

Numerazioni di Rogers

Rif.: Rogers, H. Jr.: J. of Symbolic Logic **23** (1958), 331;

Rogers, H. Jr., *Theory of Recursive Functions . . .*, Es. 2.10, p. 41.

Ci limitiamo alle funzioni di una sola variabile senza perdita di generalità.

La funzione parziale ricorsiva (di due variabili):

$$\psi(z, x) \simeq U(\min_y(T(z, x, y)))$$

[Teorema della forma normale] si dice universale per le funzioni di una variabile perché:

$$\psi(z, x) \simeq \begin{cases} \Psi_Z(x) & \text{se } z = gn(Z) \\ \text{indefinita} & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

La macchina P tale che

$$\Psi_P^{(2)}(z, x) \simeq \psi(z, x)$$

può essere considerato come un calcolatore universale programmabile.

In base a questi fatti si dice che le funzioni parziali ricorsive (PRF) sono *effettivamente* numerabili perché la ψ istituisce una corrispondenza tra i naturali e le PRF. È universalmente accettata la notazione:

$$\psi(z, x) \simeq \phi_z(x)$$

La corrispondenza utilizzata nel Davis non è però del tutto soddisfacente perché:

- i. ad ogni macchina di Turing corrispondono più indici a causa dei diversi possibili ordinamenti delle quadruple;
- ii. ai numeri per i quali $\neg TM(z)$ non corrisponde alcuna macchina e quindi la funzione ovunque non definita risulta individuata “accidentalmente”, oltre che in relazione alle macchine che non si fermano per nessun ingresso.

Si consideri allora il predicato:

$$TMm(t) \text{ sse } TM(t) \ \& \ \neg \exists^{t-1} w \forall u [Term(u, w) \Leftrightarrow Term(u, t)].$$

$TMm(t)$ è vero sse $t = gn(T)$ ed è il più piccolo gn degli $\mathcal{L}(t)!$ ordinamenti delle quadruple di T. Consideriamo l'insieme GNU = $\{t | TMm(t)\}$. L'insieme GNU è ricorsivo e contiene esattamente un numero per ciascuna macchina di Turing. Sia f una funzione ricorsiva che lo numeri monotonicamente. Allora

$$\phi_z(x) \simeq U(\min_y(T(f(z), x, y)))$$

è una numerazione che preserva la biunivocità tra indici e macchine (e continuiamo a indicarla con il consueto simbolo ϕ_z). Naturalmente per ogni funzione PRF esisteranno sempre infiniti indici distinti perché esistono infinite macchine distinte per la medesima funzione.

Più in generale si intende per numerazione delle PRF una applicazione:

$$\pi : D_\pi \xrightarrow{\text{su}} \text{PRF}$$

con D_π un insieme numerico ricorsivo. Generalmente, per quanto detto sopra, si assume $D_\pi = \mathbb{N}$ senza perdita di generalità.

Una numerazione π è minore di un'altra ρ , e si scrive $\pi \leq \rho$, se esiste una funzione parziale ricorsiva g tale che

$$\pi = \rho \frown g.$$

Si dice che una numerazione è direttamente effettiva se esiste una procedura effettiva uniforme associata alla numerazione che fornisca un algoritmo dato un indice. Simmetricamente una procedura è detta inversamente effettiva se dato un algoritmo per una funzione è possibile ottenerne effettivamente e uniformemente un indice.

È facile convincersi che la numerazione da noi adottata è direttamente e inversamente effettiva. Sarà denotata da 'St' (numerazione standard).

Teorema 1. Sia $\pi \leq \rho$. Allora 1. se ρ è direttamente effettiva anche π lo è; 2. se π è inversamente effettiva anche ρ lo è.

Dim. 1. Dato i come π -indice, calcolare $g(i)$ ed usare ρ per ottenere effettivamente un algoritmo per $\pi(i)$. 2. dato un algoritmo calcolarne un π -indice; allora $g(i)$ è un ρ -indice della funzione calcolata dall'algoritmo dato.

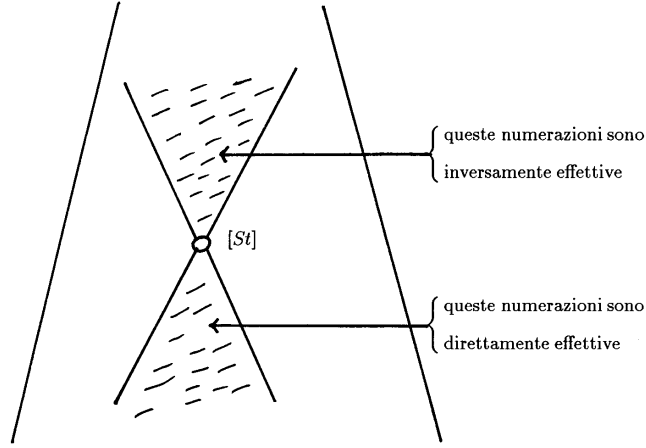
La relazione ora introdotta è riflessiva e transitiva (se $\pi \leq \rho$ e $\rho \leq \tau$ allora $\pi = \rho \frown g$ e $\rho = \tau \frown h$, quindi $\pi = \tau \frown hg$).

Si definisce $\pi \equiv \rho$ se $\pi \leq \rho$ & $\rho \leq \pi$. \equiv è una relazione di equivalenza. Consideriamo le sue classi di equivalenza e definiamo un ordine parziale su di esse, ancora denotato da ' \leq ', nel modo naturale:

$$[\pi] \leq [\rho] \text{ se } \exists \sigma \in [\pi] \exists \tau \in [\rho] : \sigma \leq \tau.$$

Controllare che \leq è riflessiva, antisimmetrica e transitiva.

In termini di questo ordine parziale è interessante considerare gli insiemi di classi di numerazioni maggiori e minori di [St].



Vedremo che non vi sono altre numerazioni direttamente o inversamente effettive al di fuori delle aree tratteggiate.

Formalizziamo la nozione “direttamente effettivo”. Diciamo che una numerazione π ha funzione universale effettiva (ossia in π vale un teorema della macchina universale o di forma normale) se esiste una funzione parziale ricorsiva Φ_π tale che:

$$\forall x \forall i \in D_\pi : \Phi_\pi(i, x) \simeq [\pi(i)](x).$$

La Tesi di Church permette di identificare il concetto “direttamente effettivo” con la proprietà di possedere una funzione universale effettiva.

Teorema 2. π ha funzione universale effettiva (è direttamente effettiva) sse $[\pi] \leq [St]$.

Dim. \Leftarrow Sia $\pi = St \frown g$. Definiamo $\Phi_\pi(i, x) \simeq \Phi_{St}(g(i), x)$. Chiaramente Φ_π è parziale ricorsiva e $\Phi_\pi(i, x) \simeq [\pi(i)](x)$.

\Rightarrow $[\pi(i)](x) \simeq \Phi_\pi(i, x)$ per ipotesi. Φ_π essendo parziale ricorsiva avrà un St -indice, sia p . Applicando il teorema $S-m-n$ della numerazione standard, cioè St , si ha:

$$\Phi_\pi(i, x) \simeq \phi_p(i, x) \simeq \phi_{S_1^1(p, i)}(x) \simeq [St(S_1^1(p, i))](x).$$

Quindi la funzione $h(i) = S_1^1(p, i)$ esegue la riduzione $[\pi] \leq [St]$ con $\pi = St \frown h$ e quindi $[\pi] \leq [St]$.

Questo teorema mostra che la numerazione St , benché definita da particolari operazioni di codificazione e in un particolare sostrato algoritmico (le macchine di Turing), ha un significato intrinseco in relazione alle PRF in quanto caratterizza una classe di numerazioni equivalenti rispetto alla effettività e questa classe è univocamente individuata come il massimo delle classi di numerazioni direttamente effettive e cioè indipendentemente da un sostrato algoritmico particolare.

Nell'articolo sul J.S.L. di Rogers viene dato un esempio di numerazione direttamente effettiva che non è equivalente a $[St]$.

Formalizzare la nozione “inversamente effettivo” è meno soddisfacente. Questo dipende dal fatto che “dare” un algoritmo non è un concetto ben definito. Per esempio lo pseudocodice spesso impiegato nelle discussioni di programmazione è troppo vago per formare la base di una numerazione delle PRF, anche se si può pensare a qualche sistema di codifica dello pseudocodice che fornisca un numero caratteristico della funzione calcolata dallo pseudocodice. Osserviamo poi che nella definizione di “direttamente effettivo” abbiamo fatto uso della funzione universale che, anche se fondata su un particolare sistema algoritmico, è una entità astratta. Più esplicitamente la nozione “direttamente effettivo” condensa in uno solo due passi concettuali: quello dal numero-indice all'algoritmo e quello dall'algoritmo alla funzione (cioè l'esecuzione dell'algoritmo).

Un analogo trattamento astratto per la nozione “inversamente effettivo” comporta la considerazione della funzione $S-m-n$. Infatti la funzione $S-m-n$ permette di passare dall'indice di una funzione, nella quale si possano considerare alcune variabili come parametri e le altre come variabili effettive, all'indice di una funzione delle sole variabili effettive con i parametri fissati. È ciò che accade quando si genera un sistema operativo o un sistema applicativo complesso fissando i parametri, generalmente in un processo interattivo. Si passa allora da un algoritmo astrattamente caratterizzato dai suoi parametri al sistema reale in maniera effettiva. Nel caso in cui la funzione originale sia universale siamo molto vicini all'idea di “dare” un algoritmo attraverso i parametri e di ottenere, con le funzioni $S-m-n$, l'algoritmo stesso. Pertanto identificheremo il concetto “inversamente effettivo” con la proprietà di possedere funzioni $S-m-n$ effettive e per ogni numerazione π le indicheremo con S_π .

Teorema 3. Se π ha funzioni $S-m-n$ effettive (è inversamente effettiva) allora $[St] \leq [\pi]$.

Dim. Sia p un π -indice della funzione universale di St . Allora:

$$\phi_i(x) \simeq \Phi_{St}(i, x) \simeq [\pi(p)](i, x) \simeq [\pi \frown S_\pi(p, i)](x)$$

e cioè $St = \pi \frown S_\pi(p, \cdot)$ ossia $[St] \leq [\pi]$ dove la riduzione è eseguita da $h(i) = S_\pi(p, i)$.

Riassumendo abbiamo:

1. $[St]$ è il massimo delle classi di numerazioni con funzione universale effettiva (direttamente effettive).
2. Ogni numerazione minore di (riducibile a) St ha funzione universale effettiva.
3. $[St]$ è il minimo delle classi di numerazioni con funzioni $S-m-n$ effettive (inversamente effettive).
4. $[St]$ è l'unica classe di numerazioni che abbiano sia funzione universale effettiva (direttamente effettive) sia funzioni $S-m-n$ effettive (inversamente effettive).

Si noti che non è stato dimostrato il simmetrico del punto 2. Ora si può facilmente dimostrare che ogni numerazione maggiore di St (a cui è riducibile St) ha funzioni $S-m-n$ effettive quando la funzione g che esegue la riduzione $[St] \leq [\pi]$, vale a dire $St = \pi \frown g$, è suriettiva, cioè ogni π -indice è immagine di un qualche St -indice. In questo caso però è altrettanto facile far vedere che la numerazione è equivalente a $[St]$. Il caso generale è aperto, né sono stati dati esempi di numerazioni con $S-m-n$ effettive (inversamente effettive), ma senza funzione universale effettiva (non direttamente effettive).

Vale poi l'importante teorema:

Teorema 4. Tutte le numerazioni di $[St]$ sono ricorsivamente isomorfe. Date cioè $[\pi]$, $[\rho]$ appartenenti a $[St]$, esiste una corrispondenza biunivoca ricorsiva f tale che $\pi = \rho \frown f$ e $\rho = \pi \frown f^{-1}$.

Pertanto dal punto di visto astratto e nell'ambito della Tesi di Church ogni realizzazione di macchina, per quanto strana e peculiare, è ricorsivamente isomorfa ad ogni altra.