Pietro Baldi

Analisi matematica II

Programma svolto nell'anno accademico 2014-2015, dal 9/3/2015 al 12/6/2015
Lezioni 1-23

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Biomedica, cognomi A-I.

Libri di testo. Il libro di testo adottato durante il corso è *Analisi Matematica Due*, N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori Editore, con l'eserciziario allegato. Alcuni argomenti sono trattati anche nelle mie dispense (pagina web su docenti.unina.it, cartella del materiale didattico).

Esercizi. Gli esempi ed esercizi svolti a lezione, gli esercizi assegnati per casa, e gli esercizi delle dispense non sono nominati esplicitamente qua sotto tra gli argomenti svolti, ma vanno considerati **parte integrante e fondamentale** del corso di Analisi matematica II.

Lezione 1 (lunedì 9/03/2014, ore 10:30-12:30, durata 2)

Successioni e serie di funzioni.
- Definizione di convergenza puntuale per successioni e serie di funzioni.
- Definizione di convergenza uniforme per successioni e serie di funzioni.
- Definizione di sup-norma di una funzione. Proprietà della sup-norma.
- Riformulazione equivalente della definizione di convergenza uniforme: $f_n \to f$ uniformemente in $A \subseteq \mathbb{R}$ (per $n \to \infty$) se e solo se $\|f_n - f\|_{\infty,A} \to 0$ (per $n \to \infty$).
- La convergenza uniforme implica quella puntuale. Dimostrazione.

Lezione 2 (venerdì 13/3/2014, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Teorema: il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua. Dimostrazione.
- Corollario: scambio dei segni $\lim_{n\to\infty}$ e $\lim_{x\to p}$. Dimostrazione.
- Corollario: scambio dei segni $\sum_{n=0}^{\infty}$ e $\lim_{x\to p}$. Dimostrazione.
- Definizione di convergenza totale di una serie di funzioni.
- Criterio di Weierstrass di convergenza per le serie di funzioni. Senza dimostrazione.
- Teorema: scambio dei segni $\lim_{n\to\infty}$ e $\int_a^b \, dx$ (teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale). Dimostrazione: fatta nel caso particolare in cui f_n sono funzioni continue. Dimostrazione nel caso generale: facoltativa.
- Corollario: scambio dei segni $\sum_{n=0}^{\infty}$ e $\int_a^b \, dx$ (teorema di integrazione di una serie termine a termine). Dimostrazione: assegnata per esercizio.
- Teorema: scambio dei segni $\lim_{n\to\infty}$ e $\frac{d}{dx}$ (teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata). Dimostrazione.
- Corollario: scambio dei segni $\sum_{n=0}^{\infty}$ e $\frac{d}{dx}$ (teorema di derivazione di una serie termine a termine). Dimostrazione: assegnata per esercizio.

Lezione 3 (lunedì 16/3/2014, ore 10:30-12:30, durata 2)

Calcolo differenziale in più variabili.
- Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$. Somma di due vettori, prodotto di un vettore per uno scalare.
- La base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$ di $\mathbb{R}^n$. Ogni vettore $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si scrive in modo unico come combinazione lineare $x = \sum_{k=1}^n x_k e_k$.
- Il prodotto scalare $x \cdot y$ in $\mathbb{R}^n$. Proprietà del prodotto scalare.
- Definizione di vettori ortogonali in $\mathbb{R}^n$.
- Definizione di norma euclidea $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{k=1}^n x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
- Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz. Dimostrazione.
- Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz scritta in componenti.
- Proprietà della norma euclidea, disuguaglianza triangolare, disuguaglianza sulla differenza delle norme. Dimostrazione.
- Osservazione: se $x = (x_1, \dots, x_n)$, allora $|x_k| \leq \|x\|$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Dimostrazione.
- Definizione di versore. Definizione di versore $\hat{x}$ di un vettore $x \neq 0$.
- Definizione di angolo tra due vettori non nulli.

Successioni di vettori di $\mathbb{R}^n$.
- Definizione di successione convergente in $\mathbb{R}^n$.

Lezione 4 (venerdì 20/3/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Proposizione (la convergenza di una successione in $\mathbb{R}^n$ equivale alla convergenza in $\mathbb{R}$ di tutte le sue componenti). Sia $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una successione in $\mathbb{R}^n$, di componenti $x_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$. Sia $p = (p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^n$. Allora $x_k \to p$ per $k \to \infty$ se e solo se per ogni $i = 1, \dots, n$ la successione delle i-esime componenti $x_{k,i}$ converge a p_i per $k \to \infty$. Dimostrazione.

Funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ (funzioni di più variabili reali a valori vettoriali).
- Esempi e casi speciali: curve ($n = 1$), funzioni scalari ($m = 1$).
- Definizione di limite di funzione "con ε, δ": sia $p \in \mathbb{R}^n$, $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^m$. Si dice che $\lim_{x\to p} f(x) = v$ se $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ tale che $\|f(x) - v\|_{\mathbb{R}^m} < \varepsilon$ per ogni $x \in A$, $x \neq p$, $\|x - p\|_{\mathbb{R}^n} < \delta$.
- Definizione di limite di funzione "per successioni".
- Teorema ponte per funzioni di più variabili a valori vettoriali: le due definizioni sono equivalenti. Senza dimostrazione.
- Definizione di funzione continua in un punto. Definizione di funzione continua in un insieme.
- Proposizione: una funzione $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ a valori in $\mathbb{R}^m$ è continua nel punto p se e solo se tutte le funzioni componenti $f_1, \dots, f_m$ sono continue nel punto p. Dimostrazione.
- La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$ è continua in $\mathbb{R}^n$. Dimostrazione.

Lezione 5 (lunedì 23/3/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Proposizione: la somma, il prodotto scalare e la composizione di funzioni continue è una funzione continua. Dimostrazione.
- Tecniche per lo studio della continuità di funzioni di più variabili: maggiorazioni, valori lungo rette o lungo curve scelte opportunamente.

Lezione 6 (venerdì 27/3/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$: definizione di palla, insieme aperto, insieme chiuso, insieme limitato, punto interno, punto esterno, punto di frontiera, insieme compatto, interno di un insieme, chiusura di un insieme, punto di accumulazione per un insieme.

- Teorema di Heine-Borel: un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Senza dimostrazione.
- Teorema di Weierstrass in $\mathbb{R}^n$. Senza dimostrazione (è quasi uguale a quella di Analisi 1).
- Definizione di derivata parziale $\partial_{x_k} f(p)$ della funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rispetto alla variabile x_k nel punto p.
- Significato geometrico delle derivate parziali per funzioni scalari di 2 variabili.
- Definizione di gradiente $\nabla f(p)$ di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nel punto p.
- Definizione di matrice jacobiana $J_f(p) = Df(p)$ di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ nel punto p.
- Nel caso $n = m$ (campo vettoriale), definizione di determinante jacobiano.
- Osservazione: l'esistenza di tutte le derivate parziali $\partial_{x_k} f(p)$ nel punto p non implica la continuità di f in p. Esempio.

Lezione 7 (lunedì 30/3/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Derivate parziali e gradiente della funzione $f(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$.
- Definizione di derivata direzionale.
- Definizione: una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice lineare se soddisfa: (1) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$; (2) $f(ax) = af(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$.
- Proposizione: una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è lineare se e solo se esiste una matrice A di m righe ed n colonne tale che $f(x) = Ax$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Dimostrazione: assegnata per esercizio.
- Definizione di funzione differenziabile in un punto, definizione di differenziale $df(p)$ della funzione f nel punto p.
- Proposizione: se una funzione f è differenziabile nel punto p, allora esistono tutte le derivate parziali di f in p, e $df(p)[h] = J_f(p)h$ per ogni $h \in \mathbb{R}^n$, cioè la matrice che rappresenta il differenziale di f in p è la matrice jacobiana di f in p. Dimostrazione.
- Conseguenza: f è differenziabile in p se e solo se esistono tutte le derivate parziali in p e $\|f(p + h) - f(p) - J_f(p)h\| = o(\|h\|)$ per $h \to 0$.
- Definizione di norma euclidea di una matrice.
- Proposizione: sia A una matrice $m \times n$. Allora $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Dimostrazione.
- Proposizione: sia f differenziabile in p. Allora f è continua in p. Dimostrazione.

Lezione 8 (venerdì 10/4/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Teorema del differenziale (enunciato per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, con n, m qualunque). Dimostrazione: fatta nel caso $n = 2$, $m = 1$.
- Differenziale della funzione composta: formula con le matrici jacobiane, anche riscritta per componenti. Senza dimostrazione.
- Esempio importante: $F(s) = f(x + sh)$, con $x, h \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$: formula $F'(s) = \nabla f(x + sh) \cdot h$.
- Conseguenza: formula per la derivata direzionale $\partial_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v$.

[La lezione di lunedì 13/4/2015 è saltata per disposizioni della Scuola Politecnica e delle Scienze di Base: aula B occupata dalle lauree.]

Lezione 9 (venerdì 17/4/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Interpretazione geometrica del gradiente $\nabla f(x)$ come direzione in cui è massima la crescita della funzione f a partire dal punto x.
- Definizione: $f : D \to \mathbb{R}$, con $D \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, è di classe $C^1(D)$ se tutte le sue derivate parziali esistono e sono continue in D.
- Definizione di sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}^n$.

- Proposizione: funzioni a gradiente nullo su un dominio connesso sono costanti. Senza dimostrazione (cenno dell'idea della dimostrazione).
- Formula di Taylor di ordine 1 con resto di Peano. Dimostrazione (è, di fatto, la definizione di differenziabilità).
- Formula di Taylor di ordine 1 con resto di Lagrange. Dimostrazione.
- Definizione di punto critico: p si dice punto critico per f se $\nabla f(p) = 0$.
- Definizione di punto di minimo/massimo, locale/globale, stretto/largo per funzioni reali di più variabili.
- Teorema di Fermat in più variabili. Dimostrazione.
- Studio di massimi e minimi tramite lo studio del segno della funzione intorno al punto.
- Definizione delle derivate parziali seconde, matrice hessiana $H_f(p) = D^2 f(p)$ di f nel punto p. Definizione di funzione di classe C^2 su un aperto di $\mathbb{R}^n$.
- Definizione: una matrice $n \times n$ si dice simmetrica se i suoi elementi soddisfano $a_{jk} = a_{kj}$ per ogni $j, k = 1, \ldots, n$.
- Teorema di Schwartz. Senza dimostrazione.
- Osservazione: se A è una matrice $n \times n$ di elementi a_{jk}, e $h = (h_1, \ldots, h_n)$ è un vettore di $\mathbb{R}^n$, allora $Ah \cdot h = \sum_{j,k=1}^{n} a_{jk} h_j h_k$. Dimostrazione.

Lezione 10 (lunedì 20/4/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Proposizione: formula per la derivata prima $F'(s) = \nabla f(x + sh) \cdot h$ e seconda $F''(s) = D^2 f(p)h \cdot h$ della funzione $F : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $F(s) = f(x + sh)$. Dimostrazione.
- Formula di Taylor di ordine 2 con resto in forma di Lagrange. Dimostrazione.
- Formula di Taylor di ordine 2 con resto in forma di Peano. Dimostrazione.
- Definizione di matrice quadrata $n \times n$ definita positiva, definita negativa, semidefinita positiva, semidefinita negativa, indefinita.
- Proposizione: la sfera dei versori $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ è un insieme compatto di $\mathbb{R}^n$. Cenno della dimostrazione.
- Caratterizzazione delle matrici definite. Dimostrazione.

Lezione 11 (venerdì 24/4/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Proposizione sul segno degli elementi a_{kk} della diagonale principale di una matrice definita, semidefinita, indefinita. Dimostrazione.
- Proposizione sul determinante di una matrice simmetrica 2×2. Senza dimostrazione.
- Condizioni necessarie del secondo ordine per massimi/minimi. Dimostrazione.
- Condizioni sufficienti del secondo ordine per massimi/minimi. Dimostrazione.

Lezione 12 (lunedì 27/4/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

Equazioni differenziali ordinarie.
- Equazioni differenziali in forma normale, ordine o grado di un'equazione differenziale, problemi di Cauchy di grado $1, 2, n$.
- Teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy. Senza dimostrazione.
- Teorema di esistenza di Peano per il problema di Cauchy. Senza dimostrazione.
- Teorema di esistenza e unicità globale per il problema di Cauchy. Senza dimostrazione.
- Proposizione: se f e $\partial_y f$ sono continue su $I \times J$, allora f è lipschitziana in y, uniformemente in t su $I \times J$. Dimostrazione.
- Corollario del teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy (due soluzioni non si toccano): se $u' = f(t, u)$, $v' = f(t, v)$ e $u(t_0) < v(t_0)$, allora $u(t) < v(t)$ per ogni t in cui entrambe le soluzioni siano definite. Senza dimostrazione rigorosa (idea della dimostrazione).
- Equazioni a variabili separabili. Esempi, metodo generale, e soluzioni costanti (equilibrio).

Lezione 13 (lunedì 4/5/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Formula risolutiva per l'equazione $u' + a(t)u = 0$.
- Formula risolutiva per l'equazione $u' + a(t)u = b(t)$.

Equazioni riconducibili ad equazioni a variabili separabili mediante sostituzione:
- Equazioni della forma $u' = g(u/t)$.
- Equazioni di Bernoulli $u' + a(t)u + b(t)u^p = 0$.
- Equazioni della forma $u' = g(at + bu + c)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- Equazioni della forma $u' = g(\frac{at+bu+c}{At+Bu+C})$, con $a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}$: facoltative.

Equazioni differenziali lineari.
- Definizione: le equazioni differenziali lineari di grado n sono quelle della forma $\mathcal{L}u = b(t)$, dove la scrittura $\mathcal{L}u$ è un'abbreviazione per indicare $\mathcal{L}u := u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)u' + a_0(t)u$. Se $b = 0$ si dicono omogenee, altrimenti si dicono non omogenee.
- Proprietà: $\mathcal{L}(u + v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v$, $\mathcal{L}(\lambda u) = \lambda\mathcal{L}u$, per ogni funzione $u(t), v(t)$, per ogni costante $\lambda \in \mathbb{R}$. Dimostrazione.

Lezione 14 (venerdì 8/5/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Proposizione: l'insieme $S := \{u : \mathcal{L}u = 0\}$ (insieme delle soluzioni dell'equazione omogenea $\mathcal{L}u = 0$) è uno spazio vettoriale, e l'insieme $\{u_1, \ldots, u_n\}$, dove u_k è soluzione del problema di Cauchy $\mathcal{L}u = 0$ con dato iniziale $e_k = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$, è una sua base. Senza dimostrazione.
- Proposizione: sia $\mathcal{L}\bar{u} = b(t)$. Allora $\{u : \mathcal{L}u = b(t)\} = \{u = \bar{u} + v : \mathcal{L}v = 0\}$. Dimostrazione.
- Metodo di variazione delle costanti (fatto in dettaglio per equazioni differenziali di ordine 2, solo accennato per ordine ≥ 3).
- Teorema del Wronskiano. Senza dimostrazione.
- Esempio significativo di variazione delle costanti: equazione $u'' + 4u = b(t)$.
- Equazioni lineari a coefficienti costanti: definizione di polinomio caratteristico.
- Teorema fondamentale dell'algebra: ogni polinomio di grado n a coefficienti complessi ha n radici complesse; inoltre se i coefficienti del polinomio sono reali allora le sue radici sono numeri reali o coppie di numeri complessi coniugati. Senza dimostrazione.
- Teorema: legame tra le radici del polinomio caratteristico e le soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea $\mathcal{L}u = 0$. Senza dimostrazione.
- Metodo per la ricerca di soluzioni particolari di equazioni lineari non omogenee $\mathcal{L}u = b(t)$ nel caso in cui $b(t)$ sia un polinomio, o un esponenziale, o un seno, o un coseno, oppure una combinazione data da somme e prodotti di questi ingredienti elementari.

[Lezione di venerdì 15/5/2015: saltata per la giornata Open Day di Ingegneria.]

Lezione 15 (lunedì 18/5/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

Curve in $\mathbb{R}^n$.
- Definizione di curva in $\mathbb{R}^n$, curva chiusa, curva regolare, vettore tangente, versore tangente.
- Equazione della retta tangente ad una curva: equazioni in forma parametrica e in forma cartesiana.
- Definizione di diffeomorfismo tra intervalli $g : [a, b] \to [c, d]$. Definizione di curve equivalenti.
- Verso di percorrenza, definizione: $\varphi(t_1)$ precede $\varphi(t_2)$ se $t_1 < t_2$.
- Definizione di lunghezza $L(\varphi)$ di una curva φ. Definizione di integrale curvilineo $\int_\varphi f$ di una funzione f lungo una curva φ.

Lezione 16 (venerdì 22/5/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Proposizione: se φ e ψ sono due curve equivalenti, allora $\int_\varphi f = \int_\psi f$ per ogni funzione f; in particolare $L(\varphi) = L(\psi)$. Dimostrazione.
- Baricentro di una curva.
- Ascissa curvilinea. Proprietà dell'ascissa curvilinea.
- Osservazione: se una curva φ ha norma $\|\varphi(t)\| =$ costante, allora $\varphi(t) \circ \varphi'(t) = 0$ per ogni t. Dimostrazione.

Lezione 17 (lunedì 25/5/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

Forme differenziali in $\mathbb{R}^n$.
- Definizione di forma differenziale su $\mathbb{R}^n$, di campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$, e corrispondenza tra le due nozioni.
- Definizione di dx_k, notazione $\omega(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)dx_k$, definizione di spazio duale $(\mathbb{R}^n)^*$ come insieme delle funzioni lineari di $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (cioè le funzioni che si rappresentano come una matrice riga).
- Definizione di forma differenziale di classe $C^k(D)$.
- Esempio importante: $\omega(x) = df(x)$ (il differenziale di una funzione scalare).
- Definizione di forma esatta, definizione di primitiva di una forma differenziale.
- Definizione di campo gradiente, definizione di potenziale di un campo gradiente.
- Definizione di integrale $\int_\varphi \omega$ di una forma differenziale ω lungo una curva φ.
- Proposizione: integrale di una forma differenziale lungo due curve equivalenti. Dimostrazione.
- Definizione di lavoro di un campo vettoriale lungo una curva.
- Teorema: se ω è esatta, allora $\int_\varphi \omega = f(x_1) - f(x_0)$, dove f è una primitiva di ω, x_0 è il punto iniziale della curva φ, e x_1 quello finale. Dimostrazione.
- Similmente, il lavoro di un campo gradiente lungo una curva è dato dalla differenza di potenziale nei punti finale e iniziale.
- Teorema di caratterizzazione delle forme esatte. Senza dimostrazione.

Lezione 18 (venerdì 29/5/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Definizione di forma differenziale chiusa su un dominio D.
- Proposizione: le forme esatte di classe C^1 sono forme chiuse. Dimostrazione.
- Esempio significativo di forma chiusa $\omega(x, y)$ che non è esatta.
- Definizione (non rigorosa) di insieme semplicemente connesso.
- Teorema: se ω è forma chiusa in D e D è semplicemente connesso, allora ω è esatta. Senza dimostrazione.
- Corrispondenza tra forme differenziali e campi vettoriali: forme esatte/campi gradiente; primitiva di una forma/potenziale di un campo; integrale di una forma differenziale lungo una curva/lavoro del campo lungo la curva.

Integrali doppi.
- Definizione di insieme $D \subseteq \mathbb{R}^2$ normale rispetto a x o rispetto a y. Area di un insieme normale D.
- Definizione di integrale doppio $\int_D f(x, y)\, dxdy$ di una funzione continua f su un dominio normale D (definizione tramite le formule di riduzione).
- Integrale $\int_D f$ con D formato dall'unione di insiemi normali $D_1, \ldots, D_n$ che hanno in comune solo porzioni di bordo.

Lezione 19 (lunedì 1/6/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Formula per il volume dei solidi normali: se $E \subset \mathbb{R}^3$ è un solido della forma $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ 0 \leq z \leq f(x, y)\}$, allora il suo volume è $\mathrm{Vol}\,(E) = \int_D f(x, y)\, dxdy$.
- Baricentro di una regione piana.

- Definizione di frontiera orientata positivamente $+\partial D$ di una regione piana D.
- Teorema: formule di Gauss-Green nel piano. Senza dimostrazione. (Assegnata per esercizio la dimostrazione nel caso di un rettangolo).
- Applicazione delle formula di Gauss-Green al calcolo degli integrali curvilinei di forme differenziali in dimensione 2.
- Teorema di cambiamento di variabili per integrali doppi. Senza dimostrazione.
- Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$.

Lezione 20 (giovedì 4/6/2015, ore 8:30-10:30, durata 2)

[Lezione anticipata di un giorno: venerdì 5/6/2015 attività didattiche sospese in tutto l'Ateneo per l'evento "Buon Compleanno Federico II"]

Integrali tripli.
- Definizione di integrale triplo $\int_E f(x, y, z)\, dxdydz$ di una funzione continua f su un dominio normale $E \subset \mathbb{R}^3$ (definizione tramite le formule di riduzione).
- Teorema di cambiamento di variabili per integrali tripli. Senza dimostrazione.
- Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$. Significato geometrico.
- Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$.
- Baricentro di un volume $E \subset \mathbb{R}^3$.
- Formula per il volume dei solidi: il volume di un solido $E \subset \mathbb{R}^3$ è $\mathrm{Vol}(E) = \int_E 1\, dxdydz$.

Superfici.
- Definizione di superficie regolare $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (superficie bi-dimensionale nello spazio $\mathbb{R}^3$).
- Definizione di prodotto vettoriale $u \wedge v$ tra due vettori $u, v \in \mathbb{R}^3$.
- Equazione parametrica del piano tangente ad una superficie (sviluppo di Taylor di ordine 1).
- Definizione di versore normale $\widehat{N}$ ad una superficie.
- Definizione di integrale superficiale $\int_\varphi f$ di una funzione scalare $f(x, y, z)$ su una superficie φ. Area della superficie.

Lezione 21 (lunedì 8/6/2015, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Definizione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.
- Orientamento di una superficie: è dato dal verso del versore normale.
- Proposizione: flusso di un campo vettoriale attraverso superfici equivalenti. Senza dimostrazione.
- Orientamento positivo del bordo di una superficie.
- Definizione di rotore $\mathrm{rot}\, f$ e divergenza $\mathrm{div}\, f$ di un campo vettoriale f di $\mathbb{R}^3$.
- Teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$. Senza dimostrazione.
- Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$. Senza dimostrazione.

Lezione 22 (lunedì 8/6/2015, ore 12:30-14:30, durata 2)

Il teorema della funzione implicita.
- Teorema di Dini (teorema della funzione implicita in $\mathbb{R}^2$). Senza dimostrazione.
- Formule per le derivate della funzione implicita.
- Sviluppo di Taylor della funzione implicita.

Lezione 23 (venerdì 12/6/2015, ore 10:30-13:30, durata 3)

- Massimi e minimi vincolati: definizione, metodo di parametrizzazione globale del vincolo. Esempio: caso in cui il vincolo è una circonferenza (accennato).
- Esercitazione: simulazione di prova scritta.