Pietro Baldi

Analisi matematica II

Programma d'esame dettagliato

Materiale didattico

Il libro di testo di riferimento è *Analisi Matematica Due* di N. Fusco, P. Marcellini e C. Sbordone, Liguori Editore.
Per successioni e serie di funzioni, calcolo differenziale ed equazioni differenziali sono disponibili le dispense del corso (www.docenti.unina.it/pietro.baldi).
Lo svolgimento di esercizi di vario tipo su ciascun argomento è fondamentale per verificare la comprensione e per impadronirsi delle tecniche. Si consiglia l'eserciziario allegato al libro di testo, *Esercitazioni di matematica, 2º Volume, parte prima e parte seconda* di P. Marcellini e C. Sbordone, Liguori Editore, e qualsiasi altra fonte di esercizi.

Prerequisiti

L'esame di Analisi matematica I è propedeutico a quello di Analisi matematica II, quindi gli argomenti trattati nel corso di Analisi I vengono considerati come acquisiti. In particolare: esponenziali, logaritmi, limiti (inclusa la regola di de l'Hôpital), criteri di convergenza per serie numeriche (incluso il criterio di Leibniz per serie a termini di segno alterno), integrale di Riemann, integrazione per parti, derivazione della funzione composta, derivata della funzione inversa, numeri complessi.

Successioni e serie di funzioni

- Definizione di convergenza puntuale per una successione di funzioni e per una serie di funzioni.
- Le operazioni di limite, di sommatoria, di derivata e di integrale non si possono, in generale, scambiare.
Esempi:
- una successione di funzioni continue che converge puntualmente ad una funzione limite non continua;
- una serie di funzioni continue che converge puntualmente ad una funzione somma che non è continua;
- una successione di funzioni derivabili che converge puntualmente ad una funzione limite che non è derivabile;
- una successione di funzioni integrabili per cui limite degli integrali e integrale del limite sono diversi.
- Definizione di convergenza uniforme per successioni e serie di funzioni.
- Confronto fra i due tipi di convergenza.
- Definizione di norma del sup.
- Definizione equivalente di convergenza uniforme come convergenza nella norma del sup.
- Proprietà della norma del sup.
- Definizione di successione uniformemente di Cauchy.
- Teorema (Criterio di uniforme convergenza di Cauchy): una successione di funzioni converge uniformemente se e solo se è uniformemente di Cauchy. Dimostrazione.
- Teorema: il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua. Dimostrazione.
- Definizione di serie totalmente convergente.

- Teorema (Criterio di Weierstrass per serie di funzioni): la convergenza totale implica la convergenza uniforme per serie di funzioni. Dimostrazione.
- Conseguenza: se c'è convergenza uniforme, i segni di limite e di sommatoria si possono scambiare.
- Il viceversa non vale: esiste una serie che converge uniformemente ma non totalmente.
- Teorema (Passaggio al limite sotto il segno di integrale): se una successione di funzioni Riemann-integrabili converge uniformemente, allora la funzione limite è Riemann-integrabile e i segni di integrale e di limite si scambiano. Dimostrazione facoltativa.
- Teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale assumendo anche l'ipotesi che le funzioni siano continue. Dimostrazione.
- Il teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale non si estende a funzioni Riemann-integrabili in senso generalizzato (esempio: $f_n : [1, \infty) \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = 1/x$ se $x \in [1, n]$, 0 se $x > n$).
- Teorema di integrazione di una serie termine a termine. Dimostrazione.
- Teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata per funzioni di classe C^1. Dimostrazione.
- Corollario: derivazione di una serie termine a termine.

- Definizione di serie di potenze.
- Definizione di raggio di convergenza R per una serie di potenze.
- Teorema: l'insieme di convergenza puntuale di una serie di potenze è un intervallo centrato in zero di raggio R. Dimostrazione.
- Teorema: se la successione dei rapporti o quella delle radici dei coefficienti ha limite ℓ, allora il raggio di convergenza della serie corrispondente è $1/\ell$. Dimostrazione.
- Teorema: una serie di potenze converge totalmente su $[-r, r]$, per ogni $r < R$. Dimostrazione.
- Teorema: la serie delle derivate di una serie di potenze ha lo stesso raggio di convergenza della serie stessa; la serie derivata converge totalmente su $[-r, r]$, per ogni $r < R$. Dimostrazione.
- Formula in serie per le derivate di ogni ordine. Dimostrazione (per induzione).
- Calcolo delle derivate in zero e relazione con lo sviluppo in serie di Taylor.
- Esempio classico di una funzione di classe C^∞ che non coincide con la sua serie di Taylor.
- Teorema: criterio di sviluppabilità in serie di Taylor. Dimostrazione.

Calcolo differenziale in $\mathbb{R}^n$

Spazio vettoriale $\mathbb{R}^n$:
- Somma di vettori, prodotto per uno scalare.
- Base canonica, $e_1 = (1, 0, ..., 0)$, ..., $e_n = (0, ..., 0, 1)$.
- Prodotto scalare, definizione e proprietà.
- Definizione di norma euclidea.
- Disuguaglianza di Schwartz. Dimostrazione.
- Proprietà della norma euclidea. Dimostrazione.
- Definizione di angolo compreso tra due vettori, vettori ortogonali.
- Definizione di limite per una successione di vettori.
- Proposizione: una successione di vettori converge a un certo vettore limite se e solo se le componenti convergono al rispettivo limite. Dimostrazione.

Funzioni vettoriali di più variabili ($f\colon D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$):
- Definizione di funzione continua (definizione "ε-δ" con le norme euclidee).
- Casi notevoli: funzioni scalari ($m = 1$), curve ($n = 1$) e campi vettoriali ($m = n$).
- Proposizione: una funzione f a valori vettoriali è continua se e solo se tutte le sue funzioni componenti f_k sono continue. Dimostrazione.
- Definizione di funzione lipschitziana.
- Proposizione: le funzioni lipschitziane sono continue. Dimostrazione.
- Proposizione: una funzione vettoriale è lipschitziana se e solo se tutte le sue funzioni componenti sono lipschitziane. Dimostrazione.

- Funzioni notevoli su $\mathbb{R}^n$: traslazioni, omotetie, norma, prodotto scalare per un vettore, proiezioni, matrici. Dimostrazione che tutte queste applicazioni sono lipschitziane.
- Topologia in $\mathbb{R}^n$: definizione di palla, insieme aperto, insieme chiuso, insieme limitato, insieme compatto, punto interno, punto esterno, punto di frontiera, punto di accumulazione, interno di un insieme, chiusura di un insieme, frontiera di un insieme.
- Per ogni $A \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha: $\mathrm{Int}(A)$ è aperto, $\mathrm{Cl}(A)$ è chiuso, $\mathrm{Int}(A) \subseteq A \subseteq \mathrm{Cl}(A)$. Senza dimostrazione.
- Teorema di Heine-Borel: un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Senza dimostrazione.
- Teorema di Weierstrass: una funzione continua su un compatto di $\mathbb{R}^n$ ha massimo e minimo. Dimostrazione.
- Teorema ponte: una funzione di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}^m$ è continua se e solo se è continua per successioni. Dimostrazione facoltativa.
- Proposizione: la composizione di funzioni continue è continua su un opportuno sottoinsieme del dominio. Dimostrazione.
- Composizione di una funzione con una curva continua e "criterio di non continuità".
- Proposizione: la somma e il prodotto scalare di due funzioni continue sono funzioni continue. Dimostrazione.
- Conseguenza: $f(x)/g(x)$ è continua su $\{x : g(x) \neq 0\}$ se f, g sono continue.
- Osservazione: da una disuguaglianza del tipo $|f(x) - f(y)| < C|x - y|^a$ segue la continuità.
- Definizione di derivata parziale per funzione di n variabili reali.
- Definizione di gradiente in un punto.
- Definizione di campo vettoriale gradiente. Potenziale di un campo gradiente.
- Osservazione: l'esistenza delle derivate parziali in un punto non implica la continuità in quel punto. Esempio di funzione non continua che ha derivate parziali.
- Definizione di matrice jacobiana di una funzione $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.
- Casi speciali: matrice quadrata se f è un campo, matrice riga se f è funzione scalare, matrice colonna se f è una curva in $\mathbb{R}^m$.
- Ogni funzione lineare $f \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si rappresenta come matrice a m righe e n colonne; le colonne della matrice sono i vettori $f(e_i)$, dove e_i è l'i-esimo vettore della base canonica. Dimostrazione.
- Definizione di differenziabilità in un punto.
- Definizione di differenziale.
- Proposizione: se f è differenziabile in x, allora esistono tutte le derivate parziali in x di tutte le funzioni componenti, e il differenziale è rappresentato dalla matrice jacobiana. Dimostrazione.
- Caso speciale: se f è funzione scalare, $df(x)[h]$ è il prodotto scalare $\nabla f(x) \cdot h$.
- Proposizione: se f è differenziabile in x, allora è continua in x. Dimostrazione.
- Osservazione: l'esistenza delle derivate parziali non implica la differenziabilità; esempio.
- Teorema del differenziale. Dimostrazione (per $n = 3$; prima nel caso scalare $m = 1$, quindi in quello vettoriale $m > 1$).
- Definizione di funzione di classe C^1.
- Equazione del piano tangente al grafico di f in $\mathbb{R}^{n+1}$, per f scalare.

- La composizione di due funzioni differenziabili è differenziabile (senza dimostrazione).
- Differenziale della funzione composta, formula per le derivate parziali e per la matrice jacobiana della funzione composta. Casi notevoli.
- Definizione di derivata direzionale.
- La differenziabilità implica l'esistenza della derivata direzionale, che è uguale al prodotto scalare del gradiente della funzione per il vettore direzione v, per ogni v. Dimostrazione.
- Osservazione: il gradiente indica la direzione e il verso in cui la derivata direzionale è massima.
- Definizione di derivata seconda e matrice hessiana.
- Definizione di funzione di classe C^2.

- Teorema di Schwartz: se le derivate seconde sono continue, allora l'ordine di derivazione non conta, e la matrice hessiana è simmetrica. Senza dimostrazione.
- Esempio di funzione per cui le derivate seconde miste $D_{xy}f$ e $D_{yx}f$ non sono uguali.
- La composizione di funzioni di classe C^2 è una funzione C^2. Dimostrazione facoltativa.
- Formula di Taylor per funzioni scalari di più variabili reali, di ordine 1 e 2, con resto in forma di Lagrange e di Peano. Dimostrazioni.
- Definizione di matrice definita, semidefinita e indefinita.
- Caratterizzazione delle matrici definite. Dimostrazione.
- Osservazione: segno degli elementi sulla diagonale principale.
- Proposizione: per matrici 2×2 simmetriche, il determinante determina il carattere della matrice. Dimostrazione.

- Definizione di punto di minimo e massimo locali e globali per funzioni di più variabili.
- Definizione di punto critico.
- Condizione necessaria del primo ordine: un punto interno al dominio di f di massimo o di minimo per f è un punto critico. Dimostrazione.
- Condizioni necessarie del secondo ordine per punti di massimo e minimo. Dimostrazione.
- Condizioni sufficienti del secondo ordine per punti di massimo e minimo. Dimostrazione.
- Metodi diretti per la classificazione di punti critici (esempio: $f(x, y) = y^2 \sin x$).

Equazioni differenziali

- Distinzione tra equazioni differenziali ordinarie ed equazioni differenziali alle derivate parziali.
- Definizione di equazione differenziale in forma normale, grado di un'equazione differenziale, dominio della soluzione, problema di Cauchy di grado 1,2,3,...
- Lemma di equivalenza tra problema di Cauchy e formulazione integrale. Dimostrazione.
- Teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy. Dimostrazione.
- Conseguenza dell'unicità: due soluzioni diverse della stessa equazione differenziale non hanno punti in comune. Senza dimostrazione.
- L'esistenza e la continuità della derivata parziale rispetto a y implica la lipschitzianità in y, uniforme rispetto a x, su rettangoli compatti. Dimostrazione.
- Teorema di esistenza e unicità nel caso vettoriale. Senza dimostrazione.
- Trasformazione di un'equazione differenziale scalare di ordine n in un'equazione differenziale vettoriale in $\mathbb{R}^n$ di ordine 1.
- Teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy di ordine n. Senza dimostrazione.
- L'ipotesi di lipschitzianità in y è necessaria: esempio classico di esistenza senza unicità.
- Regolarità: se f è di classe C^k, allora la soluzione $u(t)$ dell'equazione $u' = f(t, u)$ è di classe C^{k+1}. Dimostrazione. Se f è C^∞, anche u è C^∞.
- Teorema di esistenza e unicità globale del problema di Cauchy. Senza dimostrazione.
- Se f è globalmente lipschitziana in y, uniformemente in x, allora le ipotesi del teorema di esistenza e unicità globale sono soddisfatte. Dimostrazione.

- Equazioni differenziali a variabili separabili: procedimento generale di risoluzione.
- Risoluzione di equazioni differenziali mediante una sostituzione che porta ad un'equazione a variabili separabili. Casi notevoli.
- Risoluzione di equazioni differenziali mediante integrali primi.
- Risoluzione di equazioni differenziali mediante integrali primi e fattore integrante.

- Equazioni differenziali lineari: definizioni, equazione non omogenea, equazione omogenea associata, termine noto.
- Se u e v sono soluzioni di un'equazione lineare, la loro differenza $u-v$ è soluzione dell'equazione omogenea associata. Dimostrazione.

- Sia y soluzione di un'equazione lineare. Allora u è soluzione della stessa equazione se e solo se $u = y + v$, con v soluzione dell'omogenea associata. Dimostrazione.
- Le soluzioni di un'equazione lineare sono tutte soluzioni globali. Senza dimostrazione.
- Teorema: l'insieme delle soluzioni di un'equazione differenziale lineare omogenea di grado n è uno spazio vettoriale di dimensione n; costruzione dei vettori di una base. Dimostrazione. (In particolare, enunciato per n=1,2,3).
- Metodo di variazione delle costanti: procedimento per equazioni di grado 1,2,3.
- Formula risolutiva dell'equazione lineare di primo grado $y' + a(x)y = b(x)$ con dato iniziale $y(x_0) = y_0$. Dimostrazione (variabili separabili per l'omogenea associata, variazione delle costanti per una soluzione particolare). [Facoltativo: dimostrazione per sostituzione, dimostrazione con integrale primo e fattore integrante.]
- Definizione di matrice wronskiana e determinante wronskiano.
- Il determinante wronskiano è diverso da zero per ogni t se le funzioni sono linearmente indipendenti. Senza dimostrazione.

Equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti:
- Esponenziale complesso: definizione e proprietà. Dimostrazione facoltativa.
- Definizione di soluzione a valori complessi di un'equazione omogenea a coefficienti costanti (reali).
- $w(t) = u(t) + iv(t)$ è soluzione complessa se e solo se $u(t)$ e $v(t)$ sono soluzioni reali. Dimostrazione.
- Definizione di polinomio caratteristico.
- Teorema: soluzioni complesse e reali linearmente indipendenti che formano una base dello spazio delle soluzioni, una volta note le radici (con le loro molteplicità) del polinomio caratteristico. Senza dimostrazione.

Curve in $\mathbb{R}^n$

- Definizione di curva semplice, curva chiusa, curva regolare, curva regolare a tratti, sostegno di una curva.
- Retta tangente, vettore tangente, versore tangente.
- Definizione di diffeomorfismo tra due intervalli compatti. Definizione di curve equivalenti.
- Verso di percorrenza di una curva, diffeomorfismi che preservano/scambiano l'orientamento. Diffeomorfismi affini (del tipo $g(t) = mt + q$).
- Lunghezza di una curva regolare a tratti.
- Integrale curvilineo di una funzione continua lungo una curva regolare a tratti.
- Proposizione: due curve equivalenti hanno la stessa lunghezza e gli stessi integrali curvilinei. Dimostrazione.
- Osservazione: l'integrale curvilineo non dipende dal verso di percorrenza.
- Definizione di ascissa curvilinea.
- Definizione di versore normale di una curva piana.
- Definizione di baricentro di una curva in $\mathbb{R}^n$.

Forme differenziali

- Richiami sulle funzioni lineari di $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$, rappresentazione come matrice di riga, definizione di spazio duale $(\mathbb{R}^n)^*$, base canonica $dx_1, ..., dx_n$.
- Definizione di forma differenziale lineare, coefficienti, regolarità.
- Corrispondenza con i campi vettoriali.
- Il differenziale di una funzione scalare visto come forma differenziale.
- Definizione di forma differenziale esatta e di campo vettoriale gradiente, primitiva di una forma esatta, potenziale di un campo gradiente.
- Definizione di integrale di una forma differenziale lungo una curva, definizione di lavoro di un campo lungo una curva.

- L'integrale di una forma differenziale continua lungo due curve equivalenti è uguale se le curve hanno lo stesso orientamento, opposto se le curve hanno orientamento opposto. Dimostrazione.
- Proprietà di linearità dell'integrale lungo una curva.
- Se una forma ω ha i coefficienti limitati, $|(a_1(x), ..., a_n(x))| \leq M$, sul sostegno di una curva φ, allora $|\int_\varphi \omega| \leq ML(\varphi)$. Dimostrazione.
- Teorema: l'integrale di una forma esatta lungo una curva è uguale alla differenza tra i valori di una sua primitiva nei punti finale e iniziale. Dimostrazione.
- Teorema di caratterizzazione delle forme esatte. Dimostrazione.
- Definizione di forma chiusa.
- Tutte le forme esatte sono chiuse. Dimostrazione.
- Definizione di omotopia, definizione di curve chiuse omotope, significato geometrico intuitivo.
- Definizione di sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ semplicemente connesso. Esempi importanti in $\mathbb{R}^2$ (il piano $\mathbb{R}^2$, il piano senza un punto, il piano senza una semiretta, il cerchio, il cerchio forato, la corona circolare, il semipiano) e in $\mathbb{R}^3$ (lo spazio $\mathbb{R}^3$, lo spazio senza un punto, lo spazio senza una retta).
- Teorema: ogni forma chiusa su un insieme semplicemente connesso di $\mathbb{R}^n$ è esatta. Senza dimostrazione.
- Definizione di circuitazione di un campo vettoriale in $\mathbb{R}^n$, corrispondente integrale curvilineo della forma differenziale associata.
- Definizione di campo irrotazionale in $\mathbb{R}^3$.
- Integrale curvilineo del prodotto scalare di un campo in $\mathbb{R}^2$ per il versore normale alla curva, corrispondente interpretazione con le forme differenziali.
- Definizione di prodotto vettoriale in $\mathbb{R}^3$.
- Definizione di divergenza di un campo in $\mathbb{R}^n$, definizione di rotore di un campo in $\mathbb{R}^3$, scritture formali come prodotto scalare/vettoriale per il vettore nabla.

Integrali doppi e tripli

Integrali doppi:
- Definizione di sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ normale rispetto all'asse delle x o all'asse delle y.
- Misura di un insieme normale (formule note da Analisi I).
- Definizione di integrale di una funzione continua su un insieme normale di $\mathbb{R}^2$ tramite le "formule di riduzione".
- Scambio dell'ordine di integrazione: su un insieme normale rispetto a entrambi gli assi le due formule di riduzione danno lo stesso valore. Senza dimostrazione.
- Volume di un solido come integrale doppio.
- Definizione di integrale di una funzione continua su un insieme dato dall'unione di n insiemi normali aventi interni a due a due disgiunti.
- Definizione di baricentro di un insieme normale.
- Teorema di Guldino per il volume di un solido di rotazione. Senza dimostrazione.
- Definizione di dominio normale regolare e di dominio regolare in $\mathbb{R}^2$.
- Definizione di frontiera orientata positivamente di un dominio regolare in $\mathbb{R}^2$. Esempi: cerchio, corona circolare, complementare di un cerchio, semipiano superiore, semipiano inferiore.
- Continuità e derivabilità di funzioni del tipo $\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y)\, dy$ e formule di derivazione, vedi paragrafo 34 del libro di testo. Senza dimostrazione.
- Formule di Gauss-Green per domini regolari di $\mathbb{R}^2$. Dimostrazione.
- Teorema della divergenza (in $\mathbb{R}^2$). Dimostrazione.
- Teorema di Stokes (in $\mathbb{R}^2$). Dimostrazione.
- Formula di Stokes per forme differenziali. Conseguenze per forme chiuse, esatte, domini semplicemente connessi.
- Formule di integrazione per parti. Dimostrazione.
- Formule per l'area di un dominio regolare. Dimostrazione.

- Teorema di cambiamento di variabili negli integrali doppi. Senza dimostrazione.
- Formula di cambiamento di variabili da cartesiane a polari.

Integrali tripli:
- Insiemi normali di $\mathbb{R}^3$ rispetto al piano (x, y) o (x, z) o (y, z).
- Volume di un insieme normale.
- Insiemi normali regolari, insiemi regolari.
- Definizione di integrale di una funzione continua su un dominio normale di $\mathbb{R}^3$ tramite le formule di riduzione.
- Definizione di baricentro.
- Teorema di cambiamento di variabili per gli integrali tripli. Senza dimostrazione.
- Coordinate polari o sferiche in $\mathbb{R}^3$.
- Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$.

Superfici regolari in $\mathbb{R}^3$

- Definizione di superficie regolare in $\mathbb{R}^3$, sostegno di una superficie.
- Una matrice 3×2 ha rango 2 se e solo se il prodotto vettoriale delle sue due colonne è diverso dal vettore nullo. Dimostrazione.
- Definizione di superfici equivalenti.
- Superficie regolare generata dalla rotazione di una curva piana. Meridiani e paralleli. Esempi notevoli: sfera, cono, tronco di cono, paraboloide, toro.
- Il prodotto vettoriale $a \wedge b$ di due vettori $a, b \in \mathbb{R}^3$ è un vettore ortogonale al piano generato da a e b, cioè $(a \wedge b) \cdot (\lambda a + \mu b) = 0$ per ogni $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dimostrazione.
- Piano tangente ad una superficie: equazione parametrica ed equazione cartesiana. Direzione normale al piano tangente. Definizione di versore normale.
- Definizione di integrale di superficie di una funzione continua sul sostegno di una superficie regolare.
- Definizione di area di una superficie regolare.
- Teorema di Guldino per superfici di rotazione. Senza dimostrazione.
- Definizione di baricentro di una superficie regolare.
- Due superfici equivalenti hanno gli stessi integrali di superficie e la stessa area. Senza dimostrazione.
- Definizione di superficie regolare con bordo.
- Orientamento di una superficie (come verso del versore normale). Orientamento positivo del bordo.
- Definizione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie regolare.
- Formula di Stokes per superfici regolari con bordo. Senza dimostrazione.
- Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$. Senza dimostrazione.

Applicazione

L'applicazione dei teoremi e dei risultati astratti ai casi concreti proposti negli esercizi svolti a lezione fa parte del programma del corso.