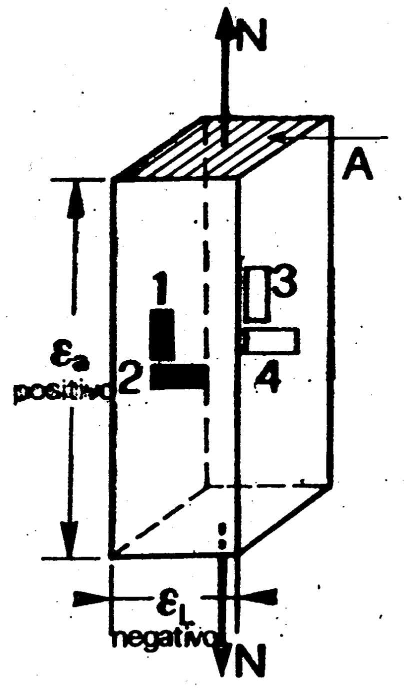
Misura delle sollecitazioni semplici

Trazione o Compressione



Il provino sottoposto ad una forza di trazione ***N*** produce sulla superficie ***A*** una sollecitazione σ e quindi:

Trazione e compressione

$$\varepsilon_a = \frac{\sigma}{E} \quad ; \quad \varepsilon_L = -\upsilon \varepsilon_a$$

<u>Caso I: collegamento a ponte intero</u>

$$\frac{\Delta V_o}{V_i} = \frac{F}{4}\left(\varepsilon_1 - \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \varepsilon_4\right)$$

Tenendo conto che:

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_L = -\upsilon \varepsilon_a = -\upsilon \varepsilon_1$$

$$\frac{\Delta V_o}{V_i} = \frac{F}{4}\left(\varepsilon_1 - (-\upsilon \varepsilon_1) + \varepsilon_3 - (-\upsilon \varepsilon_3)\right)$$

Trazione e compressione (2)

Dato che:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_3 = \varepsilon_a = \varepsilon$$

e quindi:

$$\frac{\Delta V_o}{V_i} = \frac{F}{4} 2\left(\varepsilon - \upsilon\varepsilon\right) = \frac{F}{4} 2\varepsilon(1+\upsilon) = 2.6\varepsilon \frac{F}{4}$$

Da cui

$$\varepsilon = \frac{4\Delta V_o}{V_i F\, 2.6}$$

2.6 = **Fattore di ponte**

Trazione e compressione (3)

Osservazioni:

- Vengono eliminati gli effetti di un eventuale presenza del momento flettente
- Vengono compensati gli effetti termici
- Viene massimizzato il segnale fornito

Trazione e compressione (4)

<u>*Caso II: collegamento a semi ponte*</u>

Consideriamo gli estensimetri 1 e 2 della figura precedente:

$$\frac{\Delta V_o}{V_i} = \frac{F}{4}\left[\varepsilon_1 - (-\upsilon\varepsilon_1)\right] = \frac{F}{4}\varepsilon_1(1+\upsilon) = \frac{F}{4}1.3\varepsilon_1$$

E quindi:

$$\varepsilon_1 = \frac{4\Delta V_o}{V_i F 1.3}$$

Trazione e compressione (5)

Osservazioni:

- Il fattore di ponte risulta dimezzato
- La temperatura risulta compensata
- Un eventuale momento flettente viene invece misurato, sommato al contributo dato dalla trazione *N*.

Trazione e compressione (6)

<u>*Caso III: collegamento a un quarto di ponte*</u>

$$\frac{\Delta V_o}{V_i} = \frac{F}{4}\varepsilon_1$$

da cui si ricava:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon = \frac{4\Delta V_o}{V_i F 1}$$

Osservazioni:

- Il fattore di ponte vale 1;
- Non esiste la compensazione della temperatura;
- Non e' possibile separare un'eventuale deformazione ε_f dovuta al momento flettente (se esiste) da quella ε_t dovuta alla sola trazione, per cui la deformazione ε fornita risulta la somma delle due.

Trazione e compressione (7)

Caso IV: collegamento a doppio quarto

Gli estensimetri 1 e 3 sono collegati al medesimo quarto di ponte, quindi:

$$\frac{\Delta V_o}{V_i} = \frac{F}{4}(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$$

da cui essendo $\varepsilon_1 = \varepsilon_3$ si ha:

$$\varepsilon = \frac{4\Delta V_o}{V_i F 2}$$

Trazione e compressione (8)

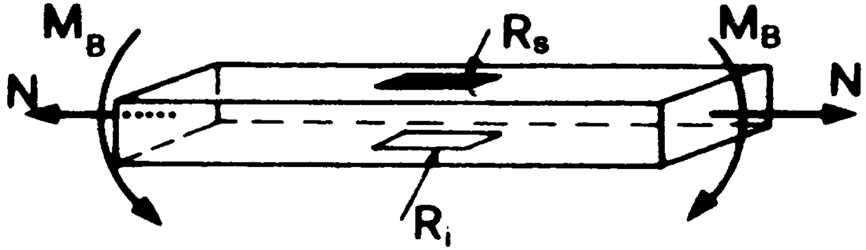
Osservazioni:

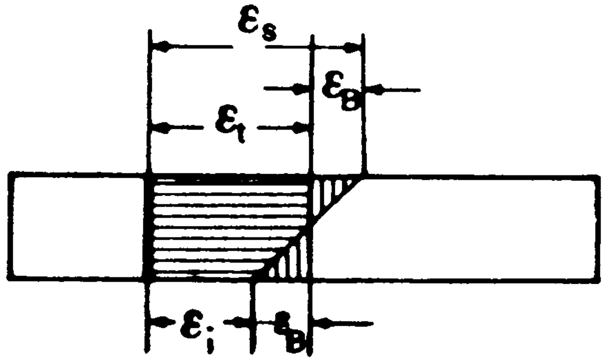
- Se esiste un momento flettente, poiche' esso produce deformazioni eguali e di segno opposto, si ha cancellazione dell'effetto, mentre la sollecitazione di trazione viene sentita con pari segno;
- Il fattore di ponte e' pari a 2;
- Non e' possibile la compensazione della temperatura.

Separazione delle sollecitazioni di flessione e trazione

L'impiego dell'estensimetro in quarto di ponte consente anche di risolvere il problema della separazione di due sollecitazioni come trazione (o compressione) + flessione contemporaneamente presenti su un provino sollecitato.

Trazione e compressione (9)





L'estensimetro R_s collegato una prima volta in quarto di ponte fornisce una deformazione:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_t + \varepsilon_B$$

Trazione e compressione (10)

L'estensimetro R_i con altro ponte e separatamente dal primo fornisce:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_t - \varepsilon_B$$

Si avra' quindi:

$$\varepsilon_s + \varepsilon_i = \varepsilon_t + \varepsilon_B + \varepsilon_t - \varepsilon_B = 2\varepsilon_t$$

da cui:

$$\varepsilon_t = \frac{1}{2}(\varepsilon_s + \varepsilon_i)$$

Analogamente si avra':

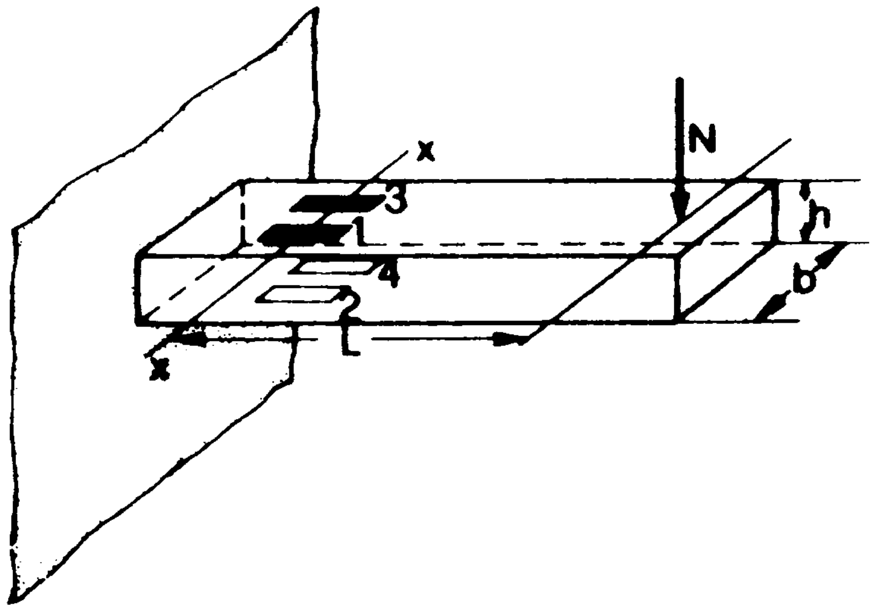
$$\varepsilon_s - \varepsilon_i = \varepsilon_t + \varepsilon_B - \varepsilon_t + \varepsilon_B$$

da cui:

$$\varepsilon_s = \frac{1}{2}(\varepsilon_s - \varepsilon_i)$$

Flessione

La deformazione dovuta alla flessione prodotta dalla forza ***N*** alla distanza ***L*** dalla sezione di misura vale:



Flessione (2)

$$\varepsilon_B = \frac{\sigma}{E} = \frac{M_B}{W_B E} = \frac{N \cdot L}{W_B E}$$

Caso I: Collegamento a ponte intero

Gli estensimetri 1 e 2 la stessa deformazione in modulo, ma cambiata di segno, e cosi' pure gli estensimetri 3 e 4. Si avra' quindi:

$$\frac{\Delta V_o}{V_i} = \frac{F}{4}[\varepsilon_B - (-\varepsilon_B) + \varepsilon_B - (-\varepsilon_B)] = \frac{F}{4} 4\varepsilon_B$$

Da cui:

$$\varepsilon_B = \frac{4\Delta V_o}{V_i F \cdot 4}$$

Flessione (3)

Osservazioni:

- Il fattore di ponte e’ pari a 4;
- Si ottiene la cancellazione degli effetti della temperatura;
- Si ha la cancellazione degli effetti dovuti alla eventuale presenza di forze di trazione o compressione.

Gli estensimetri 1 e 2 essendo su lati contigui del ponte sottraggono gli effetti uguali dovuti alla temperatura e similmente gli effetti uguali dovuti alla eventuale sollecitazione di trazione o compressione.

Flessione (4)

Caso II: collegamento a semiponte

Valgono le considerazioni gia' esposte nel caso precedente in quanto le coppie di estensimetri 1,2 e 3,4 subiscono le medesime sollecitazioni. L'unica differenza consiste nel fattore di ponte dimezzato:

$$\varepsilon_B = \frac{4\Delta V_o}{V_i F \cdot 2}$$

Flessione (5)

Caso III: collegamento a quarto di ponte

Utilizzando uno qualsiasi degli estensimetri riportati in figura si avra':

$$\frac{\Delta V_o}{V} = \frac{1}{4} F \varepsilon_B$$

E quindi:

$$\varepsilon_B = \frac{4 \Delta V_o}{V_i F}$$

Flessione (6)

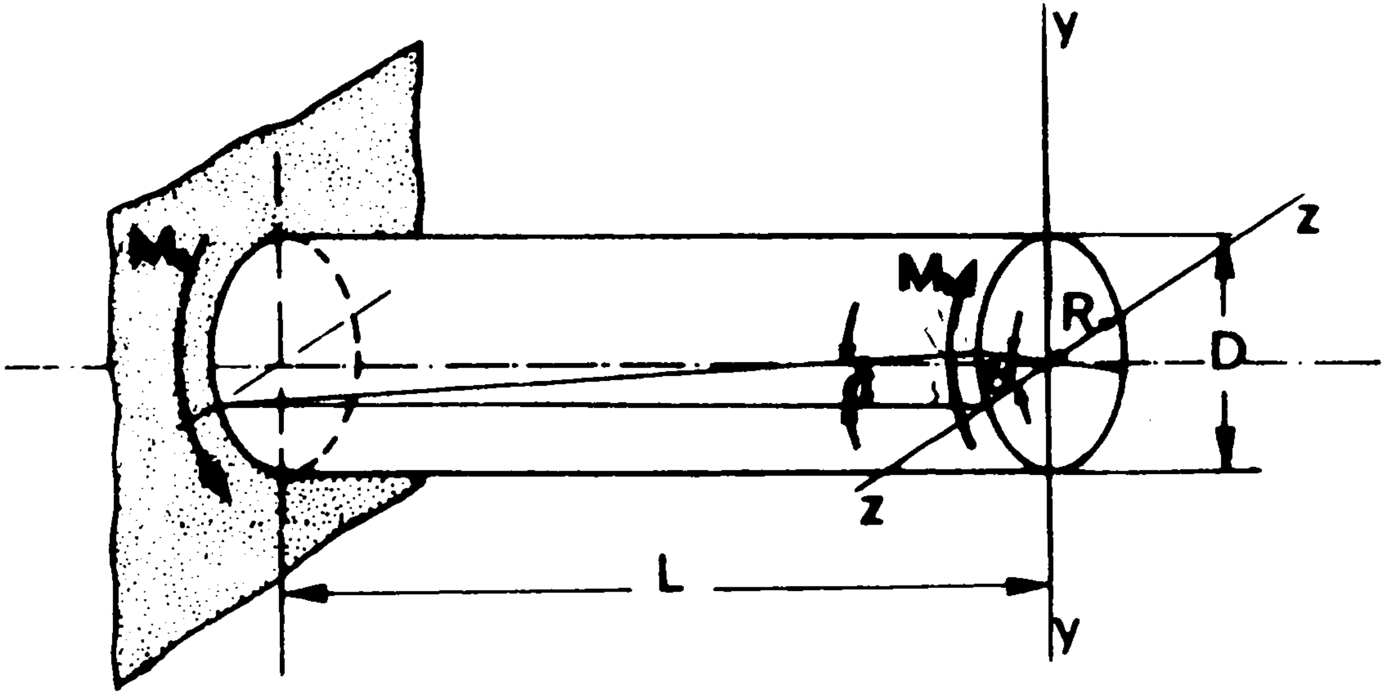
Osservazioni:

- Il fattore di ponte e' pari ad 1;
- Non vengono compensati gli effetti della temperatura;
- Non vengono compensati gli effetti di eventuale presenza di sollecitazioni di trazione o compressione.

Queste ultime vanno pertanto isolate con il metodo gia' illustrato e cioe' operando due misure separate con due estensimetri.

Torsione

Torsione



Torsione (2)

Dalla teoria delle sollecitazioni semplici si hanno le seguenti relazioni per la torsione:

$$\delta = \text{scorrimento} = R\vartheta$$

$$\vartheta = \text{angolo di torsione} = \frac{M_t}{GI_o}$$

$$M_t = \text{momento torcente}$$

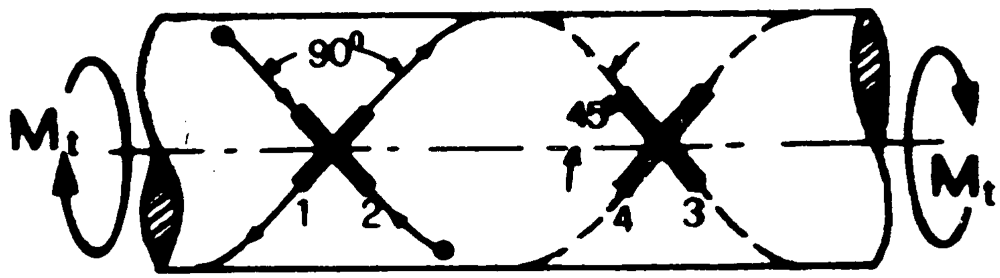
$$G = \text{modulo di elasticita' trasversale}$$

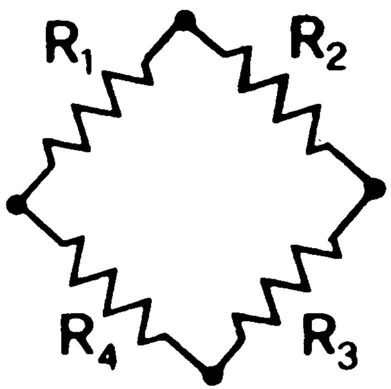
$$I_{\text{o}} = \text{momento di inerzia polare}$$

$$\varepsilon_t = \text{deformazione} = -\varepsilon_t = \frac{\delta}{2}\,\text{sen}\,2\vartheta$$

Per $2\vartheta=90°$ si ha ε_t =max e cioe' per $\vartheta=45°$ rispetto all'asse.

Torsione (3)





Quindi per rilevare la deformazione massima gli estensimetri dovranno essere applicati su eliche a 45° rispetto all’asse. Per semplicita’ conviene partire dal caso di collegamento a semi ponte.

Torsione (4)

Caso I: collegamento a semi ponte

Se si pongono gli estensimetri 1 e 2 su due eliche a 45° rispetto all'asse ed a 90° tra di loro, con il verso del momento applicato come in figura, l'estensimetro 1 si allunga di quanto si accorcia l'estensimetro 2. Essi si trovano dunque nelle medesime condizioni del mezzo ponte in flessione pura, varra' quindi la:

$$\varepsilon_t = \frac{4\Delta V_o}{V_i F \cdot 2}$$

L'effetto della temperatura e' eliminato, cosi' come l'effetto di un'eventuale spinta assiale, in quanto comprime allo stesso modo entrambi gli estensimetri.

Torsione (5)

Caso II: collegamento a ponte intero

Se gli estensimetri 1 e 2 vengono fatti scorrere ciascuno lungo la propria elica di mezzo passo, andranno ad occupare rispettivamente le posizioni 3 e 4. Essendo sulle medesime eliche, si puo' ripetere il ragionamento gia' fatto per il mezzo ponte. Si avra' in definitiva il ponte intero con gli estensimetri 1,3 che misurano trazione e gli estensimetri 2,4 che misurano compressione. Con il ponte intero vengono eliminati sia gli effetti della temperatura e della spinta assiale, sia quelli dovuti ad un eventuale momento flettente, sempre presente specie negli alberi di trasmissione lunghi. Infatti gli estensimetri 1,3 sono su rami opposti rispetto all'asse neutro per cui, agli effetti del momento flettente, subiscono deformazioni opposte che non vengono rilevate. Lo stesso ragionamento si ripete per gli estensimetri 2,4.

Torsione (6)

Caso III: collegamento a quarto di ponte

Il fattore di ponte vale 1, ma vengono misurate, oltre che la deformazione di torsione, anche gli effetti della temperatura, della spinta assiale e del momento flettente. E' un collegamento poco usato per la torsione.

Rosette estensimetriche

La misura di uno stato di sollecitazione incognito
Rosette Estensimetriche

Finora si sono considerati stati di sollecitazione monoassiale, presupponendo la conoscenza delle direzioni principali. Supponiamo il caso di sollecitazione biassiale: ponendo due estensimetri lungo due assi ortogonali avremo:

$$\sigma_x = \frac{E(\varepsilon_x - \upsilon\varepsilon_y)}{1-\upsilon^2}$$

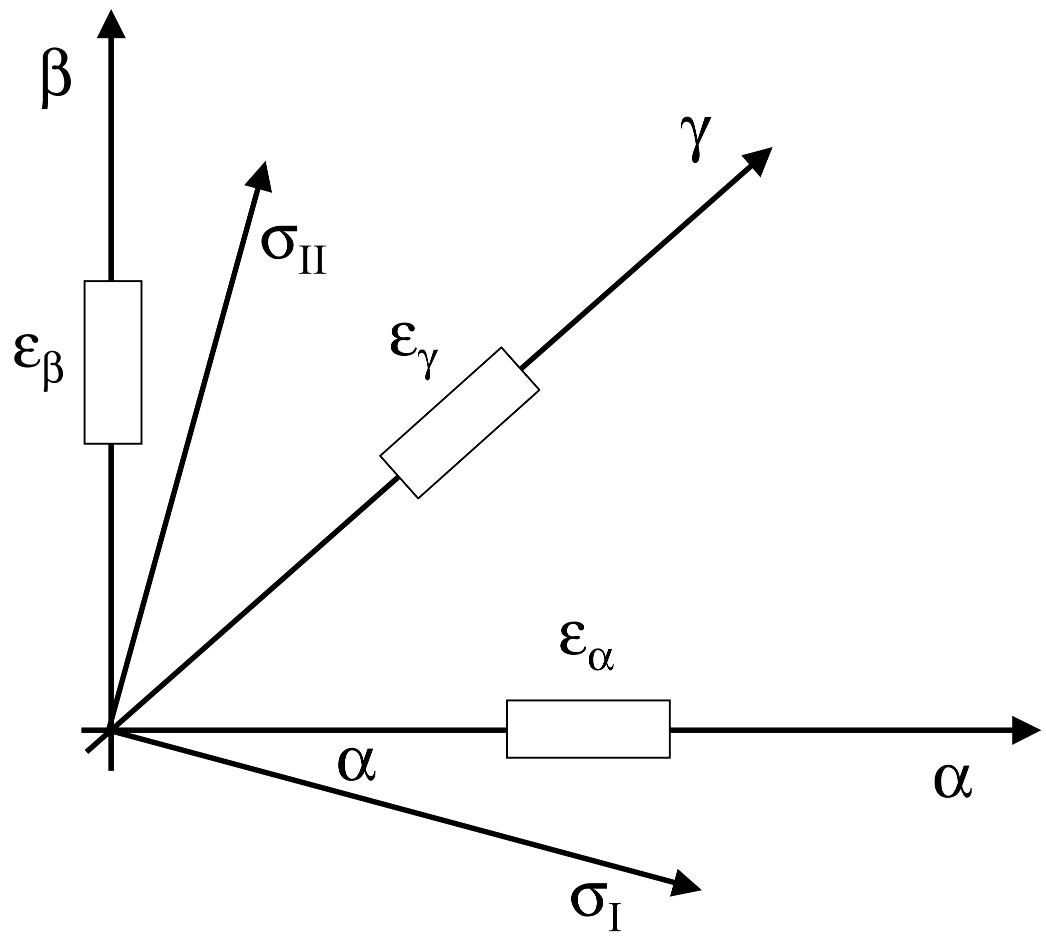
$$\sigma_y = \frac{E(\varepsilon_y - \upsilon\varepsilon_x)}{1-\upsilon^2}$$

Rosette estensimetriche (2)

Quelle ottenute non sono le sollecitazioni principali, pertanto non e' possibile conoscere completamente lo stato di sforzo, a meno che le direzioni x e y coincidano con quelle principali.
In genere le direzioni principali non sono note, possono essere individuate a partire dalla conoscenza delle deformazioni lungo tre direzioni qualsiasi, tramite **rosette estensimetriche**.

Si consideri una rosetta rettangolare come quella di figura, e siano note le deformazioni lungo i tre assi α β γ : sia inoltre α l'angolo di sfasamento tra il sistema di riferimento scelto e il sistema si assi principali.

Rosette estensimetriche (3)



Rosette estensimetriche (4)

Le incognite del problema sono 3, σ_1 σ_2 α come pure le grandezze note, ε_α ε_β ε_γ . La sollecitazione lungo una qualsiasi direzione *a* puo' esprimersi in funzione degli sforzi principali σ_1 σ_2 tramite le relazioni (circolo di Mohr):

$$\sigma_x = \sigma_a = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\sigma_y = \sigma_{a+\pi/2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha$$

$$\tau_{xy} = \tau_{a+\pi/2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \operatorname{sen} 2\alpha$$

Rosette estensimetriche (5)

Si possono quindi scrivere le corrispondenti relazioni per le tre direzioni α β γ della rosetta estensimetrica:

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha$$

$$\sigma_\beta = \sigma_{\alpha + \pi/2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2(90 + \alpha) =$$

$$= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\alpha$$

Rosette estensimetriche (6)

$$\sigma_\gamma = \sigma_{45+\alpha} = \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2(45+\alpha)$$
$$= \frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - \frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\operatorname{sen} 2\alpha$$

Noto il coefficiente di Poisson ed il modulo elastico longitudinale del materiale sul quale e' applicata la rosetta, so conoscono le relazioni tra le tensioni e le deformazioni tra la generica direzione α e la sua ortogonale β:

$$E\varepsilon_\alpha = \sigma_\alpha - \upsilon\sigma_{90+\alpha}$$

che sostituita nelle precedenti fornisce:

Rosette estensimetriche (7)

$$E\varepsilon_{\alpha} = (1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} + (1+\upsilon)\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha$$

$$E\varepsilon_{\beta} = (1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - (1+\upsilon)\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\cos 2\alpha$$

$$E\varepsilon_{\gamma} = (1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2} - (1+\upsilon)\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}\operatorname{sen} 2\alpha$$

Rosette estensimetriche (8)

Ponendo per semplicita':

$$(1-\upsilon)\frac{\sigma_1+\sigma_2}{2}=A$$

$$(1+\upsilon)\frac{\sigma_1-\sigma_2}{2}=B$$

Si ottiene infine:

$$E\varepsilon_\alpha = A + B\cos 2\alpha$$

$$E\varepsilon_\beta = A - B\cos 2\alpha$$

$$E\varepsilon_\gamma = A - B\,\mathrm{sen}\,2\alpha$$

Rosette estensimetriche (9)

sistema di 3 equazioni in 3 incognite. Sommando le prime due equazioni e dividendo la terza per la seconda, si ottiene:

$$A = \frac{1}{2} E(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta)$$

$$B \operatorname{sen} 2\alpha = A - E\varepsilon_\gamma = \frac{1}{2} E(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) - E\varepsilon_\gamma$$

$$B \cos 2\alpha = A - E\varepsilon_\beta = \frac{1}{2} E(\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta) - E\varepsilon_\beta$$

Rosette estensimetriche (10)

Sostituendo le espressioni ottenute nelle precedenti si ha:

$$\frac{B\,\mathrm{sen}\,2\alpha}{B\cos 2\alpha} = tg2\alpha = \frac{2\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta}$$

$$\sigma_1, \sigma_2 = \frac{E}{2}\left[\frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta}{1-\upsilon} \pm \frac{1}{1+\upsilon}\sqrt{2(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma)^2 + 2(\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\beta)^2}\right]$$

Formule risolutive della rosetta

Rosette estensimetriche (11)

E' possibile tracciare anche il cerchio di Mohr per le deformazioni, concentrico con quello delle tensioni: il rapporto tra i raggi dei due cerchi vale:

$$\frac{D_\varepsilon}{D_\sigma} = \frac{1+\upsilon}{1-\upsilon}$$

Ripetendo in modo analogo il ragionamento si ottiene:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta \pm \sqrt{2(\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\gamma)^2 + 2(\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\beta)^2}\right]$$

Rosette estensimetriche (12)

Occorre spendere due parole sulla risoluzione dell'angolo di orientamento degli assi principali: poiche' infatti

$$tg\alpha = tg(\alpha + \pi)$$

l'angolo non risulta univocamente determinato. Per capire in quale quadrante cade, occorre valutare il segno del numeratore e denominatore dell'espressione seguente:

$$tg2\alpha = \frac{2\varepsilon_\gamma - \varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta}{\varepsilon_\alpha - \varepsilon_\beta} = \frac{b}{a}$$

tg2α=b/a	**a**	**pos.**	**pos.**	**neg.**	**neg.**
	b	**pos.**	**neg.**	**neg.**	**pos.**
Ottante		0÷45	45÷90	90÷135	135÷180