

Capitolo 1

Fasi di studio di un fenomeno

1.1 Dati sperimentali e loro ruolo nella costruzione dei “modelli matematici” di un fenomeno

Dicesi *fenomeno o osservabile* ogni sorgente di segnali rilevabili. Nello studio di un fenomeno e nella formulazione del modello matematico che lo rappresenta si distinguono svariate fasi che noi ora, per semplicitá, ridurremo a tre (cfr. Oss. 4):

- 1) - La prima fase consiste nella rilevazione, misura e catalogazione dei segnali e nella determinazione di eventuali relazioni tra essi (leggi sperimentali).
- 2) - La seconda fase consiste nella costruzione - sulla base di identificazioni fornite dalle risultanze della Fase I - di un “modello matematico” e nello studio e risoluzione di esso.
- 3) - La terza fase consiste nella *validazione* del modello matematico attraverso il confronto con i dati sperimentali forniti dalla Fase I. In assenza di validazione il modello va modificato o rigettato del tutto.

1.2 Fase I: raccolta ed analisi dei dati dello stato di un fenomeno

Nella fase I si selezionano anzitutto i parametri significativi con cui si intende rappresentare lo *stato* del fenomeno in studio. Indicati con x_i ($i = 1, \dots, n$) tali parametri, la n-pla (x_1, \dots, x_n)

rappresenta lo *stato* del fenomeno che pertanto è un vettore ad n componenti. I parametri x_i in genere variano col tempo e - per fenomeni che si verificano in domini estesi Ω - possono variare anche col posto. Noi - fino ad avviso contrario - supporremo tali parametri dipendenti solo dal tempo. Naturalmente per i fenomeni che si verificano su larghe scale spaziali ciò è lecito solo se i parametri x_i indicano le medie spaziali delle caratteristiche che rappresentano.

Si determinano poi i valori sperimentali dei parametri x_i ($i = 1, \dots, n$) lungo una successione crescente di istanti $\{t_n\}$. Si ottiene così la *tabella dei dati sperimentali* che nel caso $n = 3$, posto ($x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$), è del tipo:

Tabella 1 - Dati sperimentali per un vettore stato a tre componenti

Tempi	x	y	z
t_1	$x(t_1)$	$y(t_1)$	$z(t_1)$
t_2	$x(t_2)$	$y(t_2)$	$z(t_2)$
t_3	$x(t_3)$	$y(t_3)$	$z(t_3)$
...
t_n	$x(t_n)$	$y(t_n)$	$z(t_n)$
t_{n+1}	$x(t_{n+1})$	$y(t_{n+1})$	$z(t_{n+1})$
...

Si passa poi allo studio dei dati (che sono tanto più significativi, quanto maggiore è il loro numero per ogni caratteristica x_i del fenomeno) ed alle deduzioni che da essi emergono. In particolare si individuano:

- 1) i parametri che crescono e quelli che decrescono al crescere del tempo
- 2) i parametri che riprendono - dopo uno stesso intervallo di tempo - lo stesso valore (parametri temporalmente periodici)
- 3) le tendenze a valori asintotici nel tempo
- 4) eventuali relazioni tra i parametri (leggi sperimentali)

1.3 Fase II: costruzione e studio del modello matematico

La costruzione del modello è legata strettamente alle conoscenze del fenomeno da parte del proponente ed alle sue intuizioni su come vadano "interpretati" i dati sperimentali.

Prima di passare alla formulazione analitica, è necessaria non solo un'analisi profonda e circostanziata dei dati sperimentali ma anche la capacità di enucleare tra essi quelli più significativi, pronunciarsi sui loro collegamenti ad ogni istante e di prevedere eventuali comportamenti non emersi ancora chiaramente nei dati. In particolare *la scelta dei parametri significativi e delle ipotesi (assiomi) da associare al loro collegamento rappresentano il momento fondante del modello*. Sono esse che determinano il tipo di relazioni funzionali che rappresenteranno il fenomeno.

Tra i possibili modelli matematici, noi essenzialmente ci riferiremo a quelli retti da equazioni alle differenze finite o integro differenziali.

Indicato con $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ il vettore di \mathbb{R}^n che rappresenta lo *stato* del fenomeno e con $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}(t_i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) le sue determinazioni lungo una successione $\{t_i\}$, un modello matematico si dice retto da *equazioni alle differenze finite* se è richiesto che

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{F}(\mathbf{x}_i, i) \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

con \mathbf{F} funzione vettoriale (ad n componenti) assegnata, definita in un sottoinsieme di \mathbb{R}^{n+1} ed a valori in \mathbb{R}^n . Ad esempio nel caso di un fenomeno rappresentato con un unico parametro scalare x , posto $x_n = x(t_n)$, l'equazione

$$x_n = f(x_{n-1}) \quad n = 1, 2, \dots$$

con f funzione scalare assegnata, costituisce un modello retto da un'equazione alle differenze finite. Analogamente se il fenomeno in studio è rappresentato da due parametri scalari x e y , posto $\{x_n = x(t_n), y_n = y(t_n)\}$, il sistema

$$\begin{cases} x_n = f(x_{n-1}, y_{n-1}) \\ y_n = g(x_{n-1}, y_{n-1}) \end{cases}$$

con f e g funzioni assegnate, costituisce un modello retto da equazioni alle differenze finite. E così via nel caso generale.

Un modello matematico si dice retto da *equazioni differenziali (ordinarie)* se il vettore stato \mathbf{x} deve verificare un'equazione del tipo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}[t, \mathbf{x}(t)] \quad (1.2)$$

con \mathbf{F} funzione assegnata definita in un sottoinsieme di \mathbb{R}^{n+1} ed a valori in \mathbb{R}^n .

Infine un modello dicesi integro-differenziale se è del tipo

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}[t, \mathbf{x}(t)] + \int_0^t \mathbf{G}[t, \tau, \mathbf{x}(\tau)] d\tau \quad (1.3)$$

con \mathbf{F} e \mathbf{G} funzioni assegnate.

Le funzioni \mathbf{F} e \mathbf{G} che compaiono in (4.1)-(4.3) diconsi *funzioni costitutive* e le equazioni (4.1)-(4.3) diconsi anche *equazioni di bilancio*. La scelta del tipo di *equazione di bilancio* con cui rappresentare il fenomeno e delle *funzioni costitutive* da associare ad esse costituiscono la traduzione in termini matematici delle ipotesi formulate dallo studioso che propone il modello. Naturalmente le funzioni \mathbf{F} e \mathbf{G} devono "rispecchiare" quanto più è possibile le proprietà emerse nella Fase I. Ad esempio se nella Fase I è emerso che la prima componente x_1 di $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ è una funzione decrescente di t , affinché il modello (due) sia accettabile è necessario che la prima componente F_1 di \mathbf{F} sia negativa.

Formulato il modello si passa al suo studio e in particolare alla determinazione

- a) di *soluzioni costanti nel tempo (stati di equilibrio)*;
- b) di *soluzioni periodiche nel tempo (ripetibilità ad intervalli di tempo costanti delle caratteristiche del fenomeno)*;
- c) dell'*andamento asintotico nel tempo delle soluzioni*.

Osservazione 1. Naturalmente i modelli differenziali possono coinvolgere anche le derivate temporali di ordine superiore del vettore stato. È ben noto però che ogni equazione differenziale

di ordine superiore al primo e di forma normale

$$\frac{d^p \mathbf{x}}{dt^p} = \mathbf{F} \left[t, \mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \dots, \frac{d^{p-1}\mathbf{x}}{dt^{p-1}} \right] \quad p \in \mathbb{N}^+$$

si riconduce ad una equazione del tipo (4.2). Ad esempio per $p = 2$ posto $\underline{\xi}(t) = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, l'equazione di forma normale del secondo ordine

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \mathbf{F} \left[t, \mathbf{x}(t), \frac{d\mathbf{x}}{dt} \right]$$

da luogo al sistema

$$\begin{cases} \frac{d\underline{\xi}}{dt} = \mathbf{F} [t, \mathbf{x}(t), \underline{\xi}] \\ \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \underline{\xi}(t) \end{cases}$$

onde introdotti i vettori a $2n$ componenti \mathbf{X} ed \mathbf{F}^* con $\mathbf{X} = (\xi_1, \dots, \xi_n, x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{F}^* = (F_1, \dots, F_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$

si ha

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{F}^*$$

Osservazione 2. Nelle (4.1)-(4.3) \mathbf{x} può anche rappresentare la probabilità che il fenomeno occupi un certo stato (x_1, \dots, x_n) . In tal caso le (4.1)-(4.3) diventano *equazioni stocastiche* rispettivamente alle differenze finite, differenziali ed integro-differenziali.

Osservazione 3. In generale si chiama equazione vettoriale alle differenze finite una equazione della forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}_{i+k}, \mathbf{X}_{i+k-1}, \dots, \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_{i-1}, \dots, \mathbf{X}_{i-m}, i) = \mathbf{0}$$

con \mathbf{F} definita in \mathbb{R}^{k+m+2} , con $k > 0$, $0 < m \leq i$. La differenza $k + m$ tra l'indice più grande $i + k$ e quello più piccolo $i - m$ dicesi *ordine* dell'equazione.

1.4 Fase III: validazione del modello

La terza fase costituisce la prova del fuoco del modello. Essa infatti prevede il confronto tra il comportamento del vettore stato del fenomeno previsto dal modello matematico ed i dati sperimentali.

Da tale confronto possono emergere situazioni diverse ed in particolare

- 1) solo sporadici dati forniti dal modello sono in accordo con quelli osservati sperimentalmente;
- 2) i dati forniti dal modello sono in notevole parte in accordo con quelli osservati sperimentalmente;
- 3) vi è accordo tra i dati forniti dal modello e quelli sperimentali.

Nel caso 1) il modello va rigettato. Nel caso 2) il modello può essere accettato, precisando però i limiti della sua validità in relazione all'accordo con i dati sperimentali.

L'ultimo caso rappresenta la validazione completa del modello. Anzi in tal caso si può indirizzare la Fase I alla ricerca di prove sperimentali di comportamento previsti dal modello ma non ancora rilevati sperimentalmente.

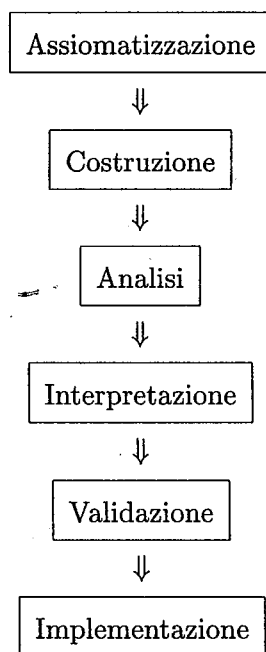
Nella storia del progresso delle conoscenze scientifiche non mancano esempi di grandissimi pensatori e scienziati che sono incorsi in "incidenti di percorso" del tipo 1). Ad esempio il modello di "inerzia" previsto da Aristotele secondo il quale in assenza di forze non vi può essere moto, è completamente falso.

Per quanto riguarda il caso 2) ricordiamo che - come del resto già accennato nella nota 1 dell'introduzione - il modello newtoniano della Meccanica - fino a che non si considerano velocità confrontabili con quella della luce - dá risultati in ottimo accordo con i dati sperimentali, anzi nell'ambito di tale validità essa ha consentito di prevedere fenomeni non ancora rilevati sperimentalmente. Famoso è il caso del pianeta Nettuno. L'inglese J.C. Adams (1819-92) ed il francese J.J. Le Verrier (1811-77) analizzando le perturbazioni dell'orbita di Urano - indipendentemente - osservarono che la loro origine - nell'ambito della Meccanica newtoniana - si spiegava ipotizzando la esistenza di un pianeta non ancora osservato sperimentalmente, in "prossimità" di Urano. Sulla base di tale previsione, nel 1846 l'astronomo tedesco J.G. Galle riuscí a scoprire Nettuno.

Osservazione 4. Come già accenato al §1 abbiamo raggruppato in tre sole fasi lo studio di un fenomeno e di un suo modello matematico. In effetti si possono distinguere, in successione, le seguenti fasi:

Identificazione





- 1) *Identificazione*. In questa prima fase si precisa e delimita il fenomeno e si raccolgono i dati che lo riguardano.
- 2) *Assiomatizzazione*. Si analizzano i dati, si selezionano i fattori (parametri) che si ritengono importanti e quelli che si possono trascurare e si formulano gli assiomi, piú realistici possibili, da porre a fondamento del fenomeno.
- 3) *Costruzione*. Si trasferisce, in relazioni matematiche astratte (equazioni e disequazioni), quanto è emerso nella fase 2, identificando i fattori importanti con i parametri x_i che definiscono lo stato del fenomeno.
- 4) *Analisi*. Consiste nella risoluzione del modello matematico ottenuto nella fase 3 in modo che i parametri di stato x_i siano espressi in funzione di quantità note e si effettuano stime delle costanti costitutive presenti.
- 5) *Interpretazione*. Si esamina se la soluzione fornita dal modello matematico è consistente con il fenomeno. Se non lo è, il modello va modificato.
- 6) *Validazione*. Superata la fase precedente, si confrontano i dati sperimentali con quelli forniti dalla soluzione del modello matematico. In assenza di sufficiente accordo, il modello va

rigettato e modificato.

- 7) *Implementazione.* Verificato un soddisfacente accordo tra i dati sperimentali disponibili e quelli forniti dalla soluzione del modello, il modello può essere adoperato per effettuare previsioni sulla futura evoluzione del fenomeno.

1.5 Metodo dei minimi quadrati per una successione di dati

Sia \mathcal{F} un fenomeno il cui vettore stato abbia un unico componente x e siano x_i i dati osservati relativi ad una successione di istanti $\{t_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Esaminiamo il problema di determinare una funzione $x^*(t) \in C[t_1, t_2]$ tale che il *divario* $S = \sum_{i=1}^n (x_i - x_i^*)^2$ tra la successione dei dati osservati x_i e quella dei valori

$$x_i^* = x_i^*(t_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1.4)$$

sia minimo. Naturalmente in $C[t_1, t_2]$ esistono infinite funzioni tali che $S = 0$. Il problema si pone dunque per le funzioni x^* tali che $x^*(t_i) \neq x_i$ almeno per alcuni valori di i .

Il *metodo dei minimi quadrati* per la selezione di x^* consiste - nella sua formulazione elementare - nel ricercare x^* nella classe delle funzioni lineari

$$x^* = k_0 + k_1 t \quad (1.5)$$

scegliendo le costanti k_0 e k_1 in modo che *sia minima la somma S dei quadrati degli errori* che si commettono sostituendo i valori osservati x_i con i valori $x^*(t_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$) calcolati tramite le (1.5).

Indicato con $\delta_i = x_i - x_i^*$ l'errore che si commette quando si sostituisce x_i con $x^*(t_i)$, si ha

$$\begin{aligned} S = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 &= \sum_{i=1}^n (x_i - k_0 - k_1 t_i)^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2 + n k_0^2 + k_1^2 \sum_{i=1}^n t_i^2 \\ &\quad - 2k_0 \sum_{i=1}^n x_i - 2k_1 \sum_{i=1}^n x_i t_i + 2k_0 k_1 \sum_{i=1}^n t_i. \end{aligned}$$

Ricordiamo che per il minimo è sufficiente che

- 1) le derivate prime $\frac{\partial S}{\partial k_0}$, $\frac{\partial S}{\partial k_1}$ siano entrambe nulle;

2) i minori principali della matrice Hessiana

$$(\) \frac{\partial^2 S}{\partial k_0^2} \frac{\partial^2 S}{\partial k_0 \partial k_1} \frac{\partial^2 S}{\partial k_1 \partial k_0} \frac{\partial^2 S}{\partial k_1^2}$$

siano entrambi positivi.

La 1) richiede

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial k_0} = 2nk_0 - 2\sum_{i=1}^n x_i + 2k_1 \sum_{i=1}^n t_i = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial k_1} = 2k_1 \sum_{i=1}^n t_i^2 - 2\sum_{i=1}^n x_i t_i + 2k_0 \sum_{i=1}^n t_i = 0 \end{cases}$$

cioé

$$\begin{cases} nk_0 + k_1 \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n x_i \\ k_0 \sum_{i=1}^n t_i + k_1 \sum_{i=1}^n t_i^2 = \sum_{i=1}^n x_i t_i \end{cases}$$

da cui per

$$\mathcal{D} = n \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2 \neq 0$$

si ha

$$\begin{cases} k_0 = \frac{\left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i t_i \right)}{\mathcal{D}} \\ k_1 = \frac{n \left(\sum_{i=1}^n x_i t_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)}{\mathcal{D}} \end{cases} \quad (1.6)$$

Si verifica agevolmente che i valori (1.6) per k_0 e k_1 rendono effettivamente minimo S . L'Hessiano di S è infatti

$$4(n) \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n t_i \sum_{i=1}^n t_i^2 \quad n = 1, 2, \dots$$

onde resta da provare che

$$n \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2 > 0. \quad (1.7)$$

Per $n = 2$ si ha

$$2(t_1^2 + t_2^2) - (t_1^2 + t_2^2 + 2t_1 t_2) = (t_1 - t_2)^2 > 0 \quad \text{per } t_1 \neq t_2.$$

Per il principio di induzione, basta provare che se la (1.7) è vera per n , essa è vera anche per $n+1$. Si ha

$$\begin{aligned}
 (n+1) \sum_{i=1}^{n+1} t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n+1} t_i \right)^2 &= (n+1) \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 + t_{n+1}^2 \right) - \left[\left(\sum_{i=1}^n t_i \right) + t_{n+1} \right]^2 = \\
 &= (n+1) \sum_{i=1}^n t_i^2 + (n+1) t_{n+1}^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2 - t_{n+1}^2 - 2t_{n+1} \sum_{i=1}^n t_i = \\
 &= \left[n \sum_{i=1}^n t_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right)^2 \right] + \sum_{i=1}^n t_i^2 + (n+1) t_{n+1}^2 - t_{n+1}^2 - 2t_{n+1} \sum_{i=1}^n t_i \\
 &> \sum_{i=1}^n t_i^2 + n t_{n+1}^2 - 2t_{n+1} \sum_{i=1}^n t_i = \sum_{i=1}^n (t_i - t_{n+1})^2 > 0
 \end{aligned}$$

È da rilevare che ci si riconduce al caso precedente anche quando - essendo i dati osservati x_i positivi e nettamente crescenti lungo la successione $\{t_i\}$ - appare più naturale scegliere x^* nella classe delle *funzioni esponenziali*

$$x^* = k_0 e^{k_1 t}. \quad (1.8)$$

Ciò dipende dal fatto che la crescita esponenziale, nella *scala logaritmica*, diventa lineare. Allora posto

$$\begin{cases} \xi^* = \log x^* = k_0^* + k_1 t \\ k_0^* = \log k_0 \end{cases} \quad (1.9)$$

e calcolando i logaritmi $\xi_i = \log x_i$ dei dati osservati, si ritorna al caso precedente con la sostituzione

$$(k)_0^* \xi^* \xi_i k_0 x^* x_i$$

e si ha

$$\begin{cases} k_0^* = \frac{1}{D} \left[\left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \xi_i t_i \right) \right] \\ k_1 = \frac{1}{D} \left[n \left(\sum_{i=1}^n \xi_i t_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n t_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \xi_i \right) \right] \\ k_0 = e^{k_0^*} \end{cases} \quad (1.10)$$

Il metodo dei minimi quadrati si può naturalmente generalizzare al caso che la funzione lineare (4.5) sia sostituita da un polinomio in t di grado > 1 .

Ad esempio nel caso

$$x^* = k_0 + k_1 t + k_2 t^2$$

si ha

$$S = \sum_{i=1}^n (x_i - k_0 - k_1 t_i - k_2 t_i^2)^2$$

e quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S}{\partial k_0} = 2nk_0 - 2 \sum_{i=1}^n x_i + 2k_1 \sum_{i=1}^n t_i + 2k_2 \sum_{i=1}^n t_i^2 = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial k_1} = 2k_0 \sum_{i=1}^n t_i - 2 \sum_{i=1}^n x_i t_i + 2k_1 \sum_{i=1}^n t_i^2 + 2k_2 \sum_{i=1}^n t_i^3 = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial k_2} = 2k_0 \sum_{i=1}^n t_i^2 - 2 \sum_{i=1}^n x_i t_i^2 + 2k_1 \sum_{i=1}^n t_i^3 + 2k_2 \sum_{i=1}^n t_i^4 = 0 \end{array} \right.$$

da cui si ricavano le k_i ($i = 0, 1, 2$).

1.6 Alcuni modelli di crescita biologica. Modello di Malthus

Come prime applicazioni, introdurremo i modelli di crescita biologica che temporalmente sono stati introdotti per primi. Quantunque abbastanza elementari, essi hanno costituito poi il fondamento per la costruzione di modelli più evoluti e sono:

- 1) modello di Malthus (1798);
- 2) modello di Gompertz (1825);
- 3) modello di Verhulst (1838).

Iniziamo col modello di Malthus introdotto per studiare la crescita di una popolazione. In accordo con la metodologia precisata nei numeri precedenti, riporteremo i dati di crescita osservati di una determinata popolazione. Precisamente considereremo i dati di crescita della popolazione della

California dal 1860 al 1990, come riportati nell'Almanacco Universale 1990 di Andrews e Mc Keel.

Il fenomeno \mathcal{F} in esame è dunque quello della crescita della popolazione della California, senza distinzione di sesso o di altro genere, pertanto lo stato di \mathcal{F} è rappresentato dal numero totale x di abitanti, numero che misureremo in milioni mentre il tempo sarà misurato in anni.

Tabella 2 - Popolazione della California dal 1860 al 1990

Anno	x in milioni	Anno	x in milioni	Anno	x in milioni
1860	0,380	1910	2,738	1960	15,717
1870	0,560	1920	3,427	1970	19,971
1880	0,865	1930	5,677	1980	23,668
1890	1,214	1940	6,907	1990	29,126
1900	1,485	1950	10,586		

Dalla tabella 2 appare chiaramente che x è una funzione crescente del tempo e che - da un decennio all'altro - l'incremento cresce con la crescita della popolazione. Seguendo Malthus, assumiamo che l'incremento sia proporzionale alla popolazione. Si ottiene così il modello matematico

$$\frac{dx}{dt} = ax \quad (1.11)$$

con $a = \text{cost.} > 0$. Poiché $\frac{1}{x} \frac{dx}{dt}$ chiamasi *tasso unitario di crescita*, il modello di Malthus consiste nell'assumere che tale tasso sia costante¹. Integrando si ha

$$x(t) = x_0 e^{at} \quad (1.12)$$

ove x_0 è il valore iniziale di x .

È da osservare subito che la (4.8) implica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = +\infty. \quad (1.13)$$

¹In (4.7) si richiede che la popolazione x sia una funzione di classe C^1 del tempo, quantunque in realtà, essa cresce secondo numeri interi. Il tasso a rappresenta la differenza tra i nati e i morti all'istante t ed esso è una caratteristica della popolazione in esame cioè è una *costante costitutiva*.

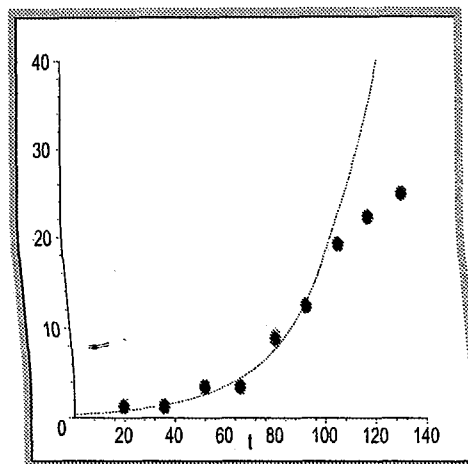


Figura 1.1: t = tempo calcolato in anni, x = popolazione calcolata in milioni. I cerchietti pieni indicano i dati osservati; la curva continua rappresenta la crescita esponenziale. Inizio dei tempi: anno 1860.

Passiamo ora alla *validazione* della (4.8). A tale scopo nel piano (t, x) , assumendo come origine dei tempi l'anno 1860 e come origine delle ascisse 0.380 milioni, consideriamo i punti $P_i = (t_i, x_i)$ ($i = 1, \dots, 14$) individuati dalla tabella 2 (figura 1)

Dalla tabella 2 e dalle figure 1-2 si evince chiaramente che - a partire dal 1960 - la crescita non appare piú esponenziale. Infatti nel decennio 1960 - 1970 l'incremento è di 2.154.000 contro i 5.131.000 del decennio precedente. Passiamo ora a determinare i valori di x_0 ed a che consentano alla legge (4.8) di rappresentare al meglio la crescita nel secolo 1860 - 1960.

Applicando il metodo dei minimi quadrati ai primi 11 dati della tabella, secondo le (4.6) con $k_0 = x_0$, $a = k_1$, si ha

$$\begin{cases} a = 0,0368 \\ x_0 = 0,390. \end{cases} \quad (1.14)$$

Le curve continue riportate nelle figure 1 e 2 sono i diagrammi della (4.8) in scala normale ed in scala logaritmica rispettivamente, con a ed x_0 dati da (4.10). Si noti che c'è un accordo quasi perfetto tra i dati osservati e quelli provenienti dal modello secondo le (4.9). Lo scarto tra i valori iniziali è di 10.000 e quello tra i valori finali (anno 1960) è di 255.000: infatti (4.7)-(4.9) si ha $x(100) = 15,462$ milioni.

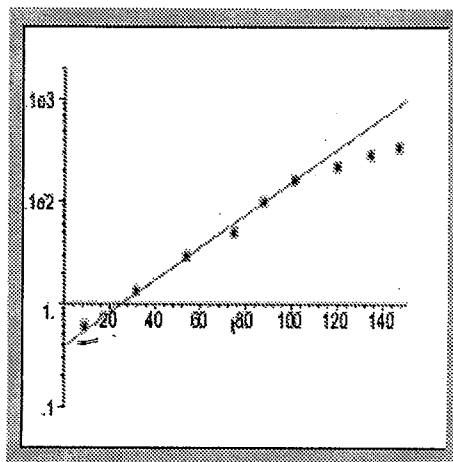


Figura 1.2: t = tempo calcolato in anni, x = logaritmo della popolazione calcolata in milioni. I cerchietti pieni rappresentano i logaritmi dei dati osservati; la curva continua è la retta logaritmo dell'esponenziale. Inizio dei tempi: anno 1860.

In conclusione: *il modello di Malthus può rappresentare la crescita biologica solo in un intervallo limitato di tempo*. Che la conseguenza (4.9) fosse inaccettabile, era facilmente intuibile. Basti pensare, ad esempio, ad una popolazione biologica che vive in un lago: tutt'al più può riempire l'intero lago e certo non diventare infinita. In altri termini alla base del modello malthusiano vi è l'ipotesi che la popolazione abbia a disposizione risorse (cibo e spazio) illimitate.

1.7 Modello di Gompertz

Nel modello di Gompertz si elimina il paradosso (4.9) assumendo che il tasso unitario di crescita decresca col tempo esponenzialmente. In tal modo si tiene conto delle difficoltà ambientali che si vengono a creare al crescere della popolazione (mancanza di cibo e di spazio). Si ottiene così il modello

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax \\ a = a_0 e^{-kt} \end{cases} \iff \frac{dx}{dt} = a_0 e^{-kt} x \quad (1.15)$$

con a_0 e k costanti positive. Indicato con $x_0 = x(0)$ il valore iniziale, integrando la (4.11) si ha

immediatamente ²

$$x = x_0 \exp \left[\frac{a_0}{k} (1 - e^{-kt}) \right]. \quad (1.16)$$

È da rilevare subito che la (4.12) implica

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_0 e^{a_0/k} \quad (1.17)$$

Eliminando così il paradosso (4.9). Introdotta la *meta asintotica*

$$x_\infty = x_0 e^{a_0/k}, \quad (1.18)$$

la (4.12) si può scrivere

$$x = x_\infty \exp \left(-\frac{a_0}{k} e^{-kt} \right) \quad (1.19)$$

e da qui - passando ai logaritmi -

$$\frac{a_0}{k} e^{-kt} = \log \frac{x_\infty}{x}. \quad \Rightarrow a_0 e^{-kt} = k \left(\log \frac{x_\infty}{x} \right) \quad (1.20)$$

La (4.11) - per effetto della (4.16) - diventa

$$\frac{dx}{dt} = kx (\log x_\infty - \log x) \quad (1.21)$$

che è equivalente alla (4.11) ed è una forma in cui spesso si scrive il modello di Gompertz tramite

la meta asintotica x_∞ .

A differenza di quanto avviene nella esponenziale, la curva (4.12) presenta un punto di flesso.

Infatti derivando la (4.11) segue agevolmente

$$\frac{d^2x}{dt^2} = a_0 e^{-kt} (-k + a_0 e^{-kt}) x$$

$$e^{-kt} = \frac{k}{a_0}$$

onde

$$\bar{t} = \frac{1}{k} \log \frac{a_0}{k} \Rightarrow \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)_{t=\bar{t}} = 0 \quad (1.22)$$

e la (4.15) per $\frac{a_0}{k} = e^{k\bar{t}}$ implica

$$x(\bar{t}) = \frac{x_\infty}{e} < \frac{x_\infty}{2} \quad (1.23)$$

²È da notare che mentre la (4.10) per $k = 0$ si riduce alla (4.7), la (4.12) per $k = 0$ non ha senso. Ma essendo

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} (1 - e^{-kt}) = \lim_{k \rightarrow 0} \left[t - \frac{kt^2}{2!} + \frac{kt^3}{3!} + \dots + \frac{k^{n-1}t^n}{n!} \right] = t$$

la (4.8) si recupera come limite della (4.12) per $k \rightarrow 0$.

Il modello di Gompertz, pur essendo molto antico (1825), ha visto anche abbastanza recentemente diverse applicazioni soprattutto nei fenomeni di crescita biologica. Noi ora ricorderemo qui la crescita dell'area del fogliame di una pianta e la crescita dei tumori nei topi, ratti e conigli.

a) Crescita dell'area totale del fogliame di una pianta

La tabella 3 contiene i dati osservati (ad esempio misurando l'ombra proiettata a terra quando il sole è a perpendicolo) per la crescita del fogliame di una pianta. Partendo dai dati sperimentali ed adoperando il modello di Gompertz nella forma (4.17) ma alle differenze finite

$$\frac{1}{x} \frac{\Delta x}{\Delta t} = k \log x_{\infty} - k \log x$$

si ricavano col metodo dei minimi quadrati \bar{x} e k , trovando $x_{\infty} = 256.8$; $k = 0.02745$. Successivamente dalla (4.16) si ricava a_0 per ogni valore della coppia (t, x) dei dati sperimentali. Si ottiene il valore medio $a_0 = 0.0882$. Altri valori di a_0 e k si ottengono dalla (4.16) scritta nella forma

$$\log z = \log \frac{a_0}{k} - kt \quad z = \log \frac{x_{\infty}}{x}.$$

Si trova $a_0 = 0.0890$; $k = 0.02930$. Facendo la media con quelli già trovati segue $a_0 = 0.0886$; $k = 0.0284$.

Resta da determinare x_0 e per ciò ci si serve della (4.14): si trova $x_0 = 11.3$. Nella figura 3 vi è il confronto tra i valori sperimentali e quelli calcolati per la crescita dell'area totale del fogliame di una pianta.

Tabella 3 - Crescita dell'area totale delle foglie di una pianta.

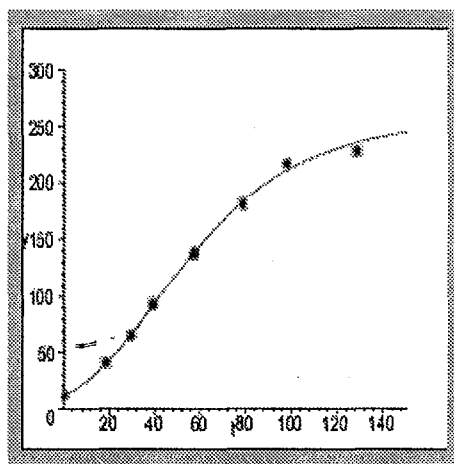


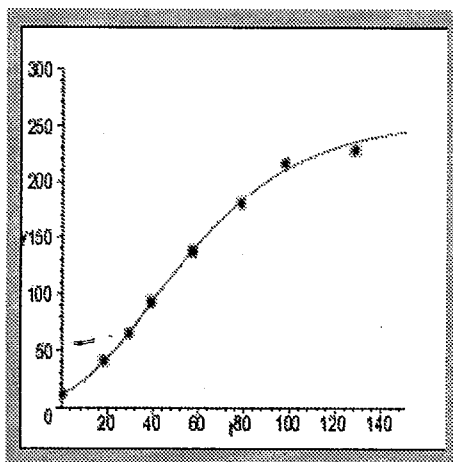
Figura 1.3: I cerchietti rappresentano i dati osservati, la curva continua è quella prevista dal modello di Gompertz.

Tempo in giorni	x in cm^2
0	9.0
20	39.7
40	92.5
60	142.7
80	186.6
100	209.7
120	230.5
140	235.4

b) Crescita dei tumori primari nei topi, ratti e conigli

A.K. Laird in un lavoro del 1965³ ha studiato la crescita dei tumori primari nei topi, ratti e conigli, confrontando i dati osservati con quelli della curva di diffusione di Gompertz. I casi considerati (19), prendono in esame differenti tipi di tumori (12). x rappresenta la grandezza del tumore, in grammi o in numero di cellule ed il tempo t è misurato in ore o

³"Dynamics of tumor growth: comparison of growth rates and extrapolation of growth curve to one cell", British Journal of Cancer, 19, 278-291



giorni. Per ogni tumore è stato calcolato x_∞ , cioè il valore asintotico di x . Nella figura 4 è riportata la curva continua di Gompertz nel rapporto adimensionale x/x_∞ quando l'origine del tempo (reso anch'esso adimensionale tramite un tempo τ di confronto) viene fissata nel punto di flesso. I puntini servono a rappresentare i dati sperimentali.

1.8 Modello logistico

Nel modello di Verhulst si elimina il paradosso (4.9) assumendo che il tasso di crescita decresca col tempo al crescere della popolazione secondo la legge

$$a = a_0 - g(t)x^k \quad (1.24)$$

con a_0 e k costanti positive e $g(t)$ funzione non negativa.

Il prodotto $g(t)x^k$ rappresenta l'azione frenante che si sviluppa al crescere della popolazione dovuta all'influenza dell'ambiente $g(t)$ (diminuzione delle risorse) ed alle interazioni x^k tra gli individui. Nel caso $k = 1$ si ha il problema di Cauchy per un'equazione di Bernoulli:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = [a_0 - g(t)x]x \\ x(0) = x_0. \end{cases} \quad (1.25)$$

Posto

$$z = \frac{1}{x} \quad (1.26)$$

segue

$$\frac{dz}{dt} + a_0 z = g(t)$$

e quindi

$$\frac{d}{dt}(e^{a_0 t} z) = g(t) e^{a_0 t} \quad (1.27)$$

da cui

$$z = z_0 e^{-a_0 t} + e^{-a_0 t} \int_0^t e^{a_0 \tau} g(\tau) d\tau$$

e, ritornando alla x

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x_0} e^{-a_0 t} + e^{-a_0 t} \int_0^t e^{a_0 \tau} g(\tau) d\tau. \quad (1.28)$$

Nel caso

$$g(t) = b = \text{cost.} > 0 \quad (1.29)$$

la (1.25) diventa

$$\frac{dx}{dt} = (a_0 - bx)x \quad (1.30)$$

prende il nome di *equazione logistica*.

Dalla (1.28) segue allora agevolmente la soluzione nel caso logistico:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{x^*} + \left(\frac{1}{x_0} - \frac{1}{x^*} \right) e^{-a_0 t} \quad (1.31)$$

$$x^* = \frac{a_0}{b} \quad (1.32)$$

e quindi

$$x = \frac{x^*}{1 + \left(\frac{x^*}{x_0} - 1 \right) e^{-a_0 t}}. \quad (1.33)$$

Da (1.33) segue

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x^* < \infty. \quad (1.34)$$

La costante x^* è la cosiddetta *capacità portante* (carrying capacity) e rappresenta il livello massimo cui può arrivare una popolazione partendo da un livello $x_0 < x^*$, e passando a livelli sempre

maggiore: x^* nel modello logistico rappresenta il limite massimo sopportabile dall'ambiente. In-
fatti, per $x_0 > x^*$, x decresce nel tempo esponenzialmente fino ad x^* .

Posto

$$m = \frac{x^*}{x_0} - 1 \tag{1.35}$$

la (1.33) diventa

$$x = \frac{x^*}{1 + me^{-a_0 t}} \tag{1.36}$$

da cui, agevolmente, si ha

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_0 m x^* \frac{e^{-a_0 t}}{(1 + me^{-a_0 t})^2} \\ \frac{d^2 x}{dt^2} = a_0^2 m x^* \frac{e^{-a_0 t} (me^{-a_0 t} - 1)}{(1 + me^{-a_0 t})^3} \end{cases} \tag{1.37}$$

La (1.37)₂ mostra che per $t = \bar{t}$ con

$$\bar{t} = \frac{1}{a_0} \log m \tag{1.38}$$

il grafico della funzione x ha un punto di flesso in $[\bar{t}, \bar{x} = x(\bar{t}) = \frac{x^*}{2}]$ ed è ivi attraversato dalla tangente.

È chiaro che $x(0) = x^* \rightarrow x(t) = x^*, \forall t > 0$.

Nella figura 5 è rappresentato il grafico della logistica per ($a_0 = 10, x^* = 100$), in corrispondenza ai dati iniziali $x_0 = 10$ ed $x_0 = 200$. Nel caso $x_0 = 10$, si ha $m = 9$ ed il punto di flesso ha le coordinate ($\bar{t} = 2.197, \bar{x} = 50$): per $t < 2.197$ la curva volge la concavità verso l'alto, mentre per $t > 2.197$ volge la concavità verso il basso. Per la somiglianza di tale curva ad una S (inclinata),

si dice brevemente che la logistica è rappresentata da una curva ad S.

Figura 5 - Curva logistica per $x^* = 100$, $a_0 = 10$ e $x_0 = 10$, $x_0 = 200$. Nel caso $x_0 = 10$, il punto di flesso ha le coordinate $(\bar{t} = 2.197, \bar{x} = 50)$.

Esistono numerosi esempi di applicazioni della logistica per la crescita di popolazioni. Nella figure 6.1, 6.2, 6.3, 6.4 e 6.5 sono riportati i dati sperimentali riguardanti i seguenti casi:

- a) Crescita del battere escherichia coli (figura 6.1);
- b) Crescita del protozoo paramecium caudatum (figura 6.2);
- c) Crescita di una popolazione di tortore (figura 6.3);
- d) Crescita di una popolazione di api (figura 6.4);
- e) Crescita della popolazione U.S.A. (figura 6.5).

Va precisato che i puntini rappresentano i dati sperimentali, mentre la curva continua è la previsione logistica. Dal confronto emerge che il modello logistico è idoneo a descrivere la crescita di popolazioni costituite da organismi semplici (in particolare, di microrganismi) ma non è idoneo a descrivere la crescita di organismi complessi. Ad esempio nel caso e) le sue previsioni sono in accordo con i dati del censimento della popolazione U.S.A. solo fino al 1940, sottovalutandone poi la crescita dopo tale data.

Indice delle Figure

1.1	t = tempo calcolato in anni, x = popolazione calcolata in milioni. I cerchietti pieni indicano i dati osservati; la curva continua rappresenta la crescita esponenziale. Inizio dei tempi: anno 1860.	18
1.2	t = tempo calcolato in anni, x = logaritmo della popolazione calcolata in milioni. I cerchietti pieni rappresentano i logaritmi dei dati osservati; la curva continua è la retta logaritmo dell'esponenziale. Inizio dei tempi: anno 1860.	19
1.3	I cerchietti rappresentano i dati osservati, la curva continua è quella prevista dal modello di Gompertz.	22