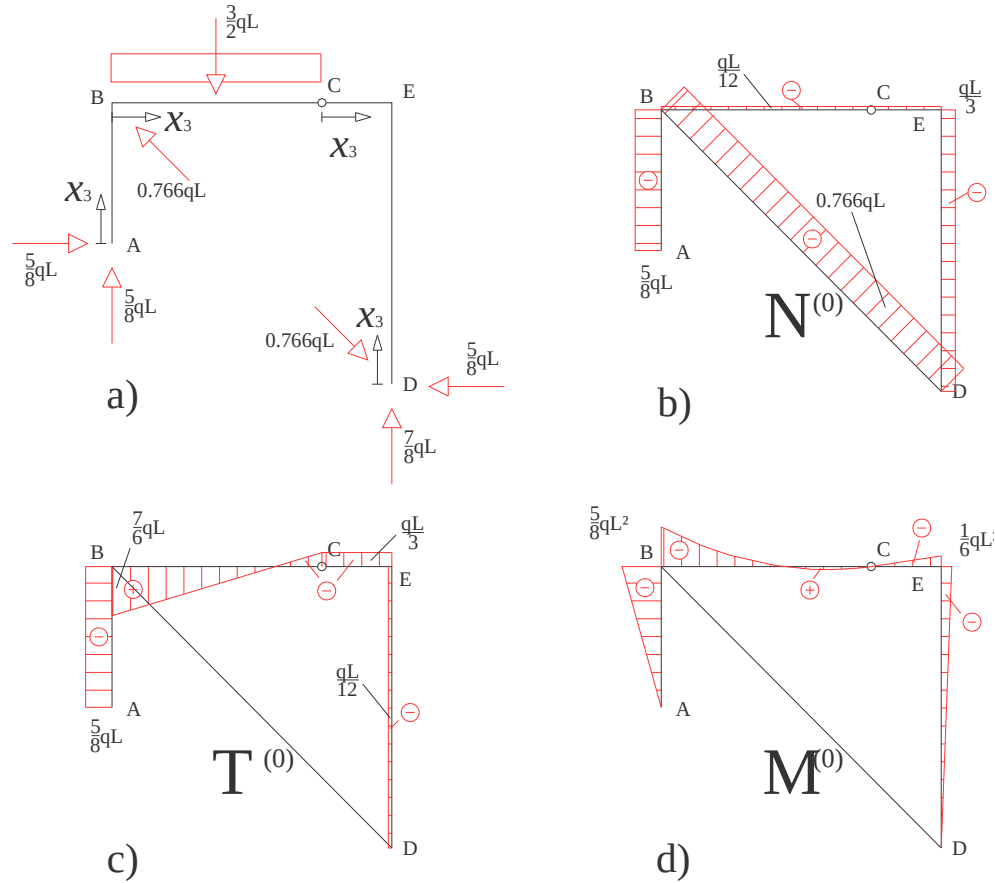


Figura 5.3. Schema isostatico 0); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

5.4.2 Soluzione dello schema isostatico 1)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 1), in cui l'incognita iperstatica assume valore unitario ($X=1$), si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 5.4, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$H_A^{(1)} = V_A^{(1)} = H_D^{(1)} = V_D^{(1)} = \frac{X}{3L}; \quad R_B^{(1)} = \frac{5\sqrt{2}X}{9L}; \quad (5.11)$$

$$N_{AB}^{(1)}(x_3) = -\frac{X}{3L}; \quad N_{BC}^{(1)}(x_3) = N_{CE}^{(1)}(x_3) = \frac{2X}{9L}; \quad (5.12)$$

$$N_{DE}^{(1)}(x_3) = \frac{8X}{9L}; \quad N_{BD}^{(1)}(x_3) = -\frac{5\sqrt{2}X}{9L};$$

$$T_{AB}^{(1)}(x_3) = -\frac{X}{3L}; \quad T_{BC}^{(1)}(x_3) = T_{CE}^{(1)}(x_3) = \frac{8X}{9L}; \quad (5.13)$$

$$T_{DE}^{(1)}(x_3) = -\frac{2X}{9L}; \quad T_{BD}^{(1)}(x_3) = 0;$$

$$\begin{aligned}
 M_{AB}^{(1)}(x_3) &= X \left(-1 - \frac{x_3}{3L} \right); & M_{BC}^{(1)}(x_3) &= -\frac{4}{3}X + \frac{8X}{9L}x_3; & M_{CE}^{(1)}(x_3) &= \frac{8X}{9L}x_3; \\
 M_{DE}^{(1)}(x_3) &= \frac{2X}{9L}x_3; & M_{BD}^{(1)}(x_3) &= 0;
 \end{aligned}
 \tag{5.14}$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 5.4-a.

5.4.3 Determinazione dell'incognita iperstatica

Come detto in precedenza l'incognita iperstatica va determinata imponendo l'equazione di congruenza (5.6). Per compiere questo passo è necessario procedere al calcolo degli spostamenti $\varphi_A^{(0)}$ e $\varphi_A^{(1)}$. A tale scopo si utilizzerà il metodo della forza unitaria.

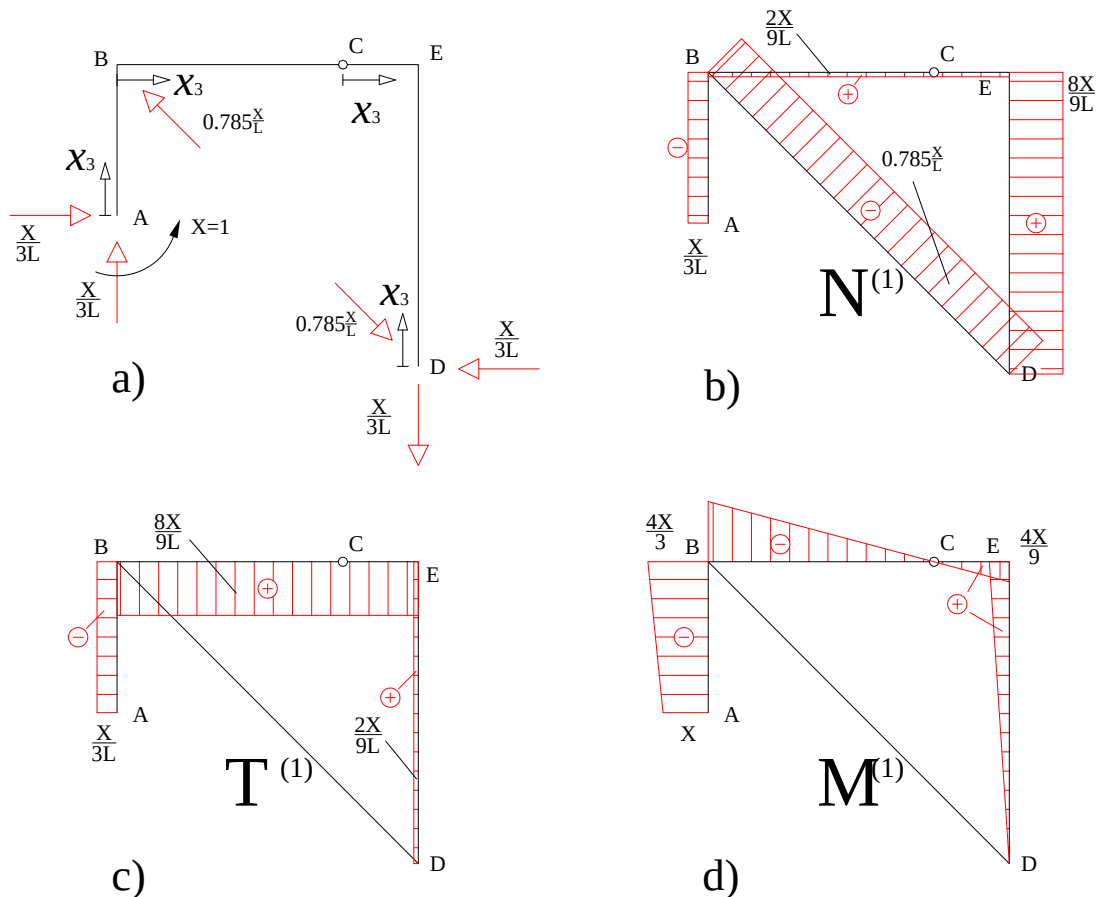


Figura 5.4. Schema isostatico 1); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

5.4.3.1 Calcolo di $\varphi_A^{(0)}$

La determinazione di $\varphi_A^{(0)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 0) come sistema congruente reale ed il sistema 1) come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 0) vale:

$$L_e = 1 \cdot \varphi_A^{(0)} \quad (5.15)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 0), sostituendo le espressioni ricavate in (5.10) e in (5.14), può scriversi come:

$$\begin{aligned} L_i = & \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{3L/2} M_{BC}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BC}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \\ & + \int_0^{L/2} M_{CE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CE}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{2L} M_{ED}^{(1)}(x_3) \left(\frac{M_{ED}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} + \frac{2\alpha\Delta T}{h} \right) dx_3 = \frac{16}{27} \frac{qL^3}{EI_{x_1}} + \frac{2}{9} \frac{\alpha\Delta TL}{h} \end{aligned} \quad (5.16)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$\varphi_A^{(0)} = \frac{16}{27} \frac{qL^3}{EI_{x_1}} + \frac{2}{9} \frac{\alpha\Delta TL}{h} = 2.40011 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \quad (5.17)$$

5.4.3.2 Calcolo di $\varphi_A^{(1)}$

La determinazione di $\varphi_A^{(1)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 1) sia come sistema congruente reale che come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 1) vale:

$$L_e = 1 \cdot \varphi_A^{(1)} \quad (5.18)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 1) vale, sostituendo le espressioni ricavate in (5.14):

$$\begin{aligned} L_i = & \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{3L/2} M_{BC}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BC}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \\ & + \int_0^{L/2} M_{CE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CE}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{2L} M_{ED}^{(1)}(x_3) \frac{M_{ED}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 = \frac{187}{81} \frac{qL^3}{EI_{x_1}} \end{aligned} \quad (5.19)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$\varphi_A^{(1)} = \frac{187}{81} \frac{L}{EI_{x_1}} = 2.03458 \cdot 10^{-9} \text{ rad/Nmm} \quad (5.20)$$

5.4.3.3 Calcolo della incognita iperstatica

La determinazione del valore della incognita iperstatica X può essere condotta sostituendo i valori delle rotazioni appena determinati nell'equazione di congruenza (5.6):

$$\varphi_A^{(0)} + \varphi_A^{(1)} X = 0 \rightarrow X = -\frac{\varphi_A^{(0)}}{\varphi_A^{(1)}} = -\frac{48}{187} qL^2 - \frac{18}{187} \frac{\alpha \Delta T E I_{x_1}}{h} = -11796.6 \text{ kNmm} \quad (5.21)$$

Il verso effettivo dell'incognita iperstatica è, quindi, opposto a quello ipotizzato.

5.5 Determinazione dei diagrammi della sollecitazione

Applicando l'equazione (5.5), come descritto in precedenza, è possibile ricavare i valori delle reazioni vincolari e l'andamento delle caratteristiche della sollecitazione del sistema iperstatico assegnato, trovando:

$$H_A = V_A = H_D = \frac{5}{8} qL + \frac{X}{3L} = 8064.27 \text{ N}; \quad V_D = \frac{7}{8} qL - \frac{X}{3L} = 14435.70 \text{ N}; \quad (5.22)$$

$$M_A = X = -11796.6 \text{ kNmm}; \quad R_B = \frac{13\sqrt{2}}{24} qL + \frac{5\sqrt{2}}{9L} X = 8401.07 \text{ N}$$

$$N_{AB}(x_3) = \frac{5}{8} qL + \frac{X}{3L} = -8064.27 \text{ N}; \quad N_{BC}(x_3) = N_{CE}(x_3) = -\frac{qL}{12} + \frac{2X}{9L} = -2123.82 \text{ N}; \quad (5.23)$$

$$N_{DE}(x_3) = -\frac{qL}{3} + \frac{8X}{9L} = -8495.27 \text{ N}; \quad N_{BD}(x_3) = -\frac{13\sqrt{2}}{24} qL - \frac{5\sqrt{2}}{9L} X = -8401.07 \text{ N};$$

$$T_{AB}(x_3) = \frac{5}{8} qL + \frac{X}{3L} = 8064.27 \text{ N}; \quad T_{BC}(x_3) = \frac{7}{6} qL + \frac{8X}{9L} - q x_3 = 14004.7 \text{ N} - 5 x_3 \text{ N}; \quad (5.24)$$

$$T_{CE}(x_3) = -\frac{qL}{3} + \frac{8X}{9L} = -8495.27 \text{ N}; \quad T_{ED}(x_3) = -\frac{qL}{12} + \frac{2X}{9L} = 2123.82 \text{ N}$$

$$M_{AB}(x_3) = -\frac{5}{8} qL x_3 - \left(1 + \frac{x_3}{3L}\right) X = 1.17966 \cdot 10^7 - 8064.27 x_3 \text{ Nmm}$$

$$M_{BC}(x_3) = -\frac{q x_3^2}{2} + \frac{7}{6} qL x_3 - \frac{5}{8} qL^2 + \left(\frac{8 x_3}{9L} - \frac{4}{3}\right) X = -1.23963 \cdot 10^7 + 14004.70 x_3 - 2.5 x_3^2 \text{ Nmm} \quad (5.25)$$

$$M_{CE}(x_3) = -\frac{qL x_3}{3} + \frac{8X}{9L} x_3 = -8495.27 x_3 \text{ Nmm}$$

$$M_{DE}(x_3) = \left(-\frac{qL}{12} + \frac{2X}{9L}\right) x_3 = -2123.82 x_3 \text{ Nmm}$$

I corrispondenti diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione sono riportati nella seguente Figura 5.5.

5.6 Verifica della sezione più sollecitata

Dall'esame dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione riportati nella Figura 5.5 si deduce che la sezione più sollecitata è quella denotata con la lettera **E** appartenente all'asta **DE**, che è soggetta alle seguenti caratteristiche della sollecitazione:

$$N_E = 8495 \text{ N}; \quad T_E = 2124 \text{ N}; \quad M_E = -12743 \text{ kNmm}. \quad (5.26)$$

La distribuzione delle tensioni normali e tangenziali dovute alle caratteristiche della sollecitazione riportate nella (5.26) si calcolano, rispettivamente, applicando la formula di Navier per le tensioni normali e la teoria approssimata del taglio secondo Jourawski per le tensioni tangenziali.

Per quanto riguarda le tensioni normali, l'andamento è quello indicato dalla relazione:

$$t_{33} = \frac{N_E}{A} + \frac{M_E}{I_{x_1}} x_2 = \frac{8495.27}{4800} - \frac{12742900}{16210000} x_2 = 1.7698 - 0.78611 x_2 \text{ N/mm}^2 \quad (5.27)$$

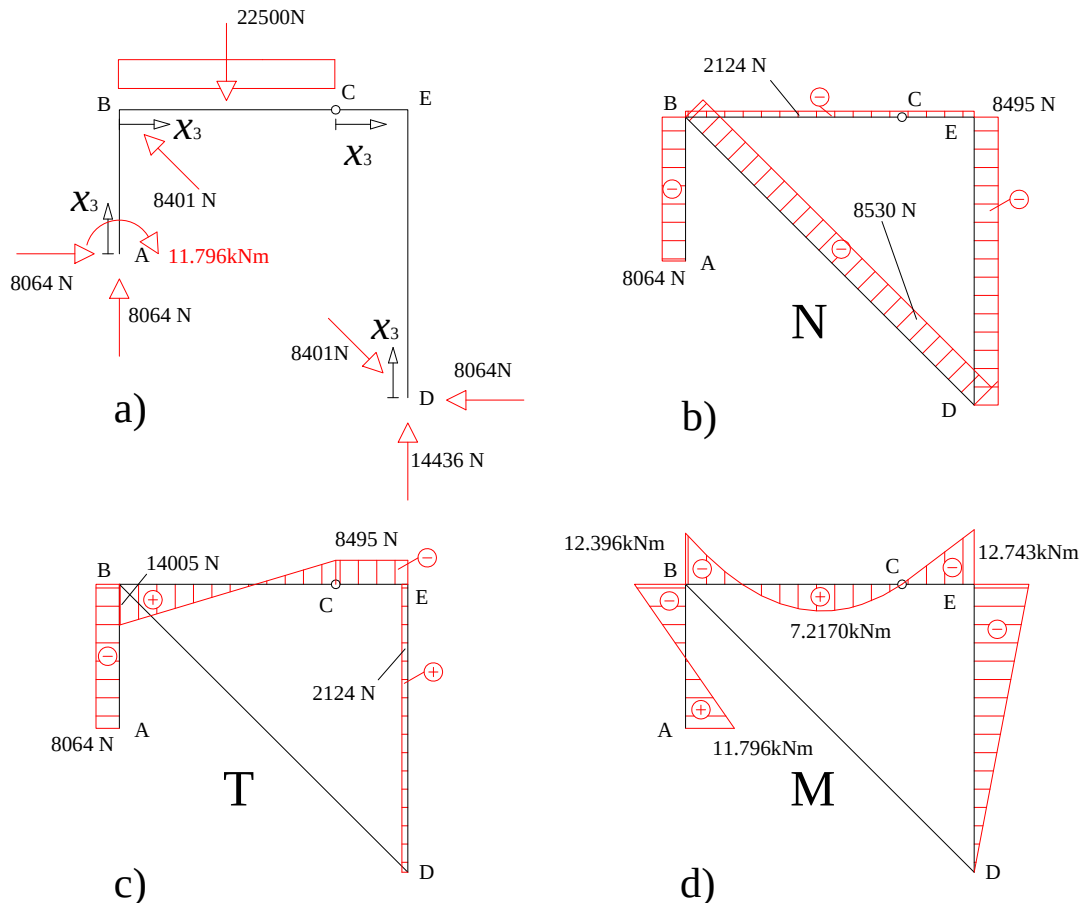


Figura 5.5. Schema iperstatico; a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

I valori estremi delle tensioni si verificano in corrispondenza delle fibre inferiori ed superiori ottenendo:

$$t_{33,i} = t_{33}|_{x_2=y_G} = -121.652 \text{ N/mm}^2 \quad t_{33,s} = t_{33}|_{x_2=h-y_G} = 35.571 \text{ N/mm}^2 \quad (5.28)$$

Il diagramma delle tensioni normali t_{33} è riportato nella Figura 5.6.

Per quanto attiene alle tensioni tangenziali, la loro determinazione può essere condotta applicando la nota formula di Jourawski alle corde illustrate nella Figura 5.6:

$$t_{31} = -\frac{T_E S_{x_1}^{\Omega'}}{I_{x_1} c} = -0.00491 y \text{ N/mm}^2 \text{ con } S_{x_1}^{\Omega'} = -cy \left(h - y_G - \frac{c}{2} \right); \quad (5.29)$$

il valore massimo della tensione t_{31} si ha in corrispondenza dell'attacco dell'ala all'anima:

$$t_{31,max} = t_{31}|_{y=\frac{b}{2}} = -0.3685 \text{ N/mm}^2 \quad (5.30)$$

L'andamento delle tensioni tangenziali t_{32} , invece, è dato dalla:

$$t_{32} = -\frac{T_E S_{x_1}^{\Omega''}}{I_{x_1} s} = 0.01998 - 0.00006551z^2 \text{ N/mm}^2 \text{ con } S_{x_1}^{\Omega''} = sz \left(y_G - \frac{z}{2} \right); \quad (5.31)$$

il valore massimo della tensione t_{32} si ha in corrispondenza della fibra baricentrica in cui vale:

$$t_{32,max} = t_{32}|_{z=y_G} = 1.5235 \text{ N/mm}^2 \quad (5.32)$$

Il diagramma delle tensioni tangenziali t_{31} e t_{32} è riportato nella Figura 5.6.

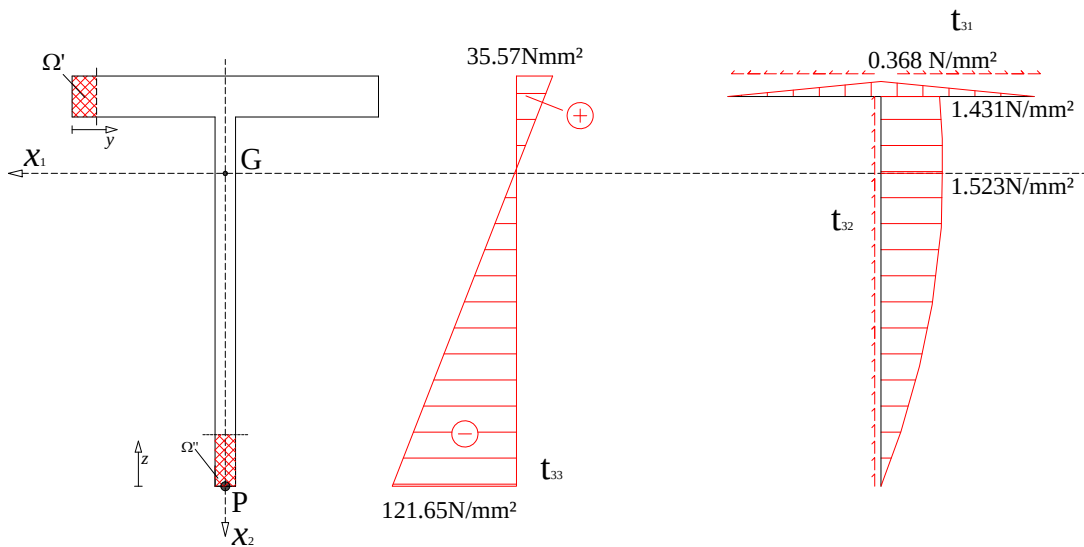


Figura 5.6. Tensioni normali e tangenziali sulla sezione trasversale.

Data l'entità delle tensioni appena determinate, la verifica di sicurezza può essere condotta, secondo il criterio di resistenza di Von Mises, in corrispondenza del punto **P** assumendo che lì agisca la sola tensione $t_{33,i}$.

$$\sigma_{id} = \sqrt{t_{33,i}^2} = 121.652 \text{ N/mm}^2 < \sigma_{amm} = 160 \text{ N/mm}^2 \quad (5.33)$$

VERIFICA SODDISFATTA

6 Soluzione del compito del 05 settembre 2011

- Tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della struttura riportata in figura
- Verificare la sezione più sollecitata.

Dati:

$E = 2.1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$	$\sigma_{amm} = 1.6 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$	$h = 20 \text{ cm}$	$b_1 = 10 \text{ cm}$	$t = 1 \text{ cm}$
$L = 250 \text{ cm}$	$q = 100 \text{ N/cm}$	$\phi_0 = 0.01 \text{ rad}$	$b_2 = 20 \text{ cm}$	$s = 0.5 \text{ cm}$

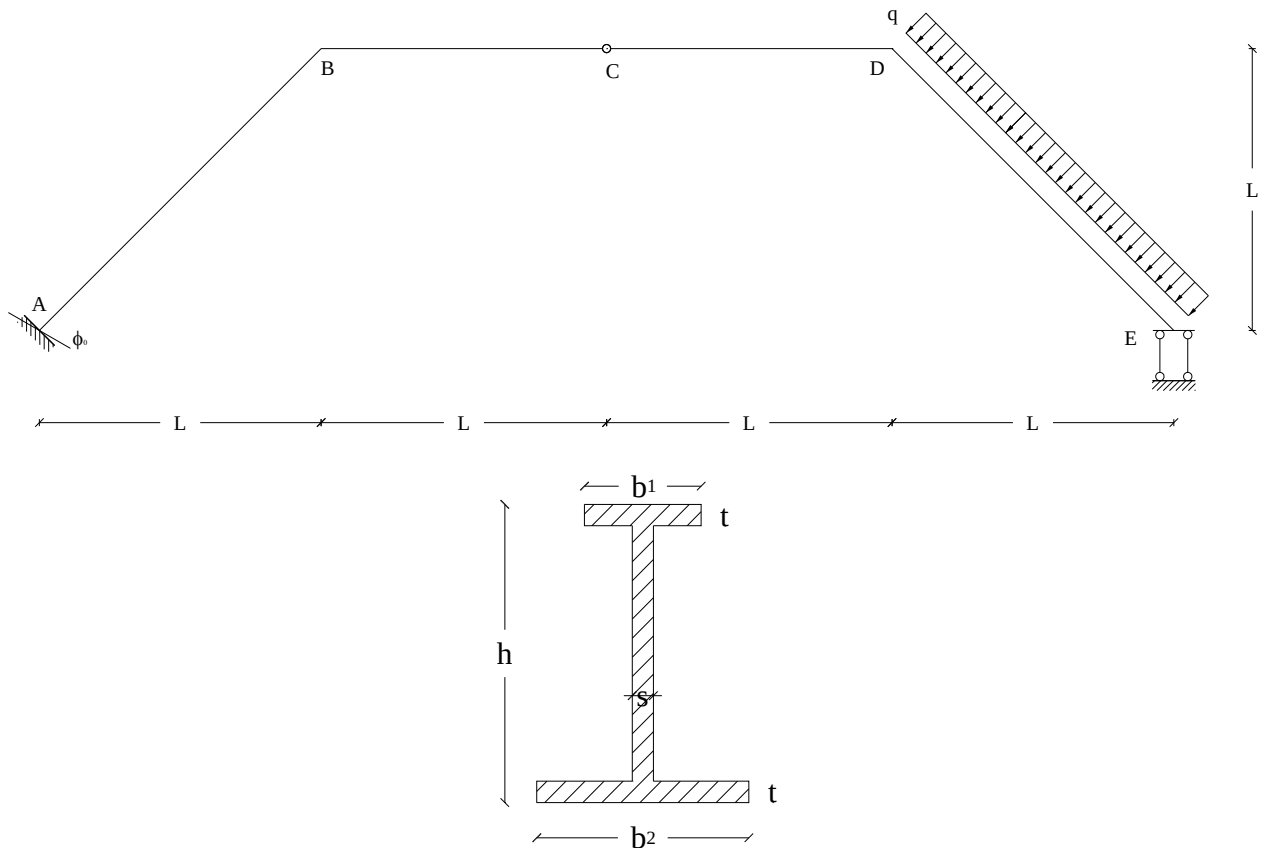


Figura 6.1. Sistema da analizzare; schema d'assi e sezione trasversale.

6.1 Riconoscimento dei gradi di iperstaticità

Per riconoscere il grado di iperstaticità del sistema si può rilevare che il sistema privo di vincoli è composto da due aste ABC e CDE e quindi possiede nel piano sei gradi di libertà. I gradi di libertà sottratti dai vincoli esterni sono cinque (tre per il vincolo in A e due per il vincolo in E), mentre i

vincoli interni sottraggono due gradi di libertà (la cerniera interna in C), per un totale di sette molteplicità vincolari sottratte, quindi il sistema è una volta iperstatico.

$$q = 3n - v = 6 - (2 + 2) - (2 + 1) = -1 \quad (6.1)$$

6.2 Calcolo delle caratteristiche inerziali della sezione trasversale

La sezione trasversale è a I con le ali asimmetriche e possiede un asse di simmetria, quindi il baricentro G si troverà su di esso. Per determinare la posizione verticale del baricentro si procede come nel seguito. Dapprima si determina l'area:

$$A = t(b_1 + b_2) + s(h - 2t) = 39 \text{ cm}^2 \quad (6.2)$$

Quindi si determina il momento statico della sezione con riferimento all'asse x_0 passante per il lembo inferiore della sezione:

$$S_{x_0} = \frac{b_2 t^2}{2} + b_1 t \left(h - \frac{t}{2} \right) + s \frac{h}{2} (h - 2t) = 295 \text{ mm}^3 \quad (6.3)$$

La posizione del baricentro rispetto al lembo inferiore della sezione si ottiene dalla relazione:

$$y_G = \frac{S_{x_0}}{A} = \frac{295}{39} = 7.56 \text{ mm} \quad (6.4)$$

Il momento di inerzia rispetto l'asse forte (l'asse orizzontale baricentrico x_1) si calcola come:

$$\begin{aligned} I_{x_1} = & \frac{b_2 t^3}{12} + b_2 t \left(y_G - \frac{t}{2} \right)^2 + \frac{b_1 t^3}{12} + b_1 t \left(h - y_G - \frac{t}{2} \right)^2 + \frac{s(h - 2t)^3}{12} + \\ & + s(h - 2t) \left(\frac{h}{2} - y_G \right)^2 = 2721.59 \text{ cm}^4 \end{aligned} \quad (6.5)$$

6.3 Metodo di analisi (metodo delle forze): posizione del problema

Secondo quanto prescritto dal metodo delle forze, il sistema assegnato è equivalente alla sovrapposizione di schemi isostatici ottenuti mediante la soppressione di un numero di vincoli a molteplicità semplice pari al grado di iperstaticità, quindi, nel caso in esame, sopprimendo una molteplicità vincolare. Vi saranno, ovviamente, diverse possibilità di scelta per pervenire agli schemi isostatici e nel seguito ne viene esaminata una.

Una volta determinata l'incognita iperstatica X come mostrato nel seguito, i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione agenti sul sistema assegnato possono essere ricavate mediante il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{cases} N(x_3) = N^{(0)}(x_3) + N^{(1)}(x_3)X \\ T(x_3) = T^{(0)}(x_3) + T^{(1)}(x_3)X \\ M(x_3) = M^{(0)}(x_3) + M^{(1)}(x_3)X \end{cases} \quad (6.6)$$

6.4 Soluzione dello schema iperstatico

Scegliendo di rendere isostatico il sistema mediante la soppressione della molteplicità vincolare legata alla rotazione del punto **A**, i sistemi isostatici sono quelli indicati in Figura 6.2, in cui l'incognita iperstatica X deve essere valutata in maniera tale che la rotazione del punto **A** φ_A , deve essere pari alla rotazione anelastica imposta ϕ_0 , ovvero deve essere verificata la seguente equazione di congruenza:

$$\varphi_A = \varphi_A^{(0)} + \varphi_A^{(1)}X = \phi_0 \quad (6.7)$$

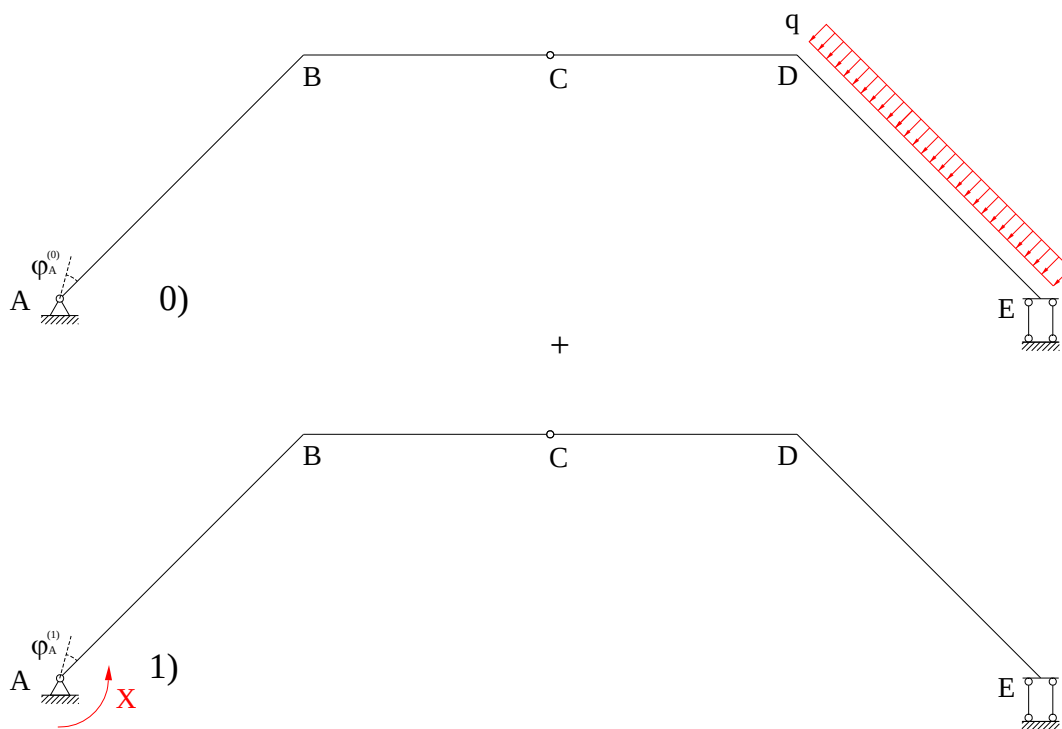


Figura 6.2. Scomposizione della struttura iperstatica negli schemi isostatici 0) e 1).

6.4.1 *Soluzione dello schema isostatico 0)*

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 0) si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 6.3. A tal proposito si sottolinea che la determinazione delle reazioni vincolari e delle caratteristiche della sollecitazione per le sezioni di estremità risulta più agevole utilizzando un sistema di riferimento globale i cui assi sono rivolti parallelamente alle aste AB (asse X) e ED (asse Y), rispettivamente. I

valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$X_A^{(0)} = X_E^{(0)} = Y_E^{(0)} = \frac{Q}{4} = 8838.83\text{N}; \quad Y_A^{(0)} = \frac{3}{4}Q = 26516.5\text{N}; \quad M_E^{(0)} = qL^2 = 6250\text{kNcm}; \quad (6.8)$$

con $Q = qL\sqrt{2} = 35355.34\text{N}$.

$$N_{AB}^{(0)}(x_3) = -\frac{3}{4}Q; \quad N_{BC}^{(0)}(x_3) = N_{CD}^{(0)}(x_3) = -qL; \quad N_{ED}^{(0)}(x_3) = -\frac{Q}{4}; \quad (6.9)$$

$$T_{AB}^{(0)}(x_3) = -\frac{Q}{4}; \quad T_{BC}^{(0)}(x_3) = T_{CD}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{2}; \quad T_{ED}^{(0)}(x_3) = -\frac{Q}{4} + q x_3; \quad (6.10)$$

$$M_{AB}^{(0)}(x_3) = -\frac{Q}{4}x_3; \quad M_{BCD}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{2}(x_3 - L); \quad M_{ED}^{(0)}(x_3) = qL^2 + \frac{Q}{4}x_3 - \frac{q x_3^2}{2} \quad (6.11)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 6.3-a.

6.4.2 Soluzione dello schema isostatico 1)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 1), in cui l'incognita iperstatica assume valore unitario ($X=1$), si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 2.4, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$V_A^{(1)} = V_E^{(1)} = \frac{X}{2L}; \quad M_E^{(1)} = X; \quad H_A^{(1)} = H_E^{(1)} = 0; \quad (6.12)$$

$$N_{AB}^{(1)}(x_3) = -\frac{R}{2L}; \quad N_{BC}^{(1)}(x_3) = N_{CD}^{(1)}(x_3) = 0; \quad N_{ED}^{(1)}(x_3) = \frac{R}{2L}; \quad R = \frac{X\sqrt{2}}{2}; \quad (6.13)$$

$$T_{AB}^{(1)}(x_3) = \frac{R}{2L}; \quad T_{BC}^{(1)}(x_3) = T_{CD}^{(1)}(x_3) = \frac{X}{2L}; \quad T_{ED}^{(1)}(x_3) = \frac{R}{2L}; \quad (6.14)$$

$$M_{AB}^{(1)}(x_3) = X \left(\frac{\sqrt{2} x_3}{4L} - 1 \right); \quad M_{BCD}^{(1)}(x_3) = \frac{X}{2} \left(\frac{x_3}{L} - 1 \right); \quad M_{ED}^{(1)}(x_3) = X \left(1 - \frac{\sqrt{2} x_3}{4L} \right); \quad (6.15)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 6.4-a.

6.4.3 Determinazione dell'incognita iperstatica

Come detto in precedenza l'incognita iperstatica va determinata imponendo l'equazione di congruenza (6.7). Per compiere questo passo è necessario procedere al calcolo delle rotazioni $\varphi_A^{(0)}$ e $\varphi_A^{(1)}$. A tale scopo si utilizzerà il metodo della forza unitaria.

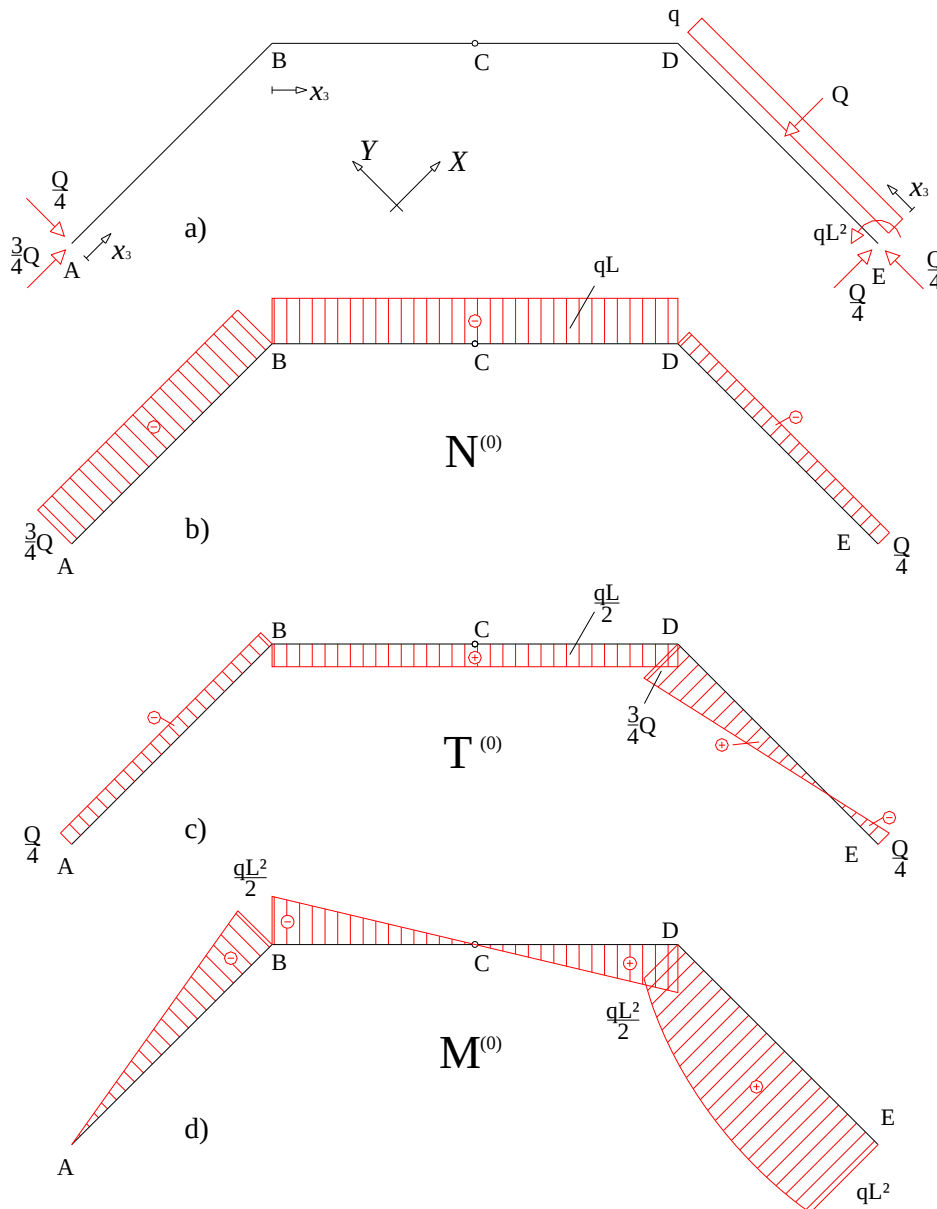


Figura 6.3. Schema isostatico 0); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

6.4.3.1 Calcolo di $\varphi_A^{(0)}$

La determinazione di $\varphi_A^{(0)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 0) come sistema congruente reale ed il sistema 1) come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 0) vale:

$$L_e = 1 \cdot \varphi_A^{(0)} \quad (6.16)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 0), sostituendo le espressioni ricavate in (6.11) e in (6.15), può scriversi come:

$$\begin{aligned}
 L_i &= \int_0^{L\sqrt{2}} M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{2L} M_{BCD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BCD}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \\
 &+ \int_0^{L\sqrt{2}} M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 = \frac{4 + 21\sqrt{2}}{24} \frac{qL^3}{EI_{x_1}}
 \end{aligned} \quad (6.17)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$\varphi_A^{(0)} = \frac{4 + 21\sqrt{2}}{24} \frac{qL^3}{EI_{x_1}} = 3.83864 \cdot 10^{-2} \text{ rad} \quad (6.18)$$

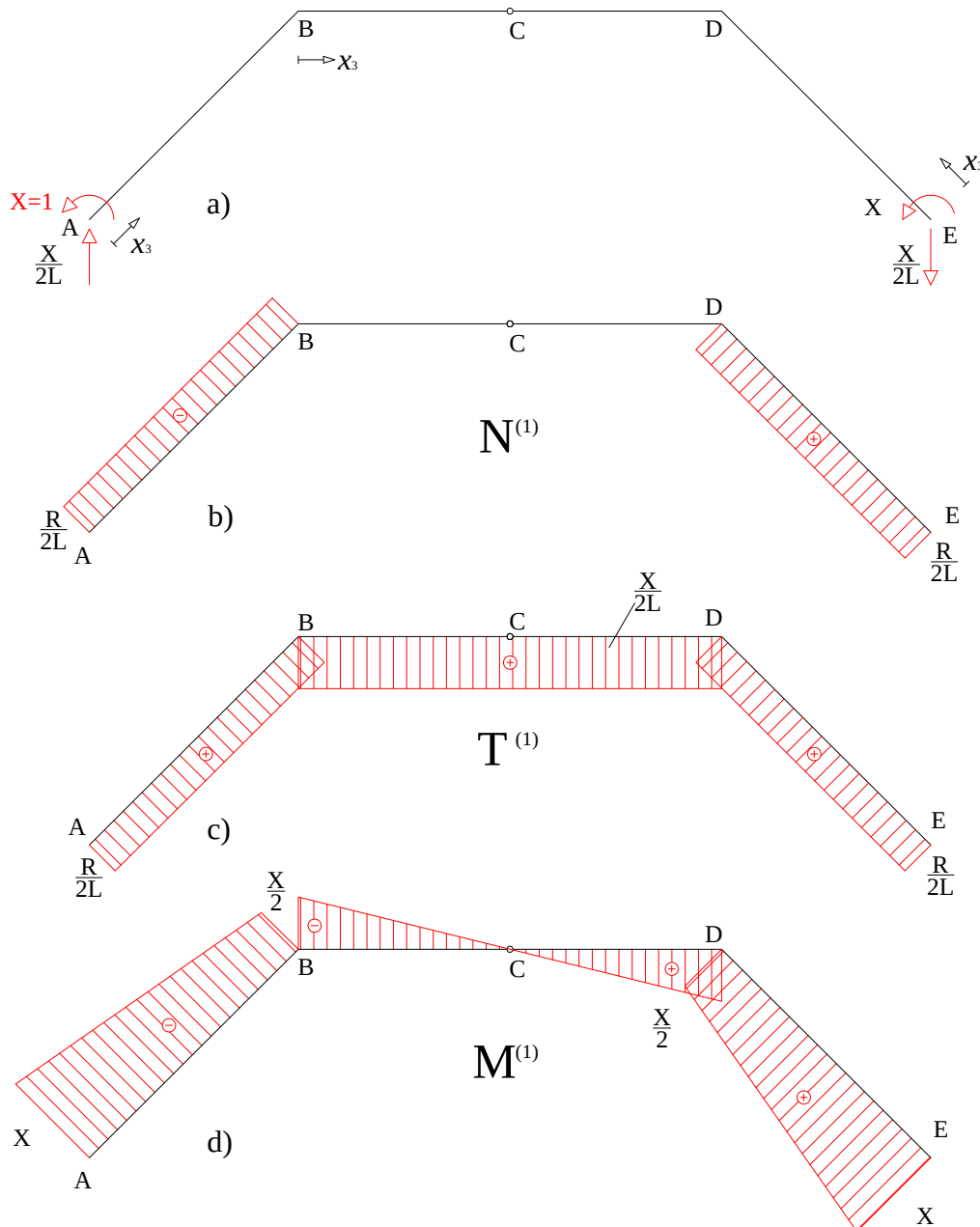


Figura 6.4. Schema isostatico 1); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

6.4.3.2 Calcolo di $\varphi_A^{(1)}$

La determinazione di $\varphi_A^{(1)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 1) sia come sistema congruente reale che come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 1) vale:

$$L_e = 1 \cdot \varphi_A^{(1)} \quad (6.19)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 1) vale, sostituendo le espressioni ricavate in (6.15):

$$\begin{aligned} L_i &= \int_0^{L\sqrt{2}} M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{2L} M_{BCD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BCD}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \\ &+ \int_0^{L\sqrt{2}} M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 = \frac{1+7\sqrt{2}}{6} \frac{L}{EI_{x_1}} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$\varphi_A^{(1)} = \frac{1+7\sqrt{2}}{6} \frac{L}{EI_{x_1}} = 7.94608 \cdot 10^{-9} \text{ rad/Ncm} \quad (6.21)$$

6.4.3.3 Calcolo della incognita iperstatica

La determinazione del valore della incognita iperstatica X può essere condotta sostituendo i valori delle rotazioni appena determinati nell'equazione di congruenza (6.7):

$$\varphi_A^{(0)} + \varphi_A^{(1)} X = \phi_0 \rightarrow X = \frac{\phi_0 - \varphi_A^{(0)}}{\varphi_A^{(1)}} = -\frac{290 + 7\sqrt{2}}{388} qL^2 + \frac{6EI_{x_1}\phi_0}{L + 7\sqrt{2}L} = -3572.37 \text{ kNcm} \quad (6.22)$$

Il verso effettivo dell'incognita iperstatica è, quindi, opposto a quello ipotizzato.

6.5 Determinazione dei diagrammi della sollecitazione

Applicando l'equazione (6.6), come descritto in precedenza, è possibile ricavare i valori delle reazioni vincolari e l'andamento delle caratteristiche della sollecitazione del sistema iperstatico assegnato, trovando:

$$\begin{aligned} X_A &= \frac{3Q}{4} + \frac{R}{2L} = 21464.4 \text{ N}; & Y_A &= X_E = Y_E = \frac{Q}{4} - \frac{R}{2L} = 13892 \text{ N}; \\ M_A &= X = 3572.37 \text{ kNcm}; & M_E &= qL^2 + X = 2677.63 \text{ kNcm} \end{aligned} \quad (6.23)$$

$$N_{AB}(x_3) = -\frac{3Q}{4} - \frac{R}{2L} = -21464.4\text{N}; \quad N_{BC}(x_3) = N_{CD}(x_3) = -qL = 25000\text{N};$$

$$N_{ED}(x_3) = -\frac{Q}{4} + \frac{R}{2L} = -13892\text{N};$$

$$T_{AB}(x_3) = -\frac{Q}{4} + \frac{R}{2L} = -13982\text{N}; \quad T_{BC}(x_3) = T_{CD}(x_3) = \frac{qL}{2} + \frac{X}{2L} = 5354\text{N};$$

$$T_{ED}(x_3) = -\frac{Q}{4} + \frac{R}{2L} - qx_3 = -13982 + 100x_3\text{ N};$$

$$M_{AB}(x_3) = -\frac{Q}{4}x_3 + X\left(\frac{\sqrt{2}x_3}{4L} - 1\right) = 3572.37 - 13.892x_3\text{ kNcm}$$

$$M_{BC}(x_3) = M_{CD}(x_3) = -\frac{qL}{2}(x_3 - L) + \frac{X}{2}\left(\frac{x_3}{L} - 1\right) = -1338.81 + 5334x_3\text{ kNcm};$$

$$M_{ED}(x_3) = qL^2 + \frac{Q}{4}x_3 - \frac{qx_3^2}{2} + X\left(1 - \frac{\sqrt{2}x_3}{4L}\right) = 2677.63 + 13.982x_3 - 50x_3^2\text{ kNcm}$$

I corrispondenti diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione sono riportati nella Figura 6.5.

6.6 Verifica della sezione più sollecitata

Dall'esame dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione riportati nella Figura 2.8 si deduce che la sezione più sollecitata è quella denotata con la lettera **A**, che è soggetta alle seguenti caratteristiche della sollecitazione:

$$N_A = -21464\text{N}; \quad T_A = -13892\text{N}; \quad M_A = 3572.67\text{kNcm}. \quad (6.27)$$

La distribuzione delle tensioni normali e tangenziali dovute alle caratteristiche della sollecitazione riportate nella (2.46) si calcolano, rispettivamente, applicando la formula di Navier per le tensioni normali e la teoria approssimata del taglio secondo Jourawski per le tensioni tangenziali.

Per quanto riguarda le tensioni normali, l'andamento è quello indicato dalla relazione:

$$t_{33} = \frac{N_A}{A} + \frac{M_A}{I_{x_1}}x_2 = \frac{-21464}{39} + \frac{3572370}{2721.59}x_2 = -550.369 + 1312.61x_2\text{ N/cm}^2 \quad (6.28)$$

I valori estremi delle tensioni si verificano in corrispondenza delle fibre inferiori ed superiori ottenendo:

$$t_{33,i} = t_{33}|_{x_2=y_G} = 9378.31\text{ N/cm}^2 \quad t_{33,s} = t_{33}|_{x_2=h-y_G} = -16873.80\text{ N/cm}^2 \quad (6.29)$$

Il diagramma delle tensioni normali t_{33} è riportato nella Figura 6.6.

Per quanto attiene alle tensioni tangenziali, la loro determinazione può essere condotta applicando la nota formula di Jourawski alle corde illustrate nella Figura 6.6:

$$t_{31,s} = -\frac{T_A S_{x_1}^{\Omega'}}{I_{x_1} t} = -11.9359y \text{ N/cm}^2 \text{ con } S_{x_1}^{\Omega'} = -ty \left(h - y_G - \frac{t}{2} \right); \quad (6.30)$$

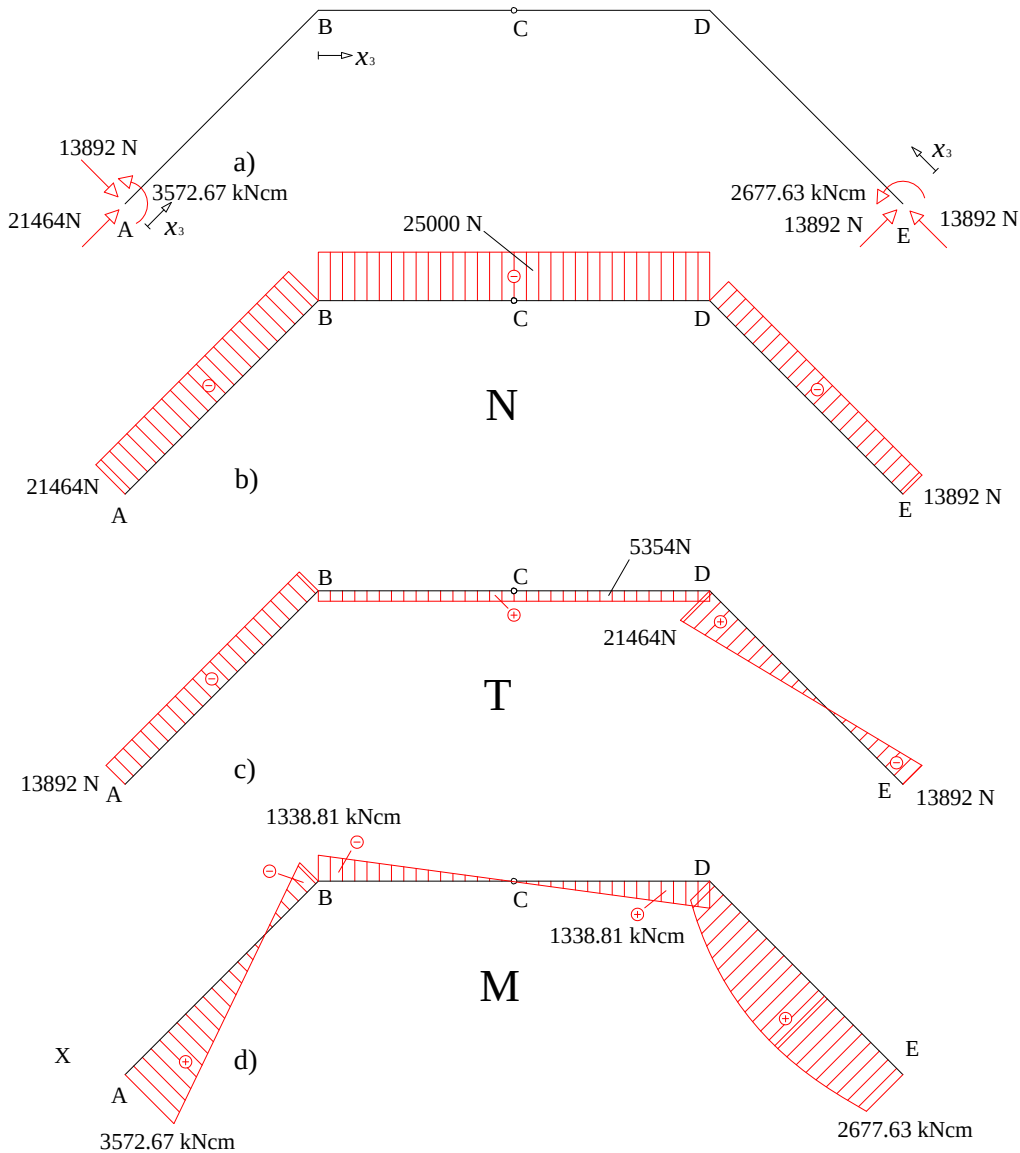


Figura 6.5. Schema iperstatico; a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

il valore massimo della tensione $t_{31,s}$ si ha in corrispondenza dell'attacco dell'ala all'anima:

$$t_{31,s,max} = t_{31}|_{y=\frac{b_1}{2}} = -304.6 \text{ N/cm}^2 \quad (6.31)$$

Per l'ala inferiore si ha, analogamente,

$$t_{31,i} = -\frac{T_A S_{x_1}^{\Omega''}}{I_{x_1} t} = 36.06w \text{ N/cm}^2 \text{ con } S_{x_1}^{\Omega''} = -tw \left(y_G - \frac{t}{2} \right); \quad (6.32)$$

il valore massimo della tensione $t_{31,i}$ si ha in corrispondenza dell'attacco dell'ala all'anima:

$$t_{31,i,max} = t_{31}|_{w=\frac{b_2}{2}} = 360.6 \text{ N/cm}^2 \quad (6.33)$$

L'andamento delle tensioni tangenziali t_{32} , invece, è dato dalla:

$$t_{32} = -\frac{T_E S_{x_1}^{\Omega'''}{I_{x_1}}}{s} = -1442.2 - 33.503z + 2.552z^2 \text{ N/cm}^2 \text{ con } S_{x_1}^{\Omega'''} = b_2 t \left(y_G - \frac{t}{2} \right) + sz \left(y_G - t - \frac{z}{2} \right); \quad (6.34)$$

il valore massimo della tensione t_{32} si ha in corrispondenza della fibra baricentrica in cui vale:

$$t_{32,max} = t_{32}|_{z=y_G-t} = 1552.2 \text{ N/cm}^2 \quad (6.35)$$

Il diagramma delle tensioni tangenziali t_{31} e t_{32} è riportato nella Figura 6.6.

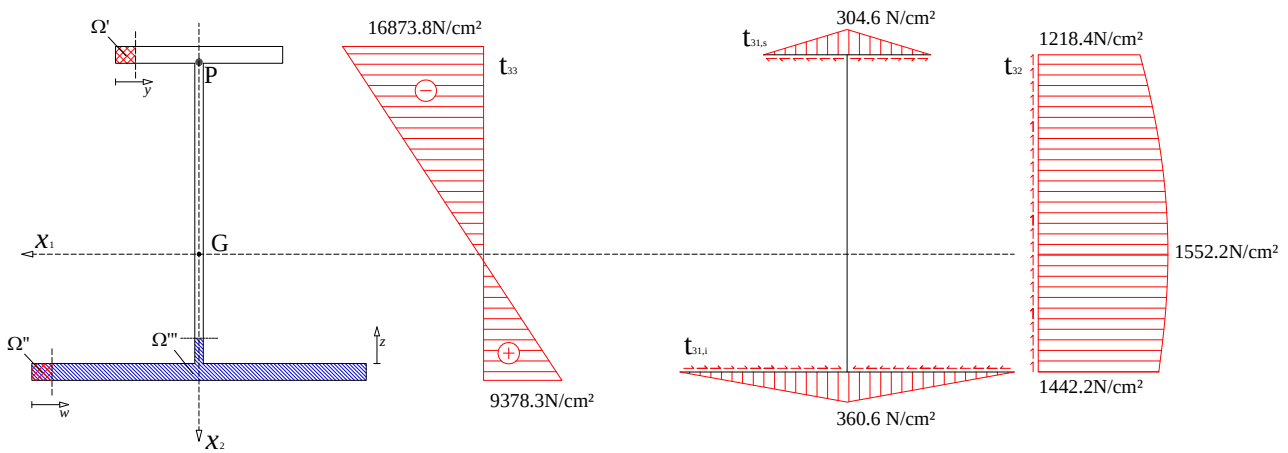


Figura 6.6. Tensioni normali e tangenziali sulla sezione trasversale.

Data l'entità delle tensioni appena determinate, la verifica di sicurezza può essere condotta, secondo il criterio di resistenza di Von Mises, in corrispondenza del punto **P** assumendo che lì agiscano le tensioni $t_{33,s}$, $t_{31,s,max}$ e $t_{32}|_{z=h-2t} = 1218.4 \text{ N/cm}^2$

$$\sigma_{id} = \sqrt{t_{33,s}^2 + 3(t_{31,s,max}^2 + t_{32}|_{z=h-2t}^2)} = 17013.4 \text{ N/cm}^2 > \sigma_{amm} = 16000 \text{ N/cm}^2 \quad (6.36)$$

La verifica, pertanto, NON risulta essere soddisfatta.

7 Soluzione del compito del 19 settembre 2011

- Tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della struttura riportata in figura
- Verificare la sezione più sollecitata.

Dati:

$E = 2.1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$	$\sigma_{amm} = 1.6 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$	$h = 15 \text{ cm}$	$b = 10 \text{ cm}$	$t = 1 \text{ cm}$
$L = 300 \text{ cm}$	$q = 150 \text{ N/cm}$	$\eta_0 = 1 \text{ cm}$	$s = 0.5 \text{ cm}$	

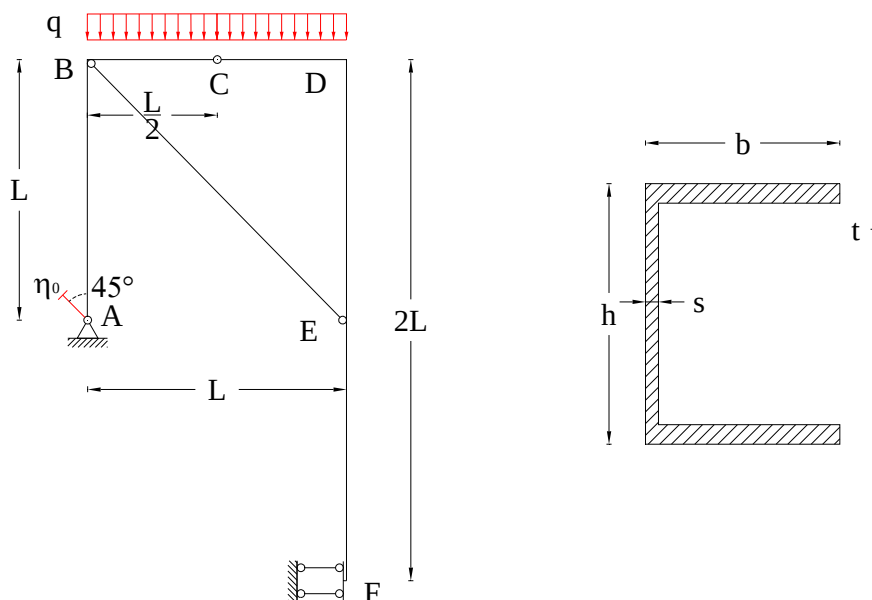


Figura 7.1. Sistema da analizzare; schema d'assi e sezione trasversale.

7.1 Riconoscimento dei gradi di iperstaticità

Per riconoscere il grado di iperstaticità del sistema si può rilevare che il sistema privo di vincoli è composto da tre aste ABC e CDEF e BE e quindi possiede nel piano nove gradi di libertà. I gradi di libertà sottratti dai vincoli esterni sono quattro (due per il vincolo in A e due per il vincolo in F), mentre i vincoli interni sottraggono sei gradi di libertà (due ciascuno per le cerniere interne in B, C ed E), per un totale di dieci molteplicità vincolari sottratte, quindi il sistema è una volta iperstatico.

$$q = 3n - v = 9 - (2 + 2) - (2 + 2 + 2) = -1 \quad (7.1)$$

7.2 Calcolo delle caratteristiche inerziali della sezione trasversale

La sezione trasversale è a C e possiede un asse di simmetria orizzontale, quindi il baricentro G si troverà su di esso e l'altezza del baricentro sarà pari ad $h/2$. La determinazione della posizione orizzontale del baricentro è ininfluente per la soluzione del problema proposto, nell'ipotesi di trascurare le tensioni tangenziali prodotte dalla torsione indotta dal taglio agente in maniera eccentrica rispetto al centro di taglio.

Per completare la caratterizzazione delle proprietà geometriche della sezione, dapprima si determina l'area:

$$A = bh - (b-s)(h-2t) = 150 - 123.5 = 26.5 \text{ cm}^2 \quad (7.2)$$

Il momento di inerzia rispetto l'asse forte (l'asse orizzontale baricentrico x_1) si calcola direttamente come:

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-s)(h-2t)^3}{12} = 1073.21 \text{ cm}^4 \quad (7.3)$$

7.3 Metodo di analisi (metodo delle forze): posizione del problema

Secondo quanto prescritto dal metodo delle forze, il sistema assegnato è equivalente alla sovrapposizione di schemi isostatici ottenuti mediante la soppressione di un numero di vincoli a molteplicità semplice pari al grado di iperstaticità, quindi, nel caso in esame, sopprimendo una molteplicità vincolare. Vi saranno, ovviamente, diverse possibilità di scelta per pervenire agli schemi isostatici e nel seguito ne viene esaminata una.

Una volta determinata l'incognita iperstatica X come mostrato nel seguito, i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione agenti sul sistema assegnato possono essere ricavate mediante il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{cases} N(x_3) = N^{(0)}(x_3) + N^{(1)}(x_3) X \\ T(x_3) = T^{(0)}(x_3) + T^{(1)}(x_3) X \\ M(x_3) = M^{(0)}(x_3) + M^{(1)}(x_3) X \end{cases} \quad (7.4)$$

7.4 Soluzione dello schema iperstatico

Si sceglie di rendere isostatico il sistema mediante la soppressione della molteplicità vincolare legata alla traslazione del punto **A** nella direzione a 45° , parallelamente allo spostamento imposto η_0 . I sistemi isostatici sono quelli indicati in Figura 2.2, in cui l'incognita iperstatica X deve essere

valutata in maniera tale che lo spostamento del punto **A** nella direzione a 45° r_A , deve essere pari allo spostamento imposto η_0 , ovvero deve essere verificata la seguente equazione di congruenza:

$$r_A = r_A^{(0)} + r_A^{(1)}X = \eta_0 \quad (7.5)$$

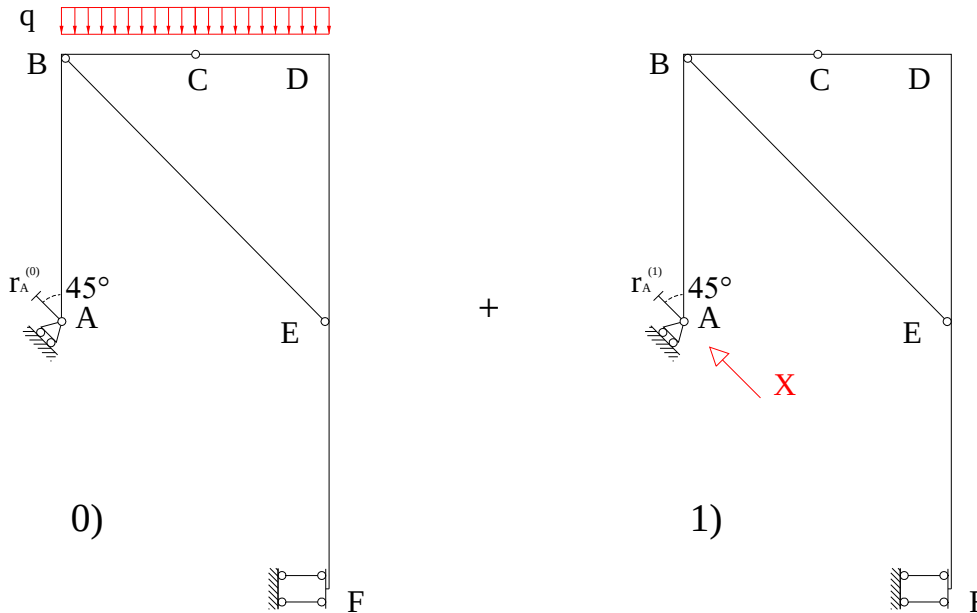


Figura 7.2. Scomposizione della struttura iperstatica negli schemi isostatici 0) e 1).

7.4.1 Soluzione dello schema isostatico 0)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 0) si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 7.3. I valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$H_A^{(0)} = V_A^{(0)} = H_F^{(0)} = qL = 45000\text{N}; \quad R_B^{(0)} = R_E^{(0)} = \frac{5}{4}Q = 79550\text{N}; \quad M_F^{(0)} = \frac{3}{2}qL^2 = 20250\text{kNcm}; \quad (7.6)$$

con $Q = qL\sqrt{2} = 63640\text{N}$.

$$N_{AB}^{(0)}(x_3) = -qL; \quad N_{BCD}^{(0)}(x_3) = \frac{qL}{4}; \quad N_{DE}^{(0)}(x_3) = \frac{5}{4}qL; \quad N_{BE}^{(0)}(x_3) = \frac{5}{4}Q; \quad (7.7)$$

$$T_{AB}^{(0)}(x_3) = -qL; \quad T_{BCD}^{(0)}(x_3) = \frac{9}{4}qL - qx_3; \quad T_{DE}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{4}; \quad T_{EF}^{(0)}(x_3) = qL; \quad (7.8)$$

$$M_{AB}^{(0)}(x_3) = -qLx_3; \quad M_{BCD}^{(0)}(x_3) = -qL^2 + \frac{9}{4}qLx_3 - \frac{qx_3^2}{2}; \quad M_{DE}^{(0)}(x_3) = \frac{3}{4}qL^2 - \frac{qL}{4}x_3; \quad (7.9)$$

$$M_{EF}^{(0)}(x_3) = \frac{qL^2}{2} + qLx_3;$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 7.3-a.

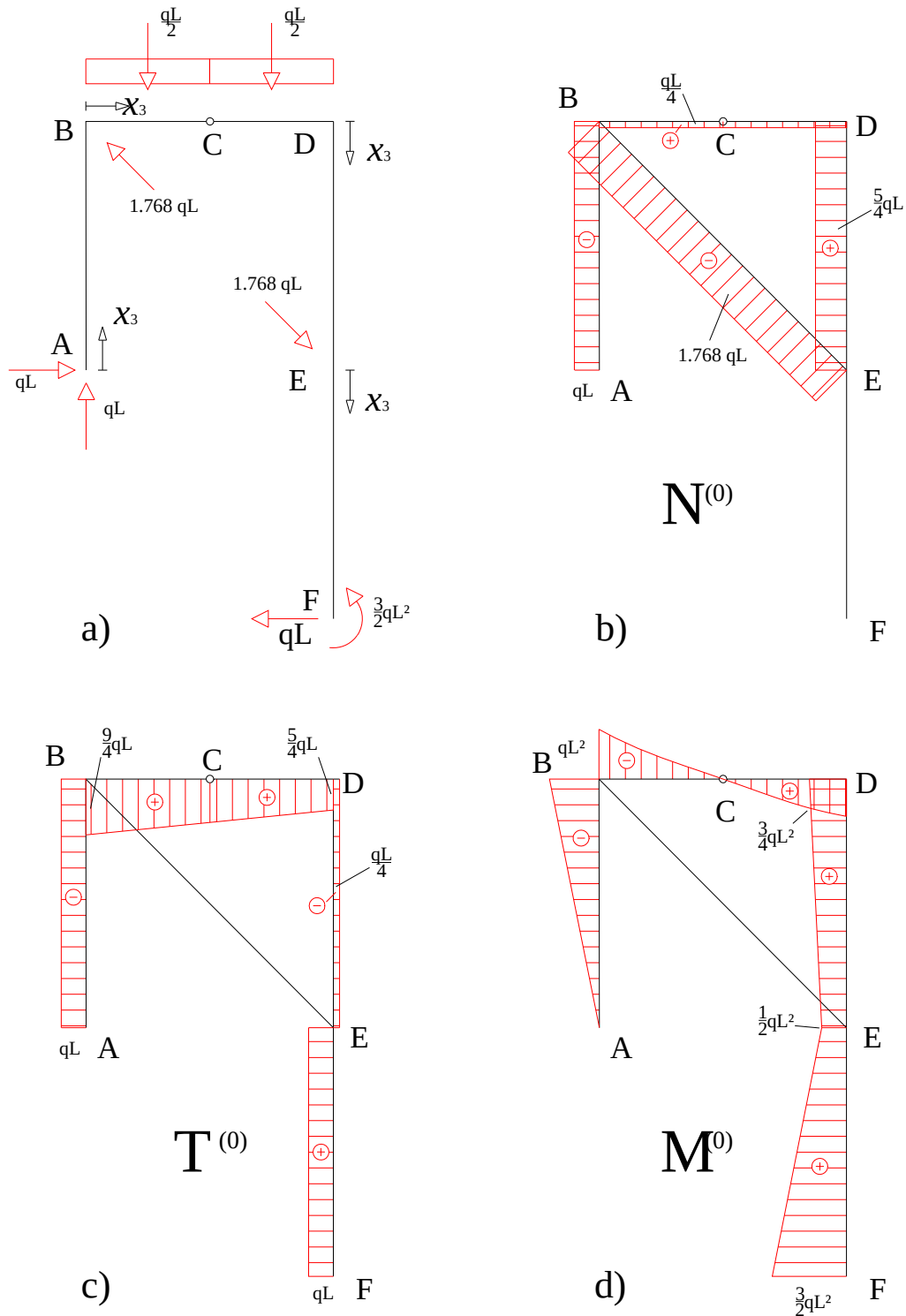


Figura 7.3. Schema isostatico 0); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

7.4.2 Soluzione dello schema isostatico 1)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 1), in cui l'incognita iperstatica assume valore unitario ($X=1$), si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche

della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 7.4, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

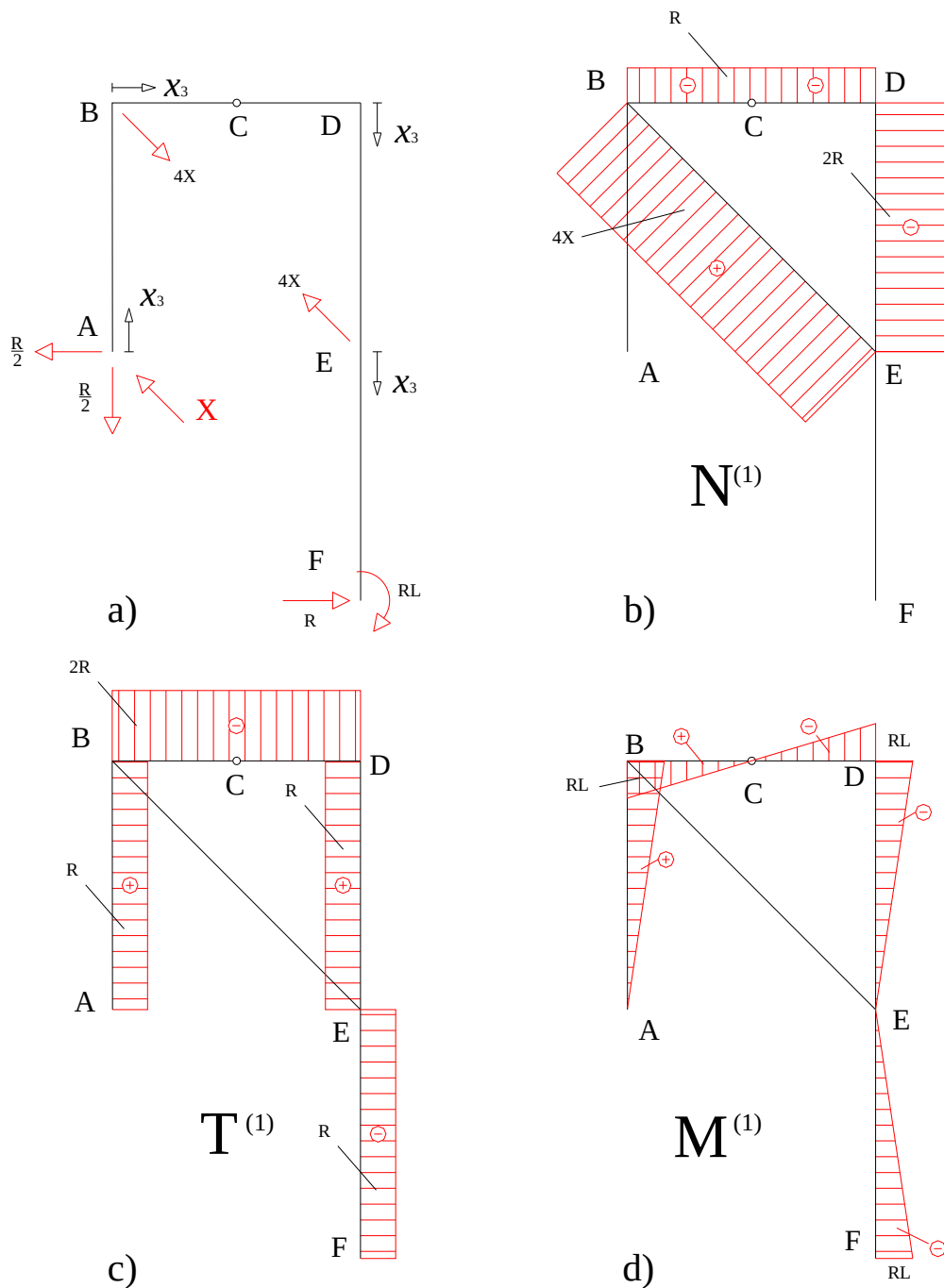


Figura 7.4. Schema isostatico 1); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

$$H_A^{(1)} = V_A^{(1)} = \frac{R}{2}; \quad H_F^{(1)} = R; \quad M_F^{(1)} = RL; \quad R = X\sqrt{2}; \quad (7.10)$$

$$N_{AB}^{(1)}(x_3) = N_{EF}^{(1)}(x_3) = 0; \quad N_{BCD}^{(1)}(x_3) = -R; \quad N_{DE}^{(1)}(x_3) = -2R; \quad N_{BE}^{(1)}(x_3) = 4X; \quad (7.11)$$

$$T_{AB}^{(1)}(x_3) = T_{DE}^{(1)}(x_3) = R; \quad T_{BCD}^{(1)}(x_3) = -2R; \quad T_{EF}^{(1)}(x_3) = -R; \quad (7.12)$$

$$M_{AB}^{(1)}(x_3) = R x_3; \quad M_{BCD}^{(1)}(x_3) = R(L - 2x_3); \quad M_{DE}^{(1)}(x_3) = R(x_3 - L); \quad M_{EF}^{(1)}(x_3) = -R x_3; \quad (7.13)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 7.4-a.

7.4.3 Determinazione dell'incognita iperstatica

Come detto in precedenza l'incognita iperstatica va determinata imponendo l'equazione di congruenza (7.5). Per compiere questo passo è necessario procedere al calcolo degli spostamenti $r_A^{(0)}$ e $r_A^{(1)}$. A tale scopo si utilizzerà il metodo della forza unitaria.

7.4.3.1 Calcolo di $r_A^{(0)}$

La determinazione di $r_A^{(0)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 0) come sistema congruente reale ed il sistema 1) come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 0) vale:

$$L_e = 1 \cdot r_A^{(0)} \quad (7.14)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 0), sostituendo le espressioni ricavate in (7.9) e in (7.13), può scriversi come:

$$\begin{aligned} L_i = & \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BCD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BCD}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \\ & + \int_0^L M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{EF}^{(1)}(x_3) \frac{M_{EF}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 = -\frac{37\sqrt{2}}{24} \frac{qL^4}{EI_{x_1}} \end{aligned} \quad (7.15)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$r_A^{(0)} = -\frac{37\sqrt{2}}{24} \frac{qL^4}{EI_{x_1}} = -117.538 \text{ cm} \quad (7.16)$$

7.4.3.2 Calcolo di $r_A^{(1)}$

La determinazione di $r_A^{(1)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 1) sia come sistema congruente reale che come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno compiuto dalle forze del sistema 1) per effetto degli spostamenti del sistema 1) vale:

$$L_e = 1 \cdot r_A^{(1)} \quad (7.17)$$

Il lavoro interno compiuto dalle sollecitazioni del sistema 1) per effetto delle deformazioni del sistema 1) vale, sostituendo le espressioni ricavate in (7.13):

$$L_i = \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BCD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BCD}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{EF}^{(1)}(x_3) \frac{M_{EF}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 = \frac{8}{3} \frac{L^3}{EI_{x_1}} \quad (7.18)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$r_A^{(1)} = \frac{8}{3} \frac{L^3}{EI_{x_1}} = 3.19469 \cdot 10^{-3} \text{ cm/N} \quad (7.19)$$

7.4.3.3 Calcolo della incognita iperstatica

La determinazione del valore della incognita iperstatica X può essere condotta sostituendo i valori degli spostamenti appena determinati nell'equazione di congruenza (7.5):

$$r_A^{(0)} + r_A^{(1)} X = \eta_0 \rightarrow X = \frac{\eta_0 - r_A^{(0)}}{r_A^{(1)}} = \frac{37\sqrt{2}}{64} qL + \frac{3EI_{x_1} \eta_0}{8L^3} = 37104.7 \text{ N} \quad (7.20)$$

Il verso effettivo dell'incognita iperstatica è, quindi, concorde a quello ipotizzato.

7.5 Determinazione dei diagrammi della sollecitazione

Applicando l'equazione (7.4), come descritto in precedenza, è possibile ricavare i valori delle reazioni vincolari e l'andamento delle caratteristiche della sollecitazione del sistema iperstatico assegnato, trovando:

$$V_A = qL = 45000 \text{ N}; \quad H_A = H_F = R - qL = 7474 \text{ N} \quad (7.21)$$

$$M_F = \frac{3}{2} qL^2 - RL = 4507.82 \text{ kNm}; \quad R_B = R_E = 4X - \frac{5}{4} Q = 68869 \text{ N};$$

$$N_{AB}(x_3) = -qL = -45000 \text{ N}; \quad N_{BCD}(x_3) = \frac{qL}{4} - R = -41224 \text{ N};$$

$$N_{DE}(x_3) = \frac{5}{4} qL - 2R = -48698 \text{ N}; \quad N_{BE}(x_3) = -\frac{5}{4} \sqrt{2} qL + 4X = 68869 \text{ N}; \quad (7.22)$$

$$T_{AB}(x_3) = -qL + R = 7474 \text{ N}; \quad T_{BCD}(x_3) = \frac{9}{4} qL - 2R - q x_3 = -3698 - 150 x_3 \text{ N};$$

$$T_{DE}(x_3) = -\frac{qL}{4} + R = 41223 \text{ N}; \quad T_{EF}(x_3) = qL - R = -7474 \text{ N}; \quad (7.23)$$

$$M_{AB}(x_3) = -qL x_3 + R x_3 = 7.494 x_3 \text{ kNcm}$$

$$M_{BCD}(x_3) = -qL^2 + RL + \left(\frac{9}{4}qL - 2R\right)x_3 - \frac{q}{2}x_3^2 = 2242.18 - 3.69785 x_3 - 0.075 x_3^2 \text{ kNcm};$$

$$M_{DE}(x_3) = \frac{3}{4}qL^2 - RL + \left(R - \frac{qL}{4}\right)x_3 = -5671.18 + 41.223.9 x_3 \text{ kNcm} \quad (7.24)$$

$$M_{EF}(x_3) = \frac{qL^2}{2} + (qL - R)x_3 = 6750 - 7.474 x_3^2$$

I corrispondenti diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione sono riportati nella seguente Figura 7.5.

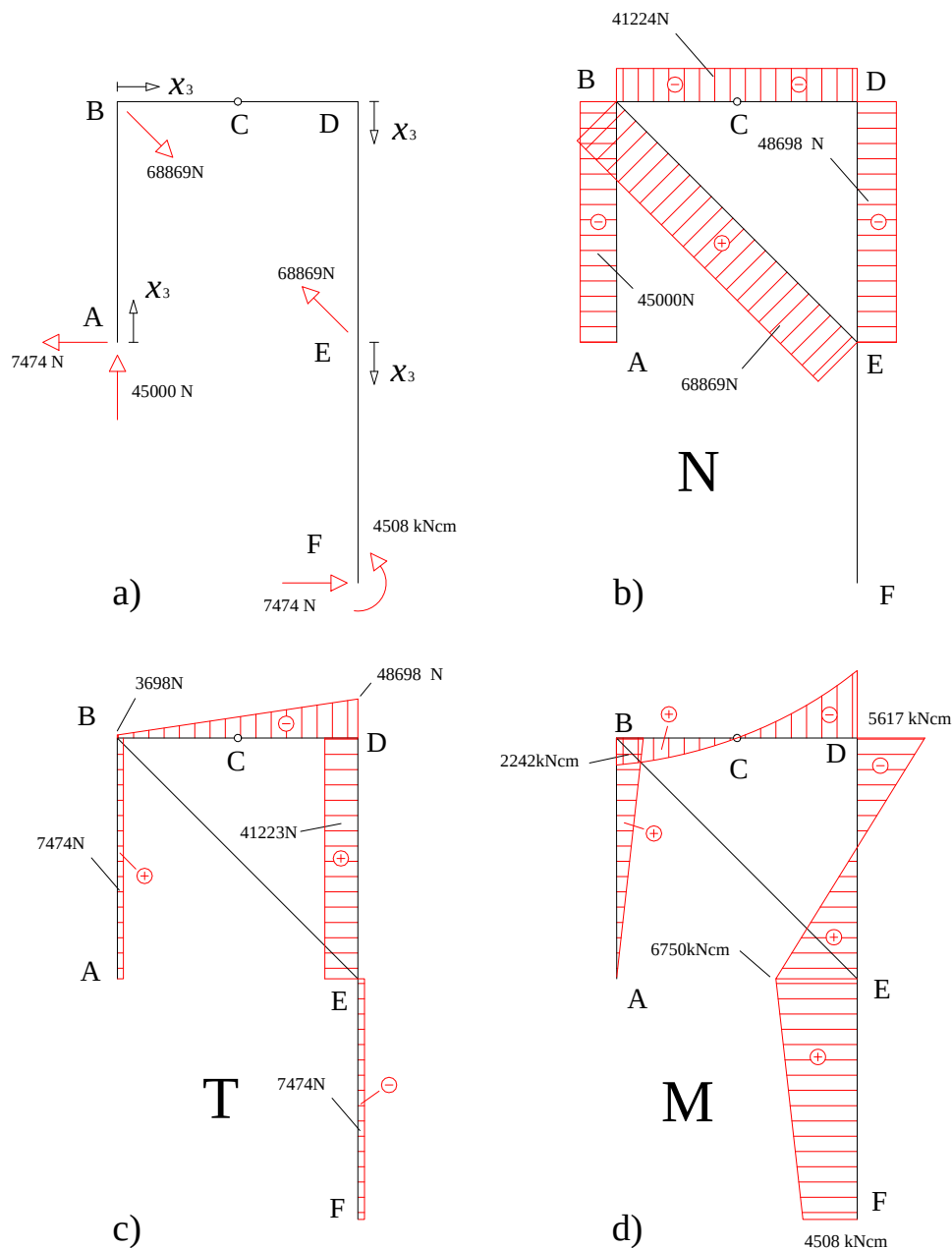


Figura 7.5. Schema iperstatico; a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

7.6 Verifica della sezione più sollecitata

Dall'esame dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione riportati nella Figura 7.5 si deduce che la sezione più sollecitata è quella denotata con la lettera **E**, appartenente all'asta **DE**, che è soggetta alle seguenti caratteristiche della sollecitazione:

$$N_E = -48698\text{N}; \quad T_E = 41223\text{N}; \quad M_E = 6750\text{kNcm}. \quad (7.25)$$

La distribuzione delle tensioni normali e tangenziali dovute alle caratteristiche della sollecitazione riportate nella (7.25) si calcolano, rispettivamente, applicando la formula di Navier per le tensioni normali e la teoria approssimata del taglio secondo Jourawski per le tensioni tangenziali.

Per quanto riguarda le tensioni normali, l'andamento è quello indicato dalla relazione:

$$t_{33} = \frac{N_E}{A} + \frac{M_E}{I_{x_1}} x_2 = \frac{-48698}{26.5} + \frac{6750000}{1073.21} x_2 = -1837.65 + 6289.55 x_2 \quad \text{N/cm}^2 \quad (7.26)$$

I valori estremi delle tensioni si verificano in corrispondenza delle fibre inferiori ed superiori ottenendo:

$$t_{33,i} = t_{33}|_{x_2 = \frac{h}{2}} = 45334 \text{ N/cm}^2 \quad t_{33,s} = t_{33}|_{x_2 = -\frac{h}{2}} = -49009 \text{ N/cm}^2 \quad (7.27)$$

Il diagramma delle tensioni normali t_{33} è riportato nella Figura 7.6.

Nonostante le sole tensioni normali siano sufficienti ad esprimere un giudizio negativo sulla verifica della sezione, si vuole ugualmente, per scopi didattici, calcolare il contributo delle tensioni tangenziali, la cui determinazione può essere condotta applicando la nota formula di Jourawski alle corde illustrate nella Figura 7.6:

$$t_{31} = -\frac{T_E S_{x_1}^{\Omega'}}{I_{x_1} t} = -268.89y \text{ N/cm}^2 \quad \text{con} \quad S_{x_1}^{\Omega'} = -ty \left(\frac{h-t}{2} \right); \quad (7.28)$$

il valore massimo della tensione t_{31} si ha in corrispondenza dell'attacco dell'ala all'anima:

$$t_{31,max} = t_{31}|_{y=b} = 2688.8 \text{ N/cm}^2 \quad (7.29)$$

Per l'ala inferiore si ha, per simmetria, un andamento delle tensioni t_{31} simile.

L'andamento delle tensioni tangenziali t_{32} , invece, è dato dalla:

$$t_{32} = -\frac{T_E S_{x_1}^{\Omega''}}{I_{x_1} s} = -5377.67 - 249.68z + 19.206z^2 \text{ N/cm}^2 \quad \text{con} \quad S_{x_1}^{\Omega''} = bt \left(\frac{h-t}{2} \right) + sz \left(\frac{h-z}{2} - t \right); \quad (7.30)$$

il valore massimo della tensione t_{32} si ha in corrispondenza della fibra baricentrica in cui vale:

$$t_{32,max} = t_{32}|_{z=\frac{h}{2}-t} = -6189.11 \text{ N/cm}^2 \quad (7.31)$$

Il diagramma delle tensioni tangenziali t_{31} e t_{32} è riportato nella Figura 7.6.

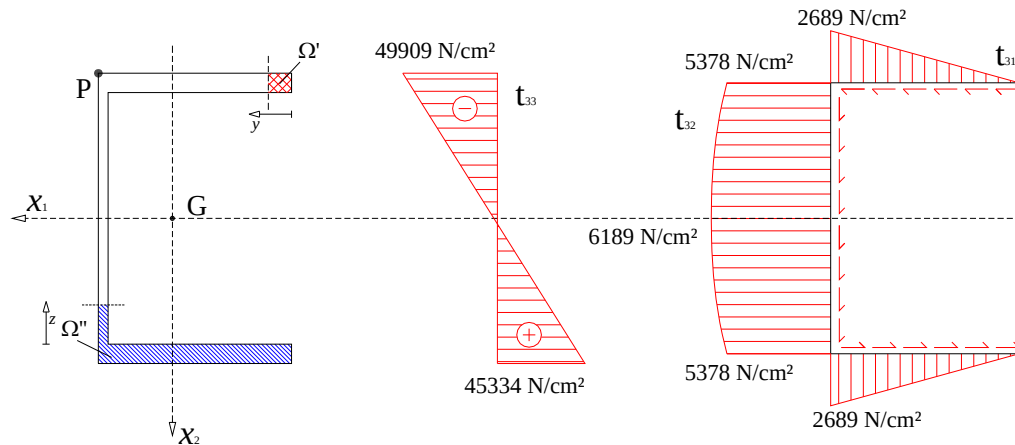


Figura 7.6. Tensioni normali e tangenziali sulla sezione trasversale.

Data l'entità delle tensioni appena determinate, la verifica di sicurezza può essere condotta, secondo il criterio di resistenza di Von Mises, in corrispondenza del punto **P** assumendo che lì agiscano le tensioni $t_{33,s}$, $t_{31,max}$ e $t_{32}|_{z=h-2t} = t_{32}|_{z=0} = 5377.66 \text{ N/cm}^2$

$$\sigma_{id} = \sqrt{t_{33,s}^2 + 3(t_{31,s,max}^2 + t_{32}|_{z=h-2t}^2)} = 50103.5 \text{ N/cm}^2 > \sigma_{amm} = 16000 \text{ N/cm}^2 \quad (7.32)$$

La verifica, pertanto, NON risulta essere soddisfatta.

8 Soluzione del compito del 06 ottobre 2011

- Tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della struttura riportata in figura
- Verificare la sezione più sollecitata.

Dati:

$E = 2.1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$	$\sigma_{amm} = 1.6 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$	$\alpha = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$b_1 = 10 \text{ cm}$	$b_2 = 20 \text{ cm}$
$L = 300 \text{ cm}$	$q = 150 \text{ N/cm}$	$\Delta T_1 = 10^\circ\text{C}$	$\Delta T_2 = 25^\circ\text{C}$	$h = 10 \text{ cm}$
				$s = 0.5 \text{ cm}$

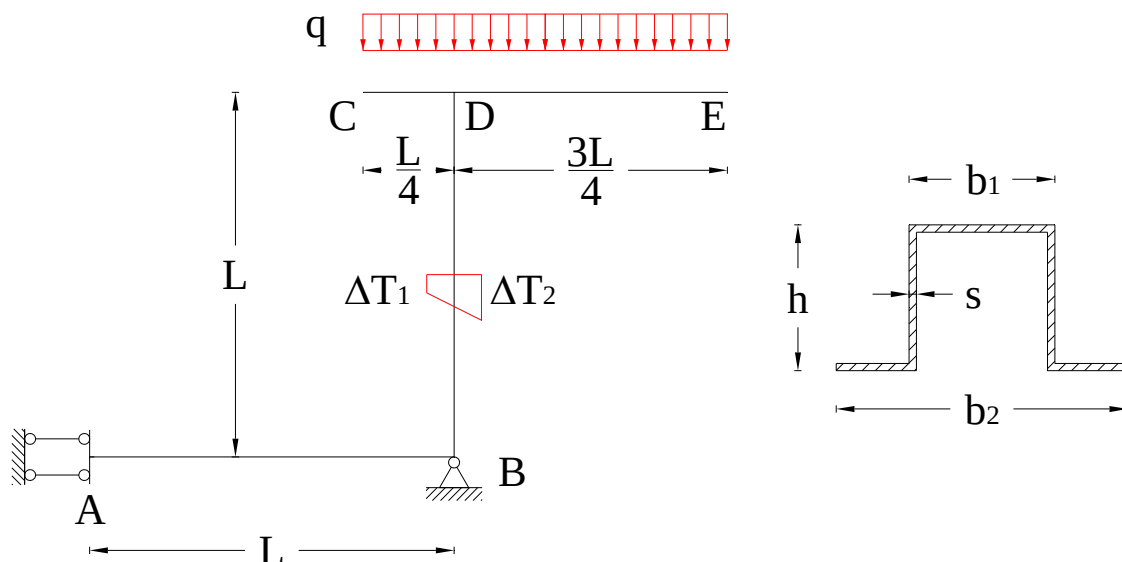


Figura 8.1. Sistema da analizzare; schema d'assi e sezione trasversale.

8.1 Riconoscimento dei gradi di iperstaticità

Per riconoscere il grado di iperstaticità del sistema si può rilevare che il sistema privo di vincoli è composto, al netto dei vincoli di continuità, da una sola asta e quindi possiede nel piano tre gradi di libertà. I gradi di libertà sottratti dai vincoli esterni sono quattro (due per il vincolo in A e due per il vincolo in B), quindi il sistema è una volta iperstatico.

$$q = 3n - v = 3 - (2 + 2) = -1 \quad (8.1)$$

8.2 Calcolo delle caratteristiche inerziali della sezione trasversale

La sezione trasversale è a Ω (Omega) e possiede un asse di simmetria verticale, quindi il baricentro G si troverà su di esso e l'altezza del baricentro sarà da determinarsi come nel seguito. Per facilitare i calcoli sarà opportuno dividere la sezione trasversale in sotto aree, come mostrato in Figura 8.3

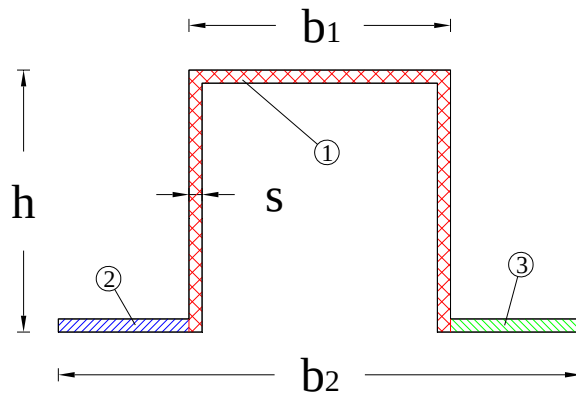


Figura 8.2. Suddivisione della sezione trasversale per il calcolo delle caratteristiche geometriche.

Adesso si determina l'area:

$$A = A_1 + 2A_2 = b_1 h - (b_1 - 2s)(h - s) + s(b_2 - b_1) = 19.5 \text{ cm}^2 \quad (8.2)$$

Il momento statico rispetto ad un asse orizzontale passante per il lembo inferiore della sezione può calcolarsi come:

$$S_{x_0} = \frac{b_1 h^2}{2} - \frac{(b_1 - 2s)(h - s)^2}{2} + \frac{s^2(b_2 - b_1)}{2} = 95.125 \text{ cm}^3 \quad (8.3)$$

La posizione verticale del baricentro può determinarsi, allora, come:

$$y_G = \frac{S_{x_0}}{A} = 4.8782 \text{ cm} \quad (8.4)$$

Il momento di inerzia rispetto l'asse orizzontale passante per il lembo inferiore della sezione si calcola come:

$$I_{x_0} = \frac{b_1 h^3}{3} - \frac{(b_1 - 2s)(h - s)^3}{3} + \frac{s^3(b_2 - b_1)}{3} = 761.625 \text{ cm}^4 \quad (8.5)$$

Infine, il momento di inerzia rispetto l'asse orizzontale baricentrico x_1 si calcola come:

$$I_{x_1} = I_{x_0} - Ay_G^2 = 297.586 \text{ cm}^4 \quad (8.6)$$

8.3 Metodo di analisi (metodo delle forze): posizione del problema

Per la descrizione del metodo delle forze si rimanda agli esercizi precedenti; per quanto riguarda il sistema assegnato, esso è equivalente alla sovrapposizione degli schemi isostatici descritti in Figura

8.3, ottenuti mediante la soppressione della molteplicità vincolare legata alla traslazione orizzontale del punto **B**. L'incognita iperstatica X deve essere valutata in maniera tale che la traslazione orizzontale del punto **B**, congruentemente a quanto accade nel sistema originario, sia nulla, ovvero deve essere verificata la seguente equazione di congruenza:

$$u_B = u_B^{(0)} + u_B^{(1)} X = 0 \quad (8.7)$$

Una volta determinata l'incognita iperstatica, i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione agenti sul sistema assegnato possono essere ricavate mediante il principio di sovrapposizione degli effetti.

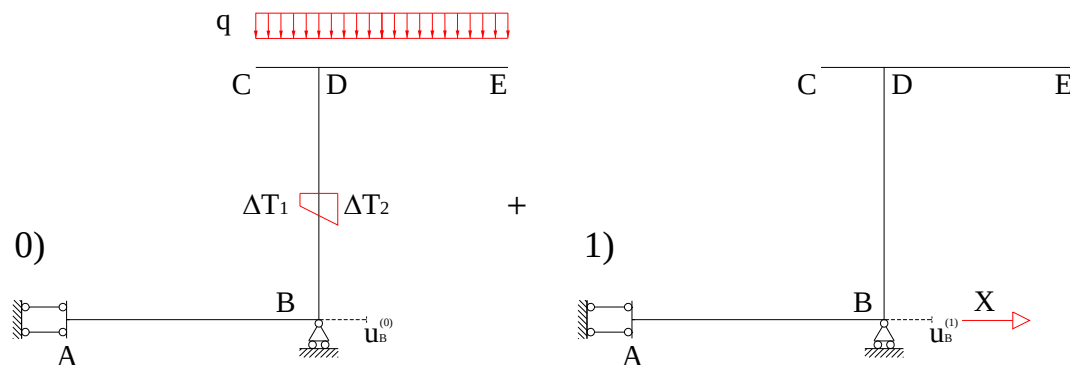


Figura 8.3. Scomposizione della struttura iperstatica negli schemi isostatici 0) e 1).

8.3.1 Soluzione dello schema isostatico 0)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 0) si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 8.4Figura 7.3. I valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$H_A^{(0)} = 0; V_B^{(0)} = qL = 45000\text{N}; M_A^{(0)} = \frac{1}{4}qL^2 = 3375\text{kNcm}; \quad (8.8)$$

$$N_{AB}^{(0)}(x_3) = N_{CDE}^{(0)}(x_3) = 0; \quad N_{BD}^{(0)}(x_3) = -qL; \quad (8.9)$$

$$T_{AB}^{(0)}(x_3) = T_{BD}^{(0)}(x_3) = 0; \quad T_{CD}^{(0)}(x_3) = -qx_3; \quad T_{DE}^{(0)}(x_3) = qL - qx_3; \quad (8.10)$$

$$M_{AB}^{(0)}(x_3) = M_{BD}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL^2}{4}; \quad M_{CD}^{(0)}(x_3) = -\frac{qx_3^2}{2}; \quad M_{DE}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL^2}{2} + qLx_3 - \frac{qx_3^2}{2}; \quad (8.11)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 8.4Figura 7.3-a.

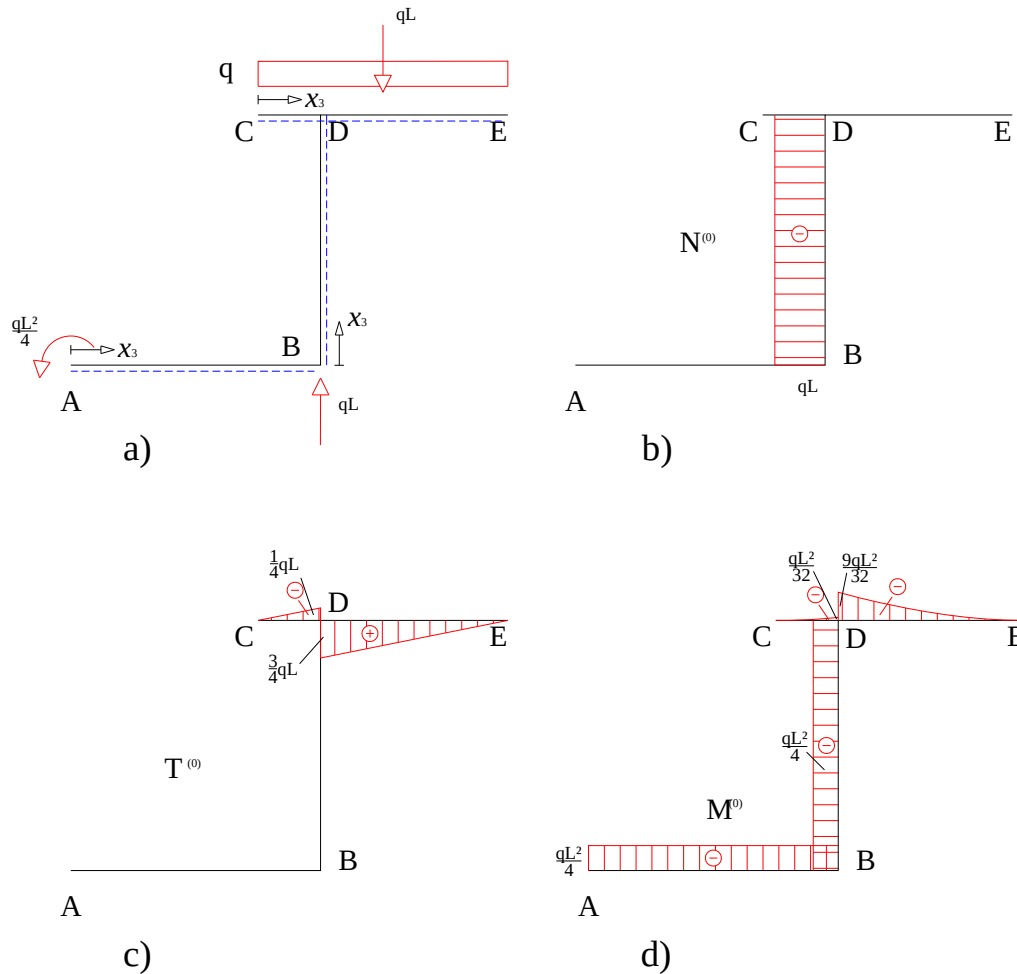


Figura 8.4. Schema isostatico 0); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

8.3.2 Soluzione dello schema isostatico 1)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 1), in cui l'incognita iperstatica assume valore unitario ($X=1$), si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 8.5, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$H_A^{(1)} = X; V_B^{(1)} = M_A^{(1)} = 0; \quad (8.12)$$

$$N_{AB}^{(1)}(x_3) = X; N_{BD}^{(1)}(x_3) = N_{CD}^{(1)}(x_3) = N_{DE}^{(1)}(x_3) = 0; \quad (8.13)$$

$$T_{AB}^{(1)}(x_3) = T_{BD}^{(1)}(x_3) = T_{CD}^{(1)}(x_3) = T_{DE}^{(1)}(x_3) = 0; \quad (8.14)$$

$$M_{AB}^{(1)}(x_3) = M_{BD}^{(1)}(x_3) = M_{CD}^{(1)}(x_3) = M_{DE}^{(1)}(x_3) = 0; \quad (8.15)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 7.4-a.

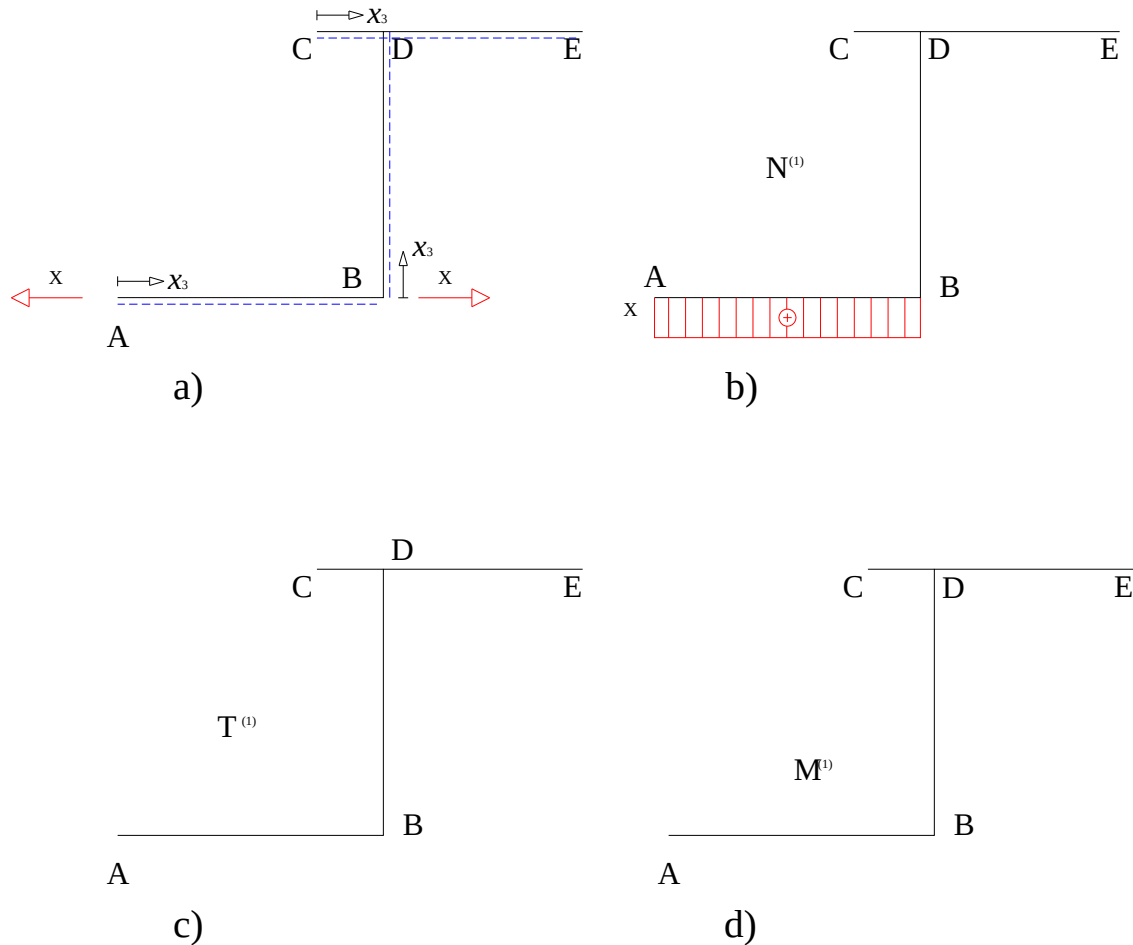


Figura 8.5. Schema isostatico 1); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

8.3.3 Determinazione dell'incognita iperstatica

Come detto in precedenza l'incognita iperstatica va determinata imponendo l'equazione di congruenza (8.7). Per compiere questo passo è necessario procedere al calcolo degli spostamenti $u_B^{(0)}$ e $u_B^{(1)}$. A tale scopo si utilizzerà il metodo della forza unitaria.

8.3.3.1 Calcolo di $r_A^{(0)}$

La determinazione di $r_A^{(0)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 0) come sistema congruente reale ed il sistema 1) come sistema equilibrato fittizio. Nel calcolo del lavoro si dovrà tenere conto sia delle componenti deformative assiali (dovute allo sforzo normale ed alle dilatazioni termiche uniformi ΔT_N), che delle componenti deformative di curvatura (dovute al momento flettente ed alle componenti "a farfalla" delle dilatazioni termiche ΔT_M):

$$\Delta T_N = \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{2} = 17.5^\circ\text{C}; \quad \Delta T_M = \frac{\Delta T_2 - \Delta T_1}{2} = 7.5^\circ\text{C}; \quad (8.16)$$

$$L_e = 1 \cdot u_B^{(0)} \quad (8.17)$$

$$\begin{aligned} L_i = & \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BD}^{(1)}(x_3) \left(\frac{M_{BD}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} + \frac{2\alpha\Delta T_M}{h} \right) dx_3 + \\ & + \int_0^{L/4} M_{CD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CD}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{3L/4} M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \\ & \int_0^L N_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{N_{AB}^{(0)}(x_3)}{EA} dx_3 + \int_0^L N_{BD}^{(1)}(x_3) \left(\frac{N_{BD}^{(0)}(x_3)}{EA} + \alpha\Delta T_N \right) dx_3 + \\ & + \int_0^{L/4} N_{CD}^{(1)}(x_3) \frac{N_{CD}^{(0)}(x_3)}{EA} dx_3 + \int_0^{3L/4} N_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{N_{DE}^{(0)}(x_3)}{EA} dx_3 = 0 \end{aligned} \quad (8.18)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$u_B^{(0)} = 0 \text{ cm} \quad (8.19)$$

8.3.3.2 Calcolo di $r_A^{(1)}$

La determinazione di $r_A^{(1)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 1) sia come sistema congruente reale che come sistema equilibrato fittizio.

$$L_e = 1 \cdot u_B^{(1)} \quad (8.20)$$

$$\begin{aligned} L_i = & \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BD}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \\ & + \int_0^{L/4} M_{CD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{CD}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{3L/4} M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \\ & \int_0^L N_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{N_{AB}^{(1)}(x_3)}{EA} dx_3 + \int_0^L N_{BD}^{(1)}(x_3) \frac{N_{BD}^{(1)}(x_3)}{EA} dx_3 + \\ & + \int_0^{L/4} N_{CD}^{(1)}(x_3) \frac{N_{CD}^{(1)}(x_3)}{EA} dx_3 + \int_0^{3L/4} N_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{N_{DE}^{(1)}(x_3)}{EA} dx_3 = \frac{L}{EA} \end{aligned} \quad (8.21)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$u_B^{(1)} = \frac{L}{EA} = 7.326 \cdot 10^{-7} \text{ cm/N} \quad (8.22)$$

8.3.3.3 Calcolo della incognita iperstatica

La determinazione del valore della incognita iperstatica X può essere condotta sostituendo i valori degli spostamenti appena determinati nell'equazione di congruenza:

$$u_B^{(0)} + u_B^{(1)} X = 0 \rightarrow X = -\frac{u_B^{(0)}}{u_B^{(1)}} = 0 \text{ N} \quad (8.23)$$

8.4 Determinazione dei diagrammi della sollecitazione

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti si ricava che i valori delle reazioni vincolari e l'andamento delle caratteristiche della sollecitazione del sistema iperstatico assegnato coincideranno con quelle già determinate per lo schema isostatico 0)

8.5 Verifica della sezione più sollecitata

Dall'esame dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione si deduce che la sezione più sollecitata è quella denotata con la lettera **D**, appartenente all'asta **DE**, che è soggetta alle seguenti caratteristiche della sollecitazione:

$$N_D = 0N; \quad T_D = \frac{3}{4}qL = 33750N; \quad M_D = -\frac{9}{32}qL^2 = 3797kNcm. \quad (8.24)$$

La distribuzione delle tensioni normali e tangenziali dovute a tali caratteristiche della sollecitazione si calcolano applicando la formula di Navier per le tensioni normali e la teoria approssimata del taglio secondo Jourawski per le tensioni tangenziali.

Per quanto riguarda le tensioni normali, l'andamento è quello indicato dalla relazione:

$$t_{33} = \frac{N_D}{A} + \frac{M_D}{I_{x_1}} x_2 = 0 - \frac{3797000}{297.586} x_2 = -12758.9 x_2 \quad N/cm^2 \quad (8.25)$$

I valori estremi delle tensioni si verificano in corrispondenza delle fibre inferiori ed superiori ottenendo:

$$t_{33,i} = t_{33}|_{x_2=y_G} = -62240.7 \quad N/cm^2 \quad t_{33,s} = t_{33}|_{x_2=y_G-h} = 65348.6 \quad N/cm^2 \quad (8.26)$$

Il diagramma delle tensioni normali t_{33} è riportato nella Figura 7.6.

Le sole tensioni normali sono sufficienti ad esprimere un giudizio negativo sulla verifica della sezione, si vuole ugualmente, per scopi didattici, calcolare il contributo delle tensioni tangenziali, la cui determinazione può essere condotta applicando la nota formula di Jourawski alle corde illustrate nella Figura 7.6:

$$t_{31} = -\frac{T_D S_{x_1}^{\Omega'}}{I_{x_1} 2s} = 552.52y \quad N/cm^2 \quad \text{con} \quad S_{x_1}^{\Omega'} = -2sy \left(h - y_G - \frac{s}{2} \right); \quad (8.27)$$

il valore massimo della tensione t_{31} si ha per $y=b_1/2$:

$$t_{31,max} = t_{31}|_{y=b_1/2} = 2762.62 \quad N/cm^2 \quad (8.28)$$

L'andamento delle tensioni tangenziali t_{32} in ognuna delle anime verticali è invece dato dalla:

$$t_{32} = -\frac{T_D S_{x_1}^{\Omega''}}{I_{x_1} s} = -2886.93 - 496.54w + 56.71w^2 \quad N/cm^2 \quad (8.29)$$

in cui

$$S_{x_1}^{\Omega''} = \left(\frac{b_2 - b_1}{2} + s \right) s \left(y_G - \frac{s}{2} \right) + s w \left(y_G - s - \frac{w}{2} \right); \quad (8.30)$$

Il valore massimo della tensione t_{32} si ha in corrispondenza della fibra baricentrica in cui vale:

$$t_{32,max} = t_{32}|_{z=y_G-s} = -3973.92 \text{ N/cm}^2 \quad (8.31)$$

Nelle appendici laterali orizzontali agirà una tensione tangenziale t_{31} determinabile dalla:

$$t_{31} = -\frac{T_D S_{x_1}^{\Omega'''}}{I_{x_1} s} = -524.90 z \text{ N/cm}^2 \text{ con } S_{x_1}^{\Omega'''} = z s \left(y_G - \frac{s}{2} \right); \quad (8.32)$$

il valore massimo della tensione t_{31} si ha per $y = (b_2 - b_1)/2$:

$$t_{31,max} = t_{31}|_{y=(b_2-b_1)/2} = 2624.49 \text{ N/cm}^2 \quad (8.33)$$

Il diagramma delle tensioni tangenziali è riportato nella Figura 8.6.

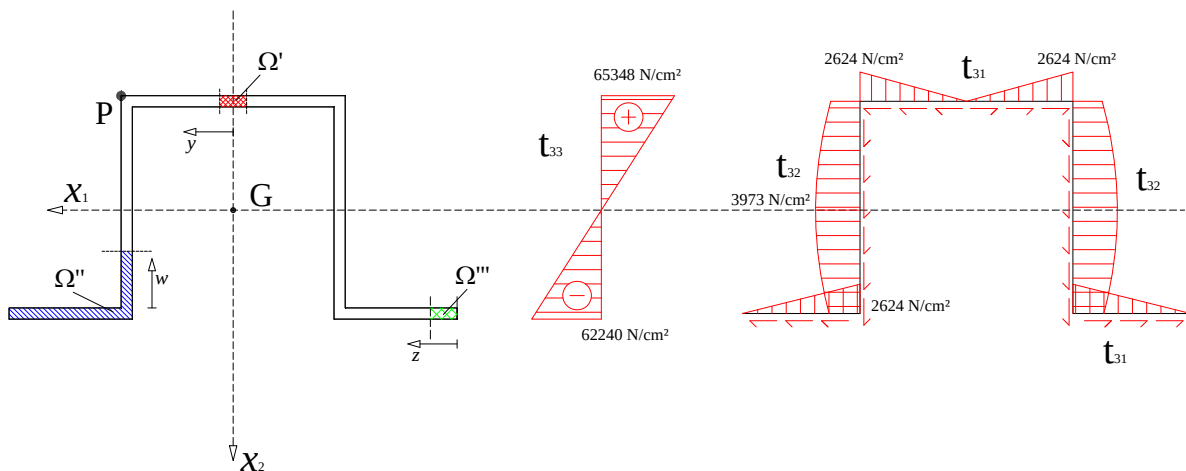


Figura 8.6. Tensioni normali e tangenziali sulla sezione trasversale.

Data l'entità delle tensioni appena determinate, la verifica di sicurezza può essere condotta, secondo il criterio di resistenza di Von Mises, in corrispondenza del punto **P** assumendo che lì agiscano le tensioni $t_{33,s}$, $t_{31,max}$ e $t_{32}|_{w=h-s} = 2624 \text{ N/cm}^2$

$$\sigma_{id} = \sqrt{t_{33,s}^2 + 3(t_{31,max}^2 + t_{32}|_{w=h-s}^2)} = 65664.1 \text{ N/cm}^2 > \sigma_{amm} = 16000 \text{ N/cm}^2 \quad (8.34)$$

La verifica, pertanto, NON risulta essere soddisfatta.

9 Soluzione del compito del 16 febbraio 2012

- Tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della struttura riportata in figura
- Verificare la sezione più sollecitata.

Dati:

$E = 2.1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$	$\sigma_{amm} = 1.6 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$	$\theta = 45^\circ$	$\alpha = 1.5 \cdot 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	$\Delta T = 10^\circ\text{C}$	$t = 1 \text{ cm}$
$L = 300 \text{ cm}$	$q = 150 \text{ N/cm}$	$h = 20 \text{ cm}$	$b_1 = 10 \text{ cm}$	$b_2 = 20 \text{ cm}$	$s = 0.5 \text{ cm}$

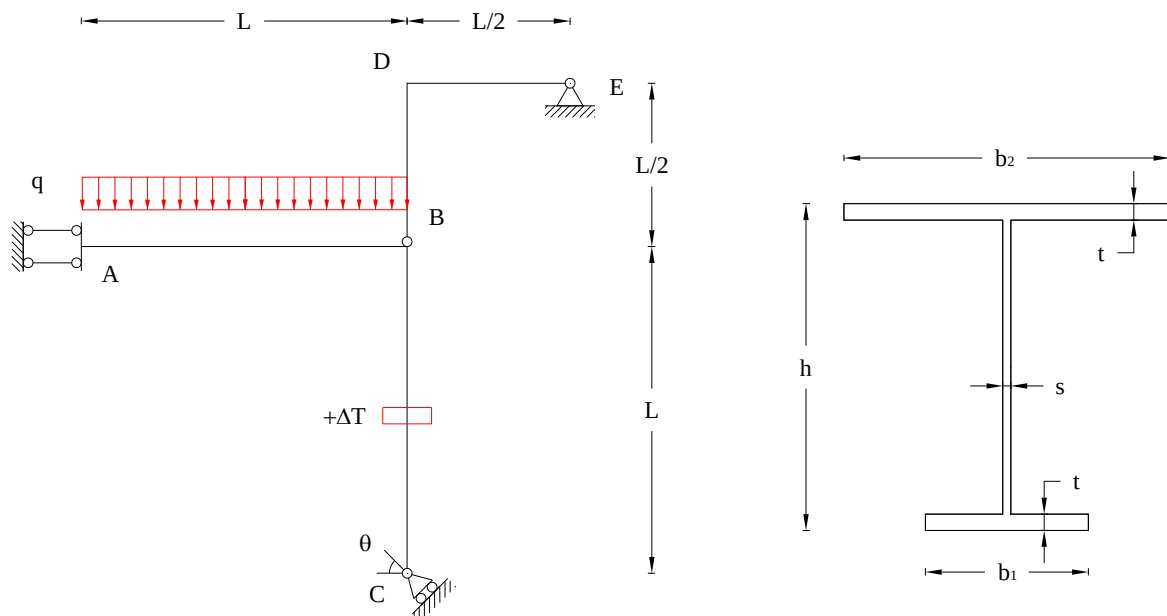


Figura 9.1. Sistema da analizzare; schema d'assi e sezione trasversale.

9.1 Riconoscimento del grado di iperstaticità

Per riconoscere il grado di iperstaticità del sistema si può rilevare che il sistema privo di vincoli è composto da due aste quindi possiede nel piano sei gradi di libertà. I gradi di libertà sottratti dai vincoli esterni sono cinque (due per il vincolo in A, uno per il vincolo in C e due per il vincolo in E), mentre i gradi di libertà sottratti dal vincolo interno in B sono due, quindi il sistema è una volta iperstatico.

$$q = n - v = 6 - (2 + 1 + 2 + 2) = -1 \quad (9.1)$$

9.2 Calcolo delle caratteristiche inerziali della sezione trasversale

La sezione trasversale è a I con ali diseguali e possiede un asse di simmetria verticale, quindi il baricentro G si troverà su di esso. L'altezza del baricentro viene determinata come di seguito:

Dapprima si determina l'area:

$$A = (b_1 + b_2)t + (h - 2t)s = 39 \text{ cm}^2 \quad (9.2)$$

Quindi si calcola il momento statico rispetto ad un asse orizzontale passante per il lembo inferiore:

$$S_{x_0} = \frac{(b_1)t^2}{2} + s(h - 2t)\frac{h}{2} + b_2t\left(h - \frac{t}{2}\right) = 485 \text{ cm}^3 \quad (9.3)$$

ed, infine, l'ordinata del baricentro rispetto il lembo inferiore:

$$y_G = \frac{S_{x_0}}{A} = 12.4359 \text{ cm} \quad (9.4)$$

Il momento di inerzia rispetto l'asse orizzontale baricentrico x_1 si calcola come:

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \frac{b_2t^3}{12} + b_2t\left(h - \frac{t}{2} - y_G\right)^2 + \frac{s(h - 2t)^3}{12} + s(h - 2t)\left(\frac{h}{2} - y_G\right)^2 + \frac{b_1t^3}{12} + b_1t\left(y_G - \frac{t}{2}\right)^2 = \\ &= 2721.589 \text{ cm}^4 \end{aligned} \quad (9.5)$$

9.3 Metodo di analisi (metodo delle forze): posizione del problema

Secondo quanto prescritto dal metodo delle forze, il sistema assegnato è equivalente alla sovrapposizione di schemi isostatici ottenuti mediante la soppressione di un numero di vincoli a molteplicità semplice pari al grado di iperstaticità, quindi, nel caso in esame, sopprimendo una molteplicità vincolare. Vi saranno, ovviamente, diverse possibilità di scelta per pervenire agli schemi isostatici e nel seguito ne viene esaminata una.

Una volta determinata l'incognita iperstatica X come mostrato nel seguito, i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione agenti sul sistema assegnato possono essere ricavate mediante il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{cases} N(x_3) = N^{(0)}(x_3) + N^{(1)}(x_3)X \\ T(x_3) = T^{(0)}(x_3) + T^{(1)}(x_3)X \\ M(x_3) = M^{(0)}(x_3) + M^{(1)}(x_3)X \end{cases} \quad (9.6)$$

9.4 Soluzione dello schema iperstatico

Si sceglie di rendere isostatico il sistema mediante la soppressione della molteplicità vincolare legata alla traslazione orizzontale del punto E. I sistemi isostatici sono quelli indicati in Figura 9.2,

in cui l'incognita iperstatica X deve essere valutata in maniera tale che lo spostamento del punto E u_E , deve essere nullo, ovvero deve essere verificata la seguente equazione di congruenza:

$$u_E = u_E^{(0)} + u_E^{(1)} X = 0 \quad (9.7)$$

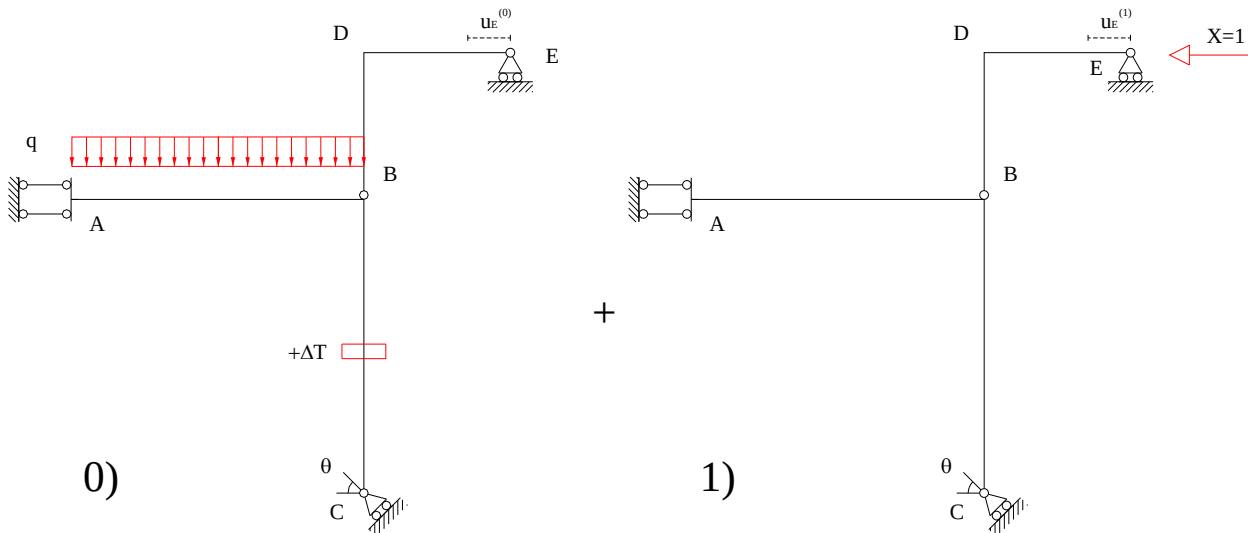


Figura 9.2. Scomposizione della struttura iperstatica negli schemi isostatici 0) e 1).

9.4.1 Soluzione dello schema isostatico 0)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 0) si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 9.3. I valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$H_A^{(0)} = H_C^{(0)} = V_C^{(0)} = qL = 45000\text{N}; \quad M_A^{(0)} = \frac{qL^2}{2} = 6750\text{kNcm}; \quad H_B^{(0)} = V_B^{(0)} = V_E^{(0)} = 0; \quad (9.8)$$

$$N_{AB}^{(0)}(x_3) = N_{BC}^{(0)}(x_3) = -qL; \quad N_{BD}^{(0)}(x_3) = N_{DE}^{(0)}(x_3) = 0; \quad (9.9)$$

$$T_{AB}^{(0)}(x_3) = -qx_3; \quad T_{BC}^{(0)}(x_3) = qL; \quad T_{BD}^{(0)}(x_3) = T_{DE}^{(0)}(x_3) = 0; \quad (9.10)$$

$$M_{AB}^{(0)}(x_3) = -\frac{q}{2}(L^2 + x_3^2); \quad M_{BC}^{(0)}(x_3) = -qLx_3; \quad M_{BD}^{(0)}(x_3) = M_{DE}^{(0)}(x_3) = 0; \quad (9.11)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 9.3-a.

9.4.2 Soluzione dello schema isostatico 1)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 1), in cui l'incognita iperstatica assume valore unitario ($X=1$), si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche

della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 9.4, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$H_A^{(1)} = 2X; M_A^{(1)} = XL; H_C^{(1)} = V_C^{(1)} = V_E^{(1)} = X; \quad (9.12)$$

$$N_{AB}^{(1)}(x_3) = -2X; N_{BC}^{(1)}(x_3) = N_{BD}^{(1)}(x_3) = N_{DE}^{(1)}(x_3) = -X \quad (9.13)$$

$$T_{AB}^{(1)}(x_3) = 0; T_{BC}^{(1)}(x_3) = X; T_{BD}^{(1)}(x_3) = -X; T_{DE}^{(1)}(x_3) = X; \quad (9.14)$$

$$M_{AB}^{(1)}(x_3) = -XL; M_{BC}^{(1)}(x_3) = -X x_3; M_{BD}^{(1)}(x_3) = X x_3; M_{DE}^{(1)}(x_3) = -X x_3; \quad (9.15)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 9.4-a.

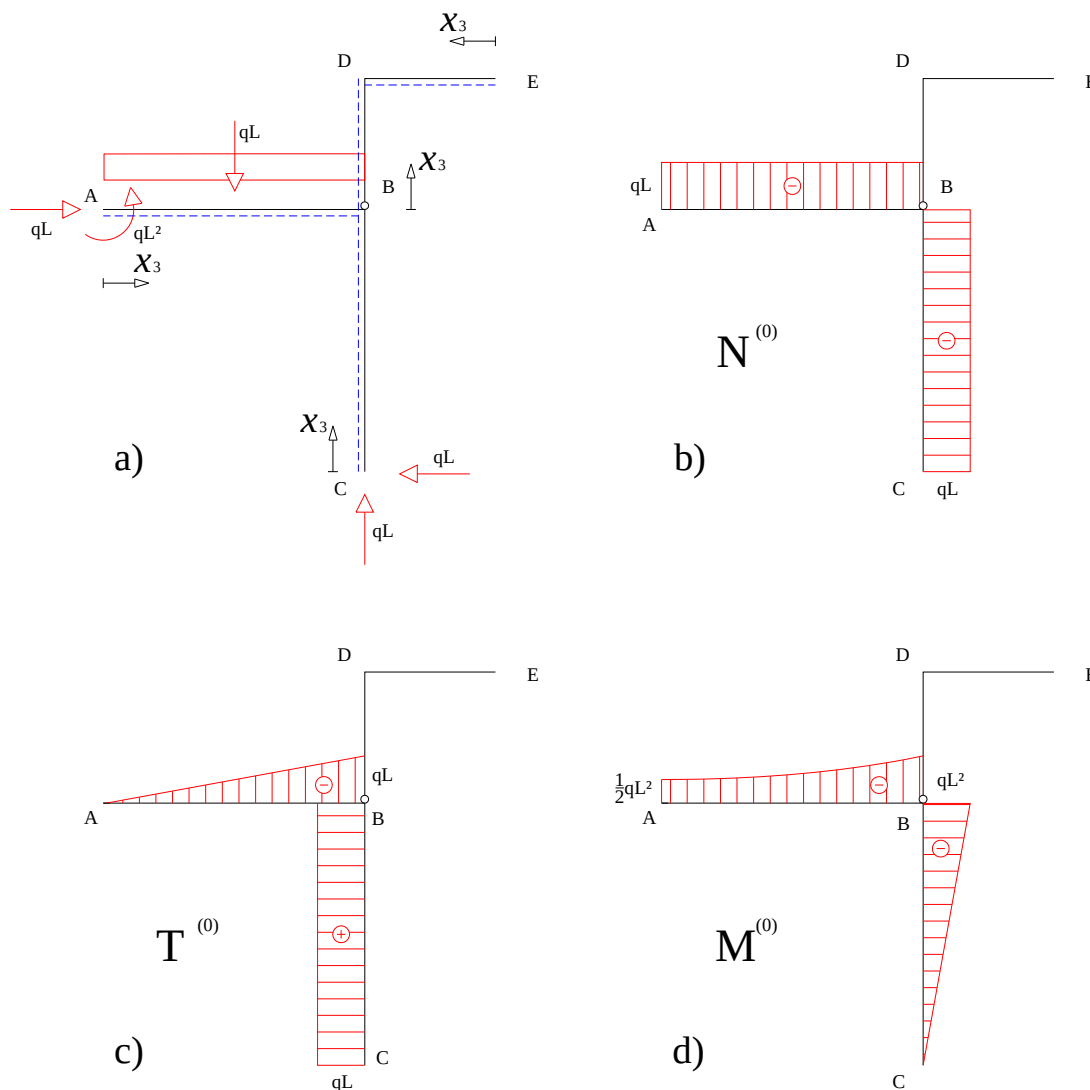


Figura 9.3. Schema isostatico 0); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

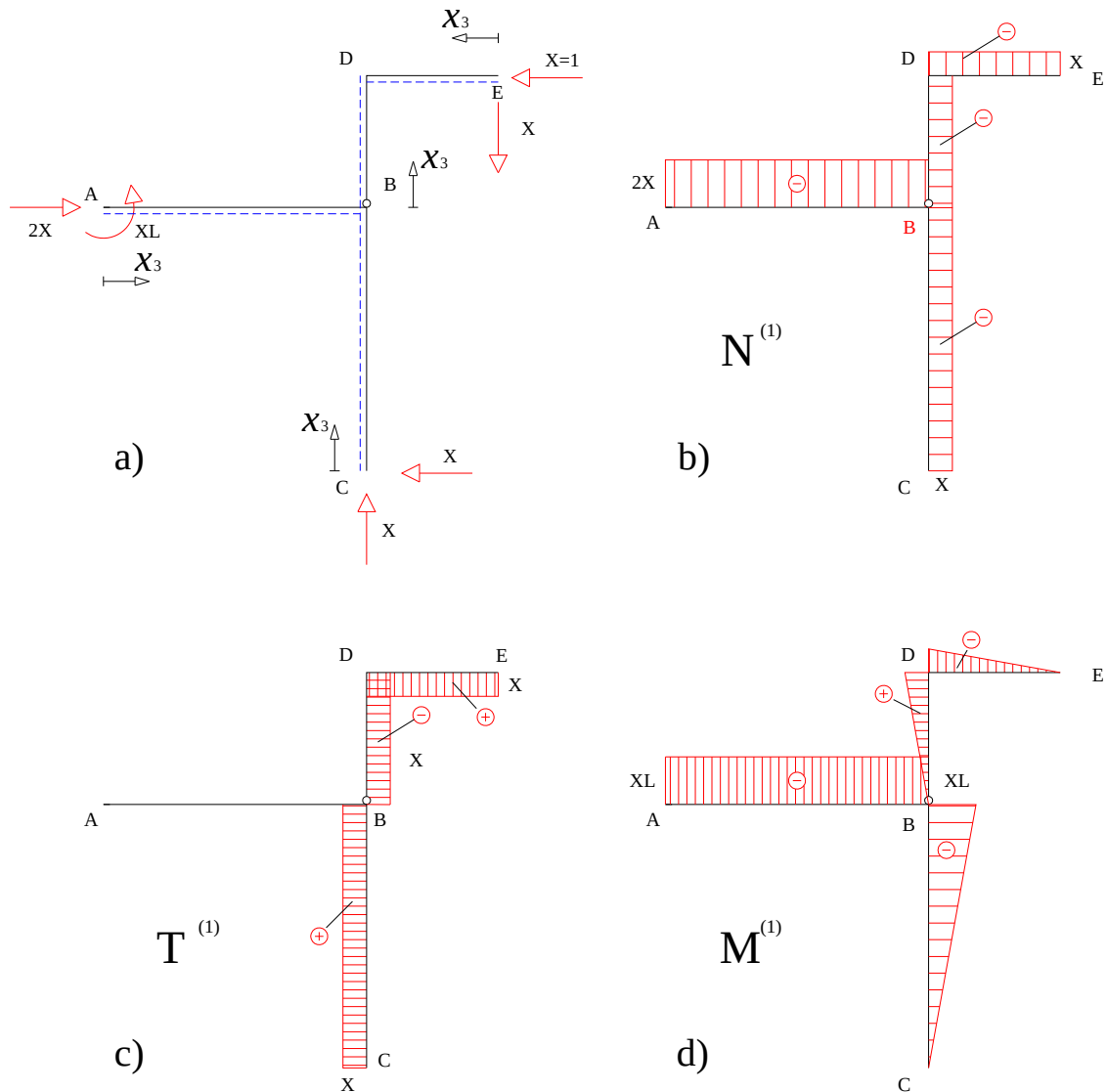


Figura 9.4. Schema isostatico 1); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

9.4.3 Determinazione dell'incognita iperstatica

Come detto in precedenza l'incognita iperstatica va determinata imponendo l'equazione di congruenza (9.7). Per compiere questo passo è necessario procedere al calcolo degli spostamenti $u_E^{(0)}$ e $u_E^{(1)}$. A tale scopo si utilizzerà il metodo della forza unitaria.

9.4.3.1 Calcolo di $u_E^{(0)}$

La determinazione di $u_E^{(0)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 0) come sistema congruente reale ed il sistema 1) come sistema equilibrato fittizio.

$$L_e = 1 \cdot u_E^{(0)} \quad (9.16)$$

Il lavoro interno, tralasciando di riportare i termini nulli, può scriversi come:

$$L_i = \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BC}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BC}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L N_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{N_{AB}^{(0)}(x_3)}{EA} dx_3 + \int_0^L N_{BC}^{(1)}(x_3) \left(\frac{N_{BC}^{(0)}(x_3)}{EA} + \alpha \Delta T \right) dx_3 = \frac{qL^4}{EI_{x_1}} + \frac{3qL^2}{EA} - \alpha \Delta TL \quad (9.17)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$u_E^{(0)} = \frac{qL^4}{EI_{x_1}} + \frac{3qL^2}{EA} - \alpha \Delta TL = 21.263 \text{ cm} \quad (9.18)$$

9.4.3.2 Calcolo di $u_E^{(1)}$

La determinazione di $u_E^{(1)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 1) sia come sistema congruente reale che come sistema equilibrato fittizio.

$$L_e = 1 \cdot u_E^{(1)} \quad (9.19)$$

$$L_i = \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BC}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BC}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{L/2} M_{BD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BD}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{L/2} M_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{M_{DE}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L N_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{N_{AB}^{(1)}(x_3)}{EA} dx_3 + \int_0^L N_{BC}^{(1)}(x_3) \frac{N_{BC}^{(1)}(x_3)}{EA} dx_3 + \int_0^{L/2} N_{BD}^{(1)}(x_3) \frac{N_{BD}^{(1)}(x_3)}{EA} dx_3 + \int_0^{L/2} N_{DE}^{(1)}(x_3) \frac{N_{DE}^{(1)}(x_3)}{EA} dx_3 = \frac{6L}{EA} + \frac{17}{12} \frac{L^3}{EI_{x_1}} \quad (9.20)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$u_E^{(1)} = \frac{6L}{EA} + \frac{17}{12} \frac{L^3}{EI_{x_1}} = 6.7145 \cdot 10^{-4} \text{ cm/N} \quad (9.21)$$

9.4.3.3 Calcolo della incognita iperstatica

La determinazione del valore della incognita iperstatica X può essere condotta sostituendo i valori degli spostamenti appena determinati nell'equazione di congruenza (9.7):

$$u_E^{(0)} + u_E^{(1)} X = 0 \rightarrow X = -\frac{u_E^{(0)}}{u_E^{(1)}} = -31667.4 \text{ N} \quad (9.22)$$

Il verso effettivo dell'incognita iperstatica è, quindi, discorde a quello ipotizzato.

9.5 Determinazione dei diagrammi della sollecitazione

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti è possibile ricavare i valori delle reazioni vincolari e l'andamento delle caratteristiche della sollecitazione del sistema iperstatico assegnato, trovando:

$$\begin{aligned}
 H_A = 2X - qL = 18335\text{N}; \quad H_C = V_C = qL - X = 13333\text{N} \\
 M_A = XL - \frac{qL^2}{2} = 2750.21 \text{ kNcm}; \quad V_E = H_E = X = 31667\text{N};
 \end{aligned}
 \tag{9.23}$$

$$\begin{aligned}
 N_{AB}(x_3) = 2X - qL = 18335\text{N}; \quad N_{BC}(x_3) = X - qL = -13333\text{N}; \\
 N_{BD}(x_3) = X = 31667\text{N}; \quad N_{DE}(x_3) = X = 31667\text{N};
 \end{aligned}
 \tag{9.24}$$

$$\begin{aligned}
 T_{AB}(x_3) = -q x_3 = -150 x_3 \text{ N}; \quad T_{BC}(x_3) = qL - X = 13333\text{N}; \\
 T_{BD}(x_3) = X = 31667\text{N}; \quad T_{DE}(x_3) = -X = -31667\text{N};
 \end{aligned}
 \tag{9.25}$$

$$\begin{aligned}
 M_{AB}(x_3) &= -\frac{q}{2}(L^2 + x_3^2) + XL = 2750.21 - 75 x_3^2 \text{ kNcm}; \\
 M_{BC}(x_3) &= (X - qL) x_3 = -13333 x_3 \text{ Ncm}; \\
 M_{BD}(x_3) &= -X x_3 = -31667 x_3 \text{ Ncm}; \\
 M_{DE}(x_3) &= X x_3 = 31667 x_3 \text{ Ncm};
 \end{aligned}
 \tag{9.26}$$

I corrispondenti diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione sono riportati nella Figura 9.5.

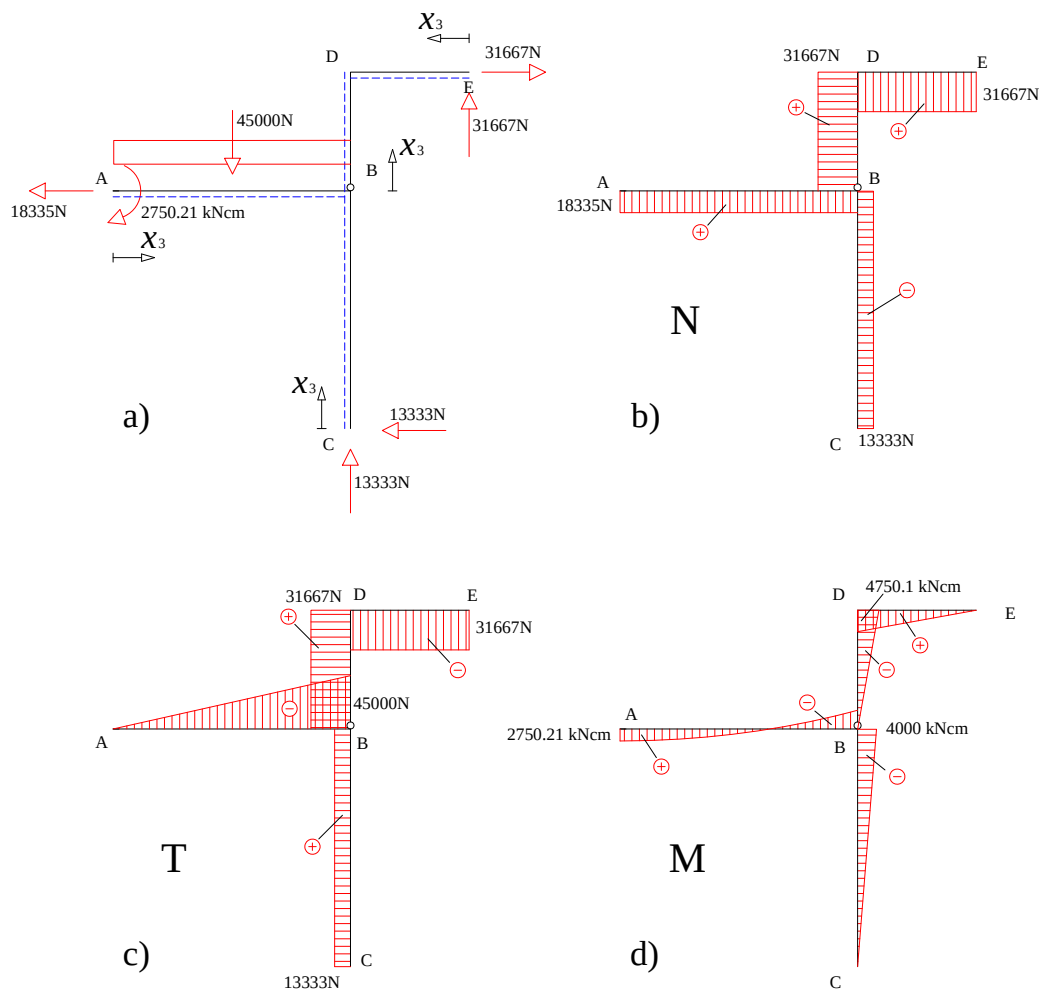


Figura 9.5. Schema iperstatico; a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

9.6 Verifica della sezione più sollecitata

Dall'esame dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione si deduce che la sezione più sollecitata è quella denotata con la lettera **D** che è soggetta alle seguenti caratteristiche della sollecitazione:

$$N_D = 31667 \text{ N}; \quad T_D = 31667 \text{ N}; \quad M_D = 4750.1 \text{ kNcm}. \quad (9.27)$$

La distribuzione delle tensioni normali e tangenziali dovute a tali caratteristiche della sollecitazione si calcolano, rispettivamente, applicando la formula di Navier per le tensioni normali e la teoria approssimata del taglio secondo Jourawski per le tensioni tangenziali.

Per quanto riguarda le tensioni normali, l'andamento è quello indicato dalla relazione:

$$t_{33} = \frac{N_D}{A} + \frac{M_D}{I_{x_1}} x_2 = \frac{31667}{39} + \frac{4750100}{2721.59} x_2 = 811.98 + 1745.34 x_2 \text{ N/cm}^2 \quad (9.28)$$

I valori estremi delle tensioni si verificano in corrispondenza delle fibre inferiori ed superiori ottenendo:

$$t_{33,i} = t_{33}|_{x_2=y_G} = 22517 \text{ N/cm}^2 \quad t_{33,s} = t_{33}|_{x_2=y_G-h} = -12390 \text{ N/cm}^2 \quad (9.29)$$

Il diagramma delle tensioni normali t_{33} è riportato nella Figura 9.6.

Nonostante le sole tensioni normali siano sufficienti ad esprimere un giudizio negativo sulla verifica della sezione, si vuole ugualmente per scopi didattici calcolare il contributo delle tensioni tangenziali, la cui determinazione può essere condotta applicando la nota formula di Jourawski alle corde illustrate nella Figura 9.6:

$$t_{31,s} = -\frac{T_D S_{x_1}^{\Omega'}}{I_{x_1} t} = 82.195 y \text{ N/cm}^2 \text{ con } S_{x_1}^{\Omega'} = -ty \left(h - y_G - \frac{t}{2} \right); \quad (9.30)$$

il valore massimo della tensione $t_{31,s}$ si ha in corrispondenza dell'attacco dell'ala all'anima:

$$t_{31,s,max} = t_{31}|_{y=\frac{b_2}{2}} = 891.95 \text{ N/cm}^2 \quad (9.31)$$

Per l'ala inferiore si ha, analogamente,

$$t_{31,i} = -\frac{T_D S_{x_1}^{\Omega''}}{I_{x_1} t} = -138.9 z \text{ N/cm}^2 \text{ con } S_{x_1}^{\Omega''} = tz \left(y_G - \frac{t}{2} \right); \quad (9.32)$$

il valore massimo della tensione $t_{31,i}$ si ha in corrispondenza dell'attacco dell'ala all'anima:

$$t_{31,i,max} = t_{31}|_{z=\frac{b_1}{2}} = -694.4 \text{ N/cm}^2 \quad (9.33)$$

L'andamento delle tensioni tangenziali t_{32} , invece, è dato dalla:

$$t_{32} = -\frac{T_D S_{x_1}^{\Omega'''}}{I_{x_1} s} = -2777.6 - 133.1w + 5.818w^2 \text{ N/cm}^2 \text{ con } S_{x_1}^{\Omega'''} = b_1 t \left(y_G - \frac{t}{2} \right) + sw \left(y_G - t - \frac{w}{2} \right); \quad (9.34)$$

il valore massimo della tensione t_{32} si ha in corrispondenza della fibra baricentrica in cui vale:

$$t_{32,max} = t_{32}|_{w=y_G-t} = -3538.5 \text{ N/cm}^2 \quad (9.35)$$

Il diagramma delle tensioni tangenziali t_{31} e t_{32} è riportato nella Figura 9.6.

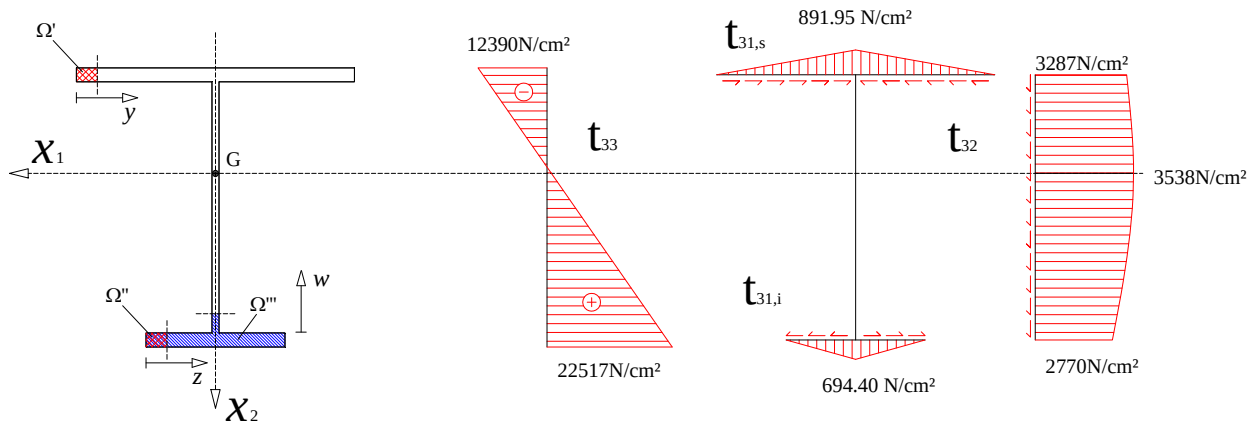


Figura 9.6. Tensioni normali e tangenziali sulla sezione trasversale.

Data l'entità delle tensioni appena determinate, la verifica di sicurezza può essere condotta, secondo il criterio di resistenza di Von Mises, in corrispondenza dell'attacco dell'anima sull'ala inferiore assumendo che lì agiscano le tensioni $t_{33,i}$, $t_{31,i,max}$ e $t_{32}|_{w=0} = 2770 \text{ N/cm}^2$

$$\sigma_{id} = \sqrt{t_{33,i}^2 + 3(t_{31,i,max}^2 + t_{32}|_{w=0}^2)} = 23056 \text{ N/cm}^2 > \sigma_{amm} = 16000 \text{ N/cm}^2 \quad (9.36)$$

La verifica, pertanto, NON risulta essere soddisfatta.

10 Soluzione del compito del 6 marzo 2012

- Tracciare i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione della struttura riportata in figura
- Verificare la sezione più sollecitata.

Dati:

$E = 2.1 \cdot 10^7 \text{ N/cm}^2$	$\sigma_{amm} = 1.6 \cdot 10^4 \text{ N/cm}^2$	$\phi_0 = 0.02 \text{ rad}$	$h = 20 \text{ cm}$	$c = 5 \text{ cm}$	$t = 2 \text{ cm}$
$L = 300 \text{ cm}$	$q = 150 \text{ N/cm}$		$b = 10 \text{ cm}$	$b_2 = 20 \text{ cm}$	$s = 0.5 \text{ cm}$

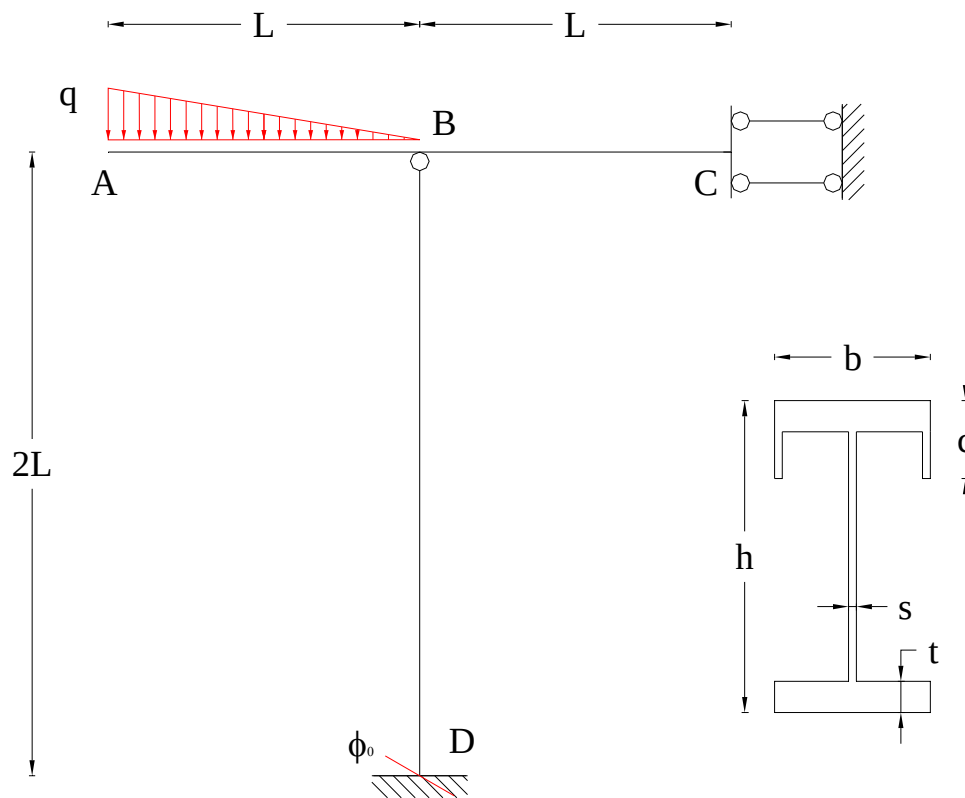


Figura 10.1. Sistema da analizzare; schema d'assi e sezione trasversale.

10.1 Riconoscimento del grado di iperstaticità

Per riconoscere il grado di iperstaticità del sistema si può rilevare che il sistema privo di vincoli è composto da due aste quindi possiede nel piano sei gradi di libertà. I gradi di libertà sottratti dai vincoli esterni sono cinque (due per il vincolo in C, e tre per il vincolo in D), mentre i gradi di libertà sottratti dal vincolo interno in B sono due, quindi il sistema è una volta iperstatico.

$$q = n - v = 6 - (3 + 2 + 2) = -1 \quad (10.1)$$

10.2 Calcolo delle caratteristiche inerziali della sezione trasversale

La sezione trasversale può essere pensata come una sezione a I con aggiunte delle appendici sull'ala superiore. Tale sezione possiede un asse di simmetria verticale, quindi il baricentro G si troverà su di esso. L'altezza del baricentro può essere determinata come di seguito:

Dapprima si determina l'area:

$$A = bh - (b-s)(h-2t) + 2(c-t)s = 51 \text{ cm}^2 \quad (10.2)$$

Quindi si calcola il momento statico rispetto ad un asse orizzontale passante per il baricentro della sezione ad I pensata senza appendici. Dal momento che il momento statico per un asse baricentrico è sempre nullo, l'unico contributo al momento statico sarà:

$$S_{x_0} = -2(c-t)s \cdot d = -19.5 \text{ cm}^3 \quad (10.3)$$

in cui d è la distanza del baricentro delle appendici dall'asse x_0 e vale:

$$d = \frac{h-c-t}{2} = 6.5 \text{ cm} \quad (10.4)$$

ed, infine, l'ordinata del baricentro dell'intera figura rispetto l'asse baricentrico della sezione ad I senza appendici sarà:

$$y_G = \frac{S_{x_0}}{A} = -0.3824 \text{ cm} \quad (10.5)$$

Le distanze del baricentro dal lembo inferiore e dal lembo superiore, rispettivamente, utili per la verifica della sezione, saranno pertanto:

$$y_i = \frac{h}{2} - y_G = 10.3824 \text{ cm} \quad (10.6)$$

$$y_s = \frac{h}{2} + y_G = 9.6177 \text{ cm} \quad (10.7)$$

Il momento di inerzia rispetto l'asse orizzontale baricentrico x_1 si calcola come:

$$I_{x_1} = \frac{bh^3}{12} - \frac{(b-s)(h-2t)^3}{12} - Ay_G^2 + 2 \left(\frac{s(c-t)^3}{12} + s(c-t)(d-y_G)^2 \right) = 3560.89 \text{ cm}^4 \quad (10.8)$$

10.3 Metodo di analisi (metodo delle forze): posizione del problema

Secondo quanto prescritto dal metodo delle forze, il sistema assegnato è equivalente alla sovrapposizione di schemi isostatici ottenuti mediante la soppressione di un numero di vincoli a molteplicità semplice pari al grado di iperstaticità, quindi, nel caso in esame, sopprimendo una

molteplicità vincolare. Vi saranno, ovviamente, diverse possibilità di scelta per pervenire agli schemi isostatici e nel seguito ne viene esaminata una.

Una volta determinata l'incognita iperstatica X come mostrato nel seguito, i diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione agenti sul sistema assegnato possono essere ricavate mediante il principio di sovrapposizione degli effetti:

$$\begin{cases} N(x_3) = N^{(0)}(x_3) + N^{(1)}(x_3)X \\ T(x_3) = T^{(0)}(x_3) + T^{(1)}(x_3)X \\ M(x_3) = M^{(0)}(x_3) + M^{(1)}(x_3)X \end{cases} \quad (10.9)$$

10.4 Soluzione dello schema iperstatico

Si sceglie di rendere isostatico il sistema mediante la soppressione della molteplicità vincolare legata alla rotazione del punto **D**. I sistemi isostatici sono quelli indicati in Figura 10.2, in cui l'incognita iperstatica X deve essere valutata in maniera tale che la rotazione del punto **D** φ_D , deve essere pari alla rotazione anelastica imposta ϕ_0 , ovvero deve essere verificata la seguente equazione di congruenza:

$$\varphi_D = \varphi_D^{(0)} + \varphi_D^{(1)}X = \phi_0 \quad (10.10)$$

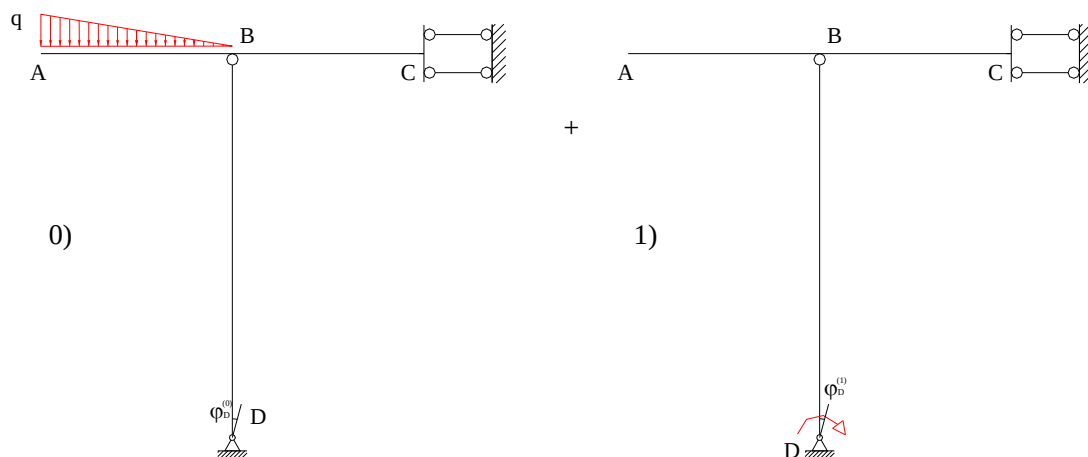


Figura 10.2. Scomposizione della struttura iperstatica negli schemi isostatici 0) e 1).

10.4.1 Soluzione dello schema isostatico 0)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 0) si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 10.3. I valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$H_C^{(0)} = H_D^{(0)} = 0; \quad M_C^{(0)} = \frac{qL^2}{3} = 4500 \text{ kNcm}; \quad V_D^{(0)} = \frac{qL}{2} = 22500 \text{ N}; \quad (10.11)$$

$$q(x_3) = q \left(1 - \frac{x_3}{L} \right); \quad N_{AB}^{(0)}(x_3) = N_{BC}^{(0)}(x_3) = 0; \quad N_{BD}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL}{2}; \quad (10.12)$$

$$T_{AB}^{(0)}(x_3) = \int_0^{x_3} q(\hat{x}_3) d\hat{x}_3 = -q x_3 \left(1 - \frac{x_3}{2L} \right); \quad T_{BC}^{(0)}(x_3) = T_{BD}^{(0)}(x_3) = 0; \quad (10.13)$$

$$M_{AB}^{(0)}(x_3) = \int_0^{x_3} -(x_3 - \hat{x}_3) q(\hat{x}_3) d\hat{x}_3 = \frac{q x_3^2}{6L} (x_3 - 3L); \quad M_{BC}^{(0)}(x_3) = -\frac{qL^2}{3}; \quad M_{BD}^{(0)}(x_3) = 0; \quad (10.14)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 10.3-a.

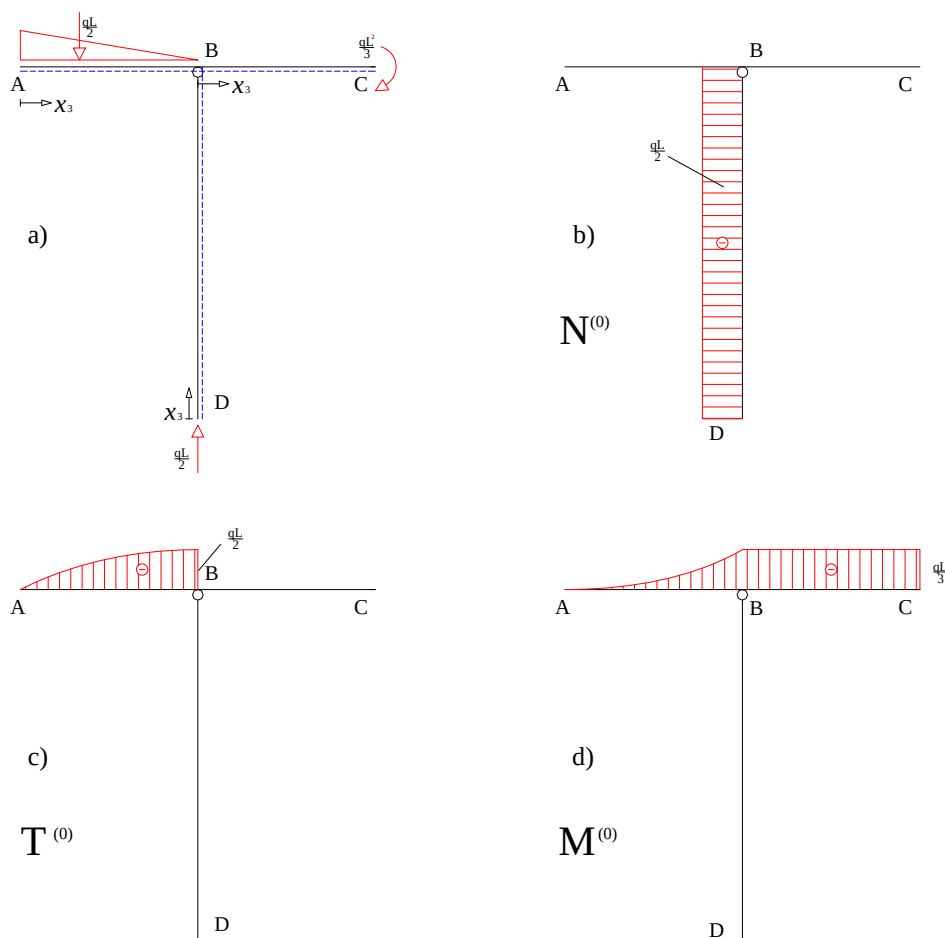


Figura 10.3. Schema isostatico 0); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

10.4.2 Soluzione dello schema isostatico 1)

Applicando le equazioni cardinali della statica allo schema isostatico 1), in cui l'incognita iperstatica assume valore unitario ($X=1$), si determinano le reazioni vincolari e le caratteristiche della sollecitazione riportate graficamente nella Figura 10.4, mentre i rispettivi valori delle reazioni vincolari e andamenti delle caratteristiche della sollecitazione sono di seguito elencati:

$$V_D^{(1)} = M_C^{(1)} = 0; \quad H_C^{(1)} = H_D^{(1)} = \frac{X}{2L}; \quad (10.15)$$

$$N_{AB}^{(1)}(x_3) = N_{BD}^{(1)}(x_3) = 0; \quad N_{BC}^{(1)}(x_3) = -\frac{X}{2L}; \quad (10.16)$$

$$T_{AB}^{(1)}(x_3) = T_{BC}^{(1)}(x_3) = 0; \quad T_{BD}^{(1)}(x_3) = -\frac{X}{2L}; \quad (10.17)$$

$$M_{AB}^{(1)}(x_3) = M_{BC}^{(1)}(x_3) = 0; \quad M_{BD}^{(1)}(x_3) = X \frac{2L - x_3}{2L}; \quad (10.18)$$

I sistemi di riferimento delle ascisse x_3 utilizzati sono mostrati nella Figura 10.4-a.

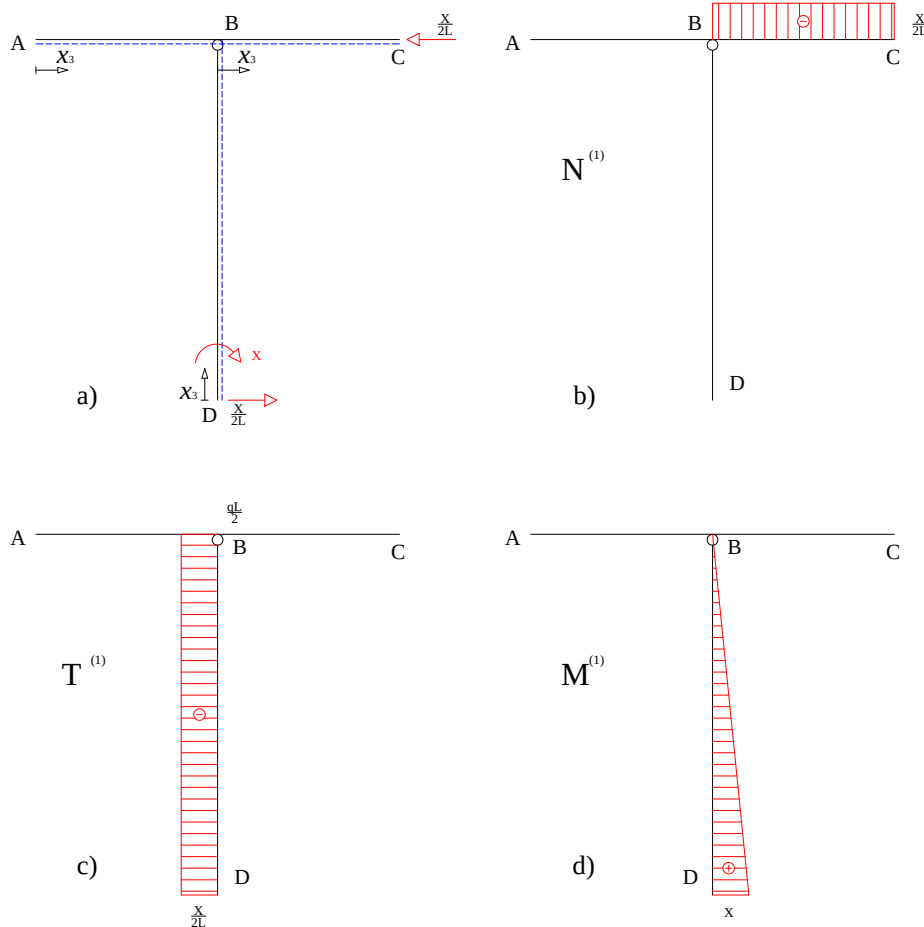


Figura 10.4. Schema isostatico 0); a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

10.4.3 Determinazione dell'incognita iperstatica

L'incognita iperstatica va determinata imponendo l'equazione di congruenza (10.10). Per compiere questo passo è necessario procedere al calcolo degli spostamenti $\varphi_D^{(0)}$ e $\varphi_D^{(1)}$. A tale scopo si utilizzerà il metodo della forza unitaria.

10.4.3.1 Calcolo di $\varphi_D^{(0)}$

La determinazione di $\varphi_D^{(0)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 0) come sistema congruente reale ed il sistema 1) come sistema equilibrato fittizio.

Il lavoro esterno vale:

$$L_e = 1 \cdot \varphi_D^{(0)} \quad (10.19)$$

Il lavoro interno può scriversi come:

$$L_i = \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BC}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BC}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{2L} M_{BD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BD}^{(0)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 = 0 \quad (10.20)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$\varphi_D^{(0)} = 0 \text{ rad} \quad (10.21)$$

Il sistema isostatico 1 non presenta rotazioni in **D**.

10.4.3.2 Calcolo di $\varphi_D^{(1)}$

La determinazione di $\varphi_D^{(1)}$ viene condotta applicando il metodo della forza unitaria assumendo il sistema 1) sia come sistema congruente reale che come sistema equilibrato fittizio.

$$L_e = 1 \cdot \varphi_D^{(1)} \quad (10.22)$$

$$L_i = \int_0^L M_{AB}^{(1)}(x_3) \frac{M_{AB}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^L M_{BC}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BC}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 + \int_0^{2L} M_{BD}^{(1)}(x_3) \frac{M_{BD}^{(1)}(x_3)}{EI_{x_1}} dx_3 = \frac{2}{3} \frac{L}{EI_{x_1}} \quad (10.23)$$

Eguagliando il lavoro interno ed il lavoro esterno si ricava:

$$u_E^{(1)} = \frac{2}{3} \frac{L}{EI_{x_1}} = 2.6745 \cdot 10^{-9} \text{ rad/Ncm} \quad (10.24)$$

10.4.3.3 Calcolo della incognita iperstatica

La determinazione del valore della incognita iperstatica X può essere condotta sostituendo i valori degli spostamenti appena determinati nell'equazione di congruenza (9.7):

$$\varphi_D^{(0)} + \varphi_D^{(1)} X = \phi_0 \rightarrow X = \frac{\phi_0 - \varphi_D^{(0)}}{\varphi_D^{(1)}} = \frac{3EI_{x_1} \phi_0}{2L} = 7478 \text{ kNcm} \quad (10.25)$$

Il verso effettivo dell'incognita iperstatica è, quindi, concorde a quello ipotizzato.

10.5 Determinazione dei diagrammi della sollecitazione

Applicando il principio di sovrapposizione degli effetti è possibile ricavare i valori delle reazioni vincolari e l'andamento delle caratteristiche della sollecitazione del sistema iperstatico assegnato, trovando:

$$H_C = H_D = \frac{X}{2L} = 12463\text{N}; \quad V_D = \frac{qL}{2} = 22500\text{N}; \quad M_C = \frac{qL^2}{3} = 4500 \text{ kNcm}; \quad (10.26)$$

$$N_{AB}(x_3) = 0; \quad N_{BC}(x_3) = -\frac{X}{2L} = -12463\text{N}; \quad N_{BD}(x_3) = -\frac{qL}{2} = -22500\text{N}; \quad (10.27)$$

$$T_{AB}(x_3) = -q x_3 \left(1 - \frac{x_3}{2L}\right) = -150 x_3 + 0.25 x_3^2 \text{ N} \quad T_{BC}(x_3) = 0; \quad T_{BD}(x_3) = -\frac{X}{2L} = -12463\text{N}; \quad (10.28)$$

$$M_{AB}(x_3) = \frac{q x_3^2}{6L} (x_3 - 3L) = -75 x_3^2 + 0.0833 x_3^3 \text{ Ncm}; \quad (10.29)$$

$$M_{BC}(x_3) = -\frac{qL^2}{3} = -4500 \text{ kNcm}; \quad M_{BD}(x_3) = X \frac{2L - x_3}{2L} = 7478 \left(1 - \frac{x_3}{600}\right) \text{ kNcm};$$

I corrispondenti diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione sono riportati nella Figura 10.5.

10.6 Verifica della sezione più sollecitata

Dall'esame dei diagrammi delle caratteristiche della sollecitazione si deduce che la sezione più sollecitata è quella denotata con la lettera **D** che è soggetta alle seguenti caratteristiche della sollecitazione:

$$N_D = -22500\text{N}; \quad T_D = -12463\text{N}; \quad M_D = 7478\text{kNcm}. \quad (10.30)$$

La distribuzione delle tensioni normali e tangenziali dovute a tali caratteristiche della sollecitazione si calcolano, rispettivamente, applicando la formula di Navier per le tensioni normali e la teoria approssimata del taglio secondo Jourawski per le tensioni tangenziali.

Per quanto riguarda le tensioni normali, l'andamento è quello indicato dalla relazione:

$$t_{33} = \frac{N_D}{A} + \frac{M_D}{I_{x_1}} x_2 = -441.18 + 2100 x_2 \text{ N/cm}^2 \quad (10.31)$$

I valori estremi delle tensioni si verificano in corrispondenza delle fibre inferiori ed superiori ottenendo:

$$t_{33,i} = t_{33}|_{x_2 = \frac{h}{2} - y_G} = 21362 \text{ N/cm}^2 \quad t_{33,s} = t_{33}|_{x_2 = -\frac{h}{2} - y_G} = -20638 \text{ N/cm}^2 \quad (10.32)$$

Il diagramma delle tensioni normali t_{33} è riportato nella Figura 10.6.

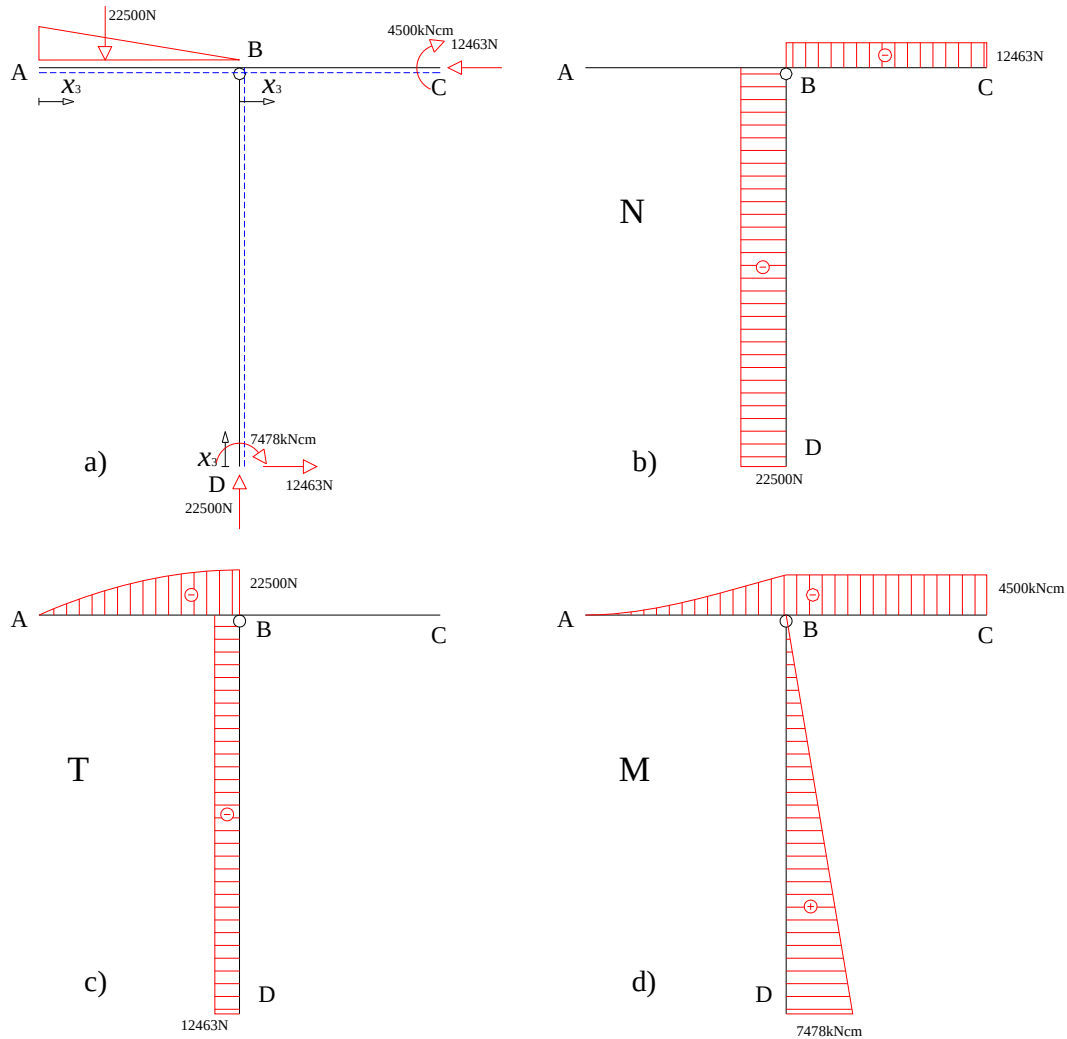


Figura 10.5. Schema iperstatico; a) reazioni vincolari; b) diagramma dello sforzo normale; c) diagramma del taglio; d) diagramma del momento flettente.

Nonostante le sole tensioni normali siano sufficienti ad esprimere un giudizio negativo sulla verifica della sezione, si vuole ugualmente per scopi didattici calcolare il contributo delle tensioni tangenziali, la cui determinazione può essere condotta applicando la nota formula di Jourawski alle corde illustrate nella Figura 10.6:

$$t_{31,s} = -\frac{T_D S_{x_1}^{\Omega'}}{I_{x_1} t} = -34.49 - 32.84y \text{ N/cm}^2 \text{ con } S_{x_1}^{\Omega'} = -cs \left(\frac{h-c}{2} - y_G \right) - ty \left(\frac{h-t}{2} - y_G \right); \quad (10.33)$$

il valore massimo della tensione $t_{31,s}$ si ha in corrispondenza dell'attacco dell'ala all'anima:

$$t_{31,s,max} = t_{31} \Big|_{y=\frac{b}{2}-s} = -182.26 \text{ N/cm}^2 \quad (10.34)$$

Per l'ala inferiore si ha, analogamente,

$$t_{31,i} = -\frac{T_D S_{x_1}^{\Omega''}}{I_{x_1} t} = 30.16z \text{ N/cm}^2 \text{ con } S_{x_1}^{\Omega''} = tz \left(y_G + \frac{h-t}{2} \right); \quad (10.35)$$

il valore massimo della tensione $t_{31,i}$ si ha in corrispondenza dell'attacco dell'ala all'anima:

$$t_{31,i,max} = t_{31} \Big|_{z=\frac{b}{2}} = -150.81 \text{ N/cm}^2 \quad (10.36)$$

L'andamento delle tensioni tangenziali t_{32} , invece, è dato dalla:

$$t_{32} = -\frac{T_D S_{x_1}^{\Omega'''}}{I_{x_1} s} = 1206.47 + 26.66w - 1.75w^2 \text{ N/cm}^2 \quad (10.37)$$

$$\text{in cui } S_{x_1}^{\Omega'''} = bt \left(y_G + \frac{h-t}{2} \right) + sw \left(y_G - t + \frac{h-w}{2} \right); \quad (10.38)$$

il valore massimo della tensione t_{32} si ha in corrispondenza della fibra baricentrica in cui vale:

$$t_{32,max} = t_{32} \Big|_{w=\frac{h}{2}+y_G-t} = 1308.02 \text{ N/cm}^2 \quad (10.39)$$

Il diagramma delle tensioni tangenziali t_{31} e t_{32} è riportato nella Figura 10.6.

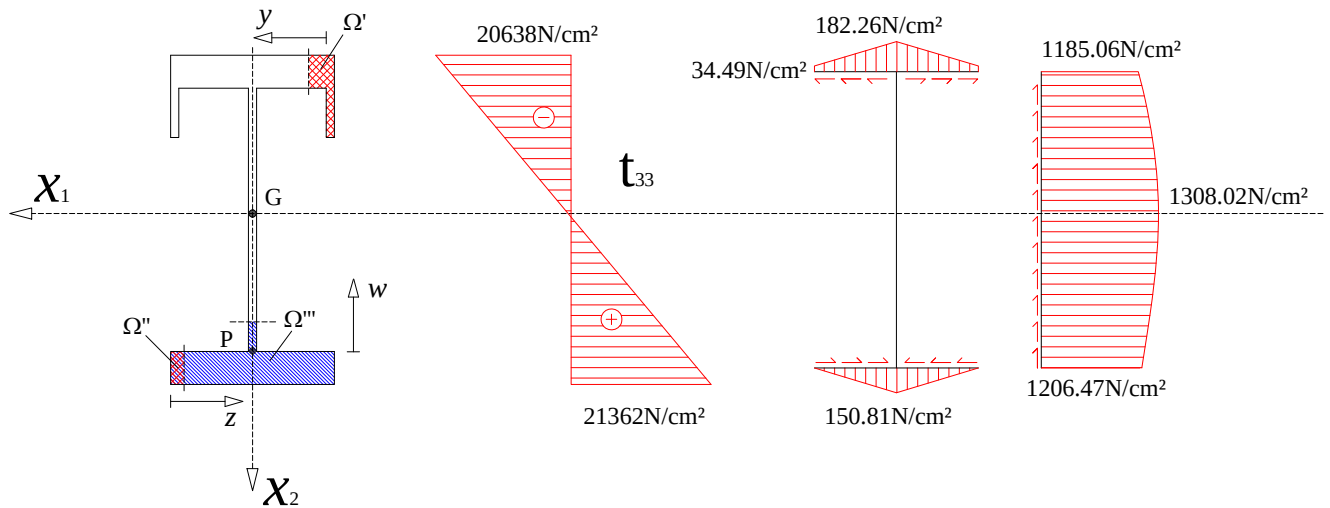


Figura 10.6. Tensioni normali e tangenziali sulla sezione trasversale.

Data l'entità delle tensioni appena determinate, la verifica di sicurezza può essere condotta, secondo il criterio di resistenza di Von Mises, in corrispondenza dell'attacco dell'anima sull'ala inferiore assumendo che lì agiscano le tensioni $t_{33,i}$, $t_{31,i,max}$ e $t_{32}|_{w=0} = 1206.47 \text{ N/cm}^2$

$$\sigma_{id} = \sqrt{t_{33,i}^2 + 3(t_{31,i,max}^2 + t_{32}|_{w=0}^2)} = 21465 \text{ N/cm}^2 > \sigma_{amm} = 16000 \text{ N/cm}^2 \quad (10.40)$$

La verifica, pertanto, NON risulta essere soddisfatta.