Pietro Baldi

# Analisi matematica II

Programma svolto nell'anno accademico 2016-2017, dal 6 marzo al 7 giugno 2017
Lezioni 1-36, corso da 9 CFU

Corso di Laurea Triennale in Ingegneria Meccanica, matricola N47, cognomi F-R

**Libro di testo.** Il libro di testo adottato durante il corso è *Analisi Matematica Due*, N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Liguori Editore, con l'eserciziario allegato. Alcuni argomenti sono trattati anche nelle mie dispense (pagina web su docenti.unina.it, cartella del materiale didattico).

**Esercizi.** Gli esempi e gli esercizi svolti a lezione e gli esercizi assegnati per casa non sono nominati esplicitamente qua sotto tra gli argomenti svolti, ma vanno considerati **parte integrante e fondamentale** del corso di Analisi matematica II.

### Lezione 1 (lunedì 6/03/2017, ore 12:30-14:30, durata 2)

*Successioni e serie di funzioni*
- Definizione di convergenza puntuale per successioni di funzioni.

### Lezione 2 (mercoledì 8/3/2017, ore 10:30-12:30, durata 2)

- Definizione di convergenza puntuale per serie di funzioni.
- Definizione di convergenza uniforme per successioni e serie di funzioni.
- Definizione di sup-norma di una funzione. Proprietà della sup-norma.
- Riformulazione equivalente della definizione di convergenza uniforme: $f_n \to f$ uniformemente in $A \subseteq \mathbb{R}$ (per $n \to \infty$) se e solo se $\|f_n - f\|_{\infty,A} \to 0$ (per $n \to \infty$).

### Lezione 3 (giovedì 9/3/2017, ore 8:30-10:30, durata 2)

- Richiamo di Analisi 1: le code di serie convergenti sono infinitesime. Dimostrazione.
- La convergenza uniforme implica quella puntuale. Dimostrazione.
- Teorema: la convergenza uniforme preserva la continuità (cioè: il limite uniforme di una successione di funzioni continue è una funzione continua). Dimostrazione.

### Lezione 4 (lunedì 13/3/2017, ore 12:30-14:30, durata 2)

- Corollario: scambio dei segni $\lim_{n\to\infty}$ e $\lim_{x\to p}$. Dimostrazione.
- Corollario: scambio dei segni $\sum_{n=0}^{\infty}$ e $\lim_{x\to p}$. Dimostrazione.
- Definizione di convergenza totale di una serie di funzioni.
- Criterio di Weierstrass per le serie di funzioni: la convergenza totale implica quella uniforme. Dimostrazione.
- Richiamo di Analisi 1: $(i)$ per $a \le b$ si ha $|\int_a^b f| \le \int_a^b |f|$; $(ii)$ per $p, q \in \mathbb{R}$ si ha $|\int_p^q f| \le \int_{\min\{p,q\}}^{\max\{p,q\}} |f| = |\int_p^q |f||$. Dimostrazione.
- Teorema: scambio dei segni $\lim_{n\to\infty}$ e $\int_a^b\, dx$ (teorema di passaggio al limite sotto il segno di integrale). Dimostrazione (fatta nel caso particolare in cui $f_n$ sono funzioni continue; nel caso generale: facoltativa).
- Corollario: scambio dei segni $\sum_{n=0}^{\infty}$ e $\int_a^b\, dx$ (teorema di integrazione di una serie termine a termine). Dimostrazione: assegnata per esercizio.

**Lezione 5 (mercoledì 15/3/2017, ore 10:30-12:30, durata 2)**

- Teorema: scambio dei segni $\lim_{n\to\infty}$ e $\frac{d}{dx}$ (teorema di passaggio al limite sotto il segno di derivata). Dimostrazione.
- Corollario: scambio dei segni $\sum_{n=0}^{\infty}$ e $\frac{d}{dx}$ (teorema di derivazione di una serie termine a termine). Dimostrazione: assegnata per esercizio.

*Serie di potenze*
- Definizione di serie di potenze.
- Lemma di Abel. Dimostrazione.
- Definizione di raggio di convergenza di una serie di potenze.
- Proposizione: legame tra il raggio di convergenza e l'insieme di convergenza della serie. Dimostrazione.

**Lezione 6 (giovedì 16/3/2017, ore 8:30-10:30, durata 2)**

- Criterio del rapporto e della radice per il raggio di convergenza di una serie di potenze. Dimostrazione.
- Definizione di serie derivata di una serie di potenze.
- Teorema: una serie di potenze e la sua serie derivata hanno lo stesso raggio di convergenza. Dimostrazione.
- Corollario: una serie di potenze di raggio di convergenza $R > 0$ è derivabile infinite volte in $(-R, R)$ e coincide con la sua serie di Taylor in $(-R, R)$. Dimostrazione.

**Lezione 7 (lunedì 20/3/2017, ore 12:30-14:30, durata 2)**

*Lo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^n$*
- Richiami di algebra lineare: vettori, scalari. Somma di due vettori, prodotto di un vettore per uno scalare. La base canonica $\{e_1, \dots, e_n\}$ di $\mathbb{R}^n$. Ogni vettore $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ si scrive in modo unico come combinazione lineare $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.
- Il prodotto scalare $x \cdot y$ in $\mathbb{R}^n$. Proprietà del prodotto scalare.
- Definizione di vettori ortogonali in $\mathbb{R}^n$.
- Definizione di norma euclidea $\|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$.
- Proprietà elementari della norma euclidea, inclusa questa: se $x = (x_1, \dots, x_n)$, allora $|x_k| \leq \|x\|$ per ogni $k = 1, \dots, n$. Dimostrazione.
- Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz, anche scritta in componenti. Dimostrazione.
- Disuguaglianza triangolare, disuguaglianza sulla differenza delle norme. Dimostrazione.
- Richiamo di algebra elementare: relazione tra il segno del polinomio di secondo grado $ax^2 + bx + c$ e il segno del suo discriminante $\Delta = b^2 - 4ac$.
- Definizione di versore. Definizione di versore $\hat{x}$ di un vettore $x \neq 0$.
- Definizione di angolo tra due vettori non nulli.

*Successioni di vettori di $\mathbb{R}^n$*
- Definizione di successione convergente in $\mathbb{R}^n$.

**Lezione 8 (mercoledì 22/3/2017, ore 10:30-12:30, durata 2)**

- Proposizione: la convergenza di una successione in $\mathbb{R}^n$ equivale alla convergenza in $\mathbb{R}$ di tutte le sue componenti. Dimostrazione.
- Successioni che convergono lungo direzioni e lungo curve diverse in $\mathbb{R}^n$: differenza tra il caso unidimensionale $n = 1$ e i casi $n \geq 2$.

*Funzioni di più variabili reali a valori vettoriali*
- Esempi di funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$.

- Casi speciali: curve ($n = 1$), funzioni scalari ($q = 1$), interpretazione geometrica del grafico di funzioni scalari di 2 variabili ($n = 2$, $q = 1$).
- Definizione di limite di funzione "con $\varepsilon, \delta$".
- Definizione di limite di funzione "per successioni".
- Teorema ponte per funzioni di più variabili a valori vettoriali: le due definizioni sono equivalenti. Senza dimostrazione.

**Lezione 9 (giovedì 23/3/2017, ore 8:30-10:30, durata 2)**

- Definizione di funzione continua in un punto. Definizione di funzione continua in un insieme.
- Proposizione: una funzione $f(x) = (f_1(x), \ldots, f_q(x))$ a valori in $\mathbb{R}^q$ è continua nel punto $p$ se e solo se tutte le funzioni componenti $f_1, \ldots, f_q$ sono continue nel punto $p$. Dimostrazione.
- La funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|$ è continua in $\mathbb{R}^n$. Dimostrazione.
- Proposizione: la somma, il prodotto scalare e la composizione di funzioni continue è una funzione continua. Dimostrazione (per somma e composizione).
- Tecniche per lo studio della continuità di funzioni di più variabili: maggiorazioni, valori lungo rette o lungo curve scelte opportunamente.

**Lezione 10 (lunedì 27/3/2017, ore 12:30-14:30, durata 2)**

*Topologia di $\mathbb{R}^n$*
- Sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$: definizione di palla aperta, palla chiusa, insieme aperto, insieme chiuso, insieme limitato, punto interno, punto esterno, punto di frontiera, interno di un insieme, chiusura di un insieme, frontiera di un insieme, punto di accumulazione per un insieme, insieme compatto.
- Teorema di Heine-Borel: un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato. Senza dimostrazione.

- Teorema di Weierstrass in $\mathbb{R}^n$. Senza dimostrazione (è quasi uguale a quella di Analisi 1).
- Richiamo di Analisi 1: per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha $|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$. Dimostrazione.

**Lezione 11 (mercoledì 29/3/2017, ore 10:30-12:30, durata 2)**

*Calcolo differenziale in più variabili*
- Definizione di derivata parziale $\partial_{x_k} f(p)$ della funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ rispetto alla variabile $x_k$ nel punto $p$.
- Significato geometrico delle derivate parziali per funzioni scalari di 2 variabili.
- Definizione di gradiente $\nabla f(p)$ di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ nel punto $p$.
- Definizione di matrice jacobiana $J_f(p) = Df(p)$ di una funzione $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ nel punto $p$.
- Nel caso $n = q$ (campo vettoriale), definizione di determinante jacobiano.
- Osservazione: l'esistenza di tutte le derivate parziali $\partial_{x_k} f(p)$ nel punto $p$ non implica la continuità di $f$ in $p$. Esempi.
- Derivate parziali e gradiente della funzione $f(x) = \|x\|$, $x \in \mathbb{R}^n$.
- Definizione di derivata direzionale.
- Definizione di funzione lineare: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ si dice lineare se soddisfa: ($i$) $f(x + y) = f(x) + f(y)$ per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$; ($ii$) $f(ax) = af(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$, $a \in \mathbb{R}$.
- Proposizione: una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ è lineare se e solo se esiste una matrice $A$ di $q$ righe ed $n$ colonne tale che $f(x) = Ax$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Senza dimostrazione.
- Definizione di funzione differenziabile in un punto, definizione di differenziale $df(p) = f'(p)$ della funzione $f$ nel punto $p$.

**Lezione 12 (giovedì 30/3/2017, ore 8:30-10:30, durata 2)**

- Proposizione: se una funzione $f$ è differenziabile nel punto $p$, allora esistono tutte le derivate parziali di $f$ in $p$, e $f'(p)[h] = J_f(p)h$ per ogni $h \in \mathbb{R}^n$, cioè la matrice che rappresenta il differenziale di $f$ in $p$ è la matrice jacobiana di $f$ in $p$. (Dimostrazione rimandata a Lezione 14).
- Conseguenza: $f$ è differenziabile in $p$ se e solo se esistono tutte le derivate parziali in $p$ e $\|f(p+h) - f(p) - J_f(p)h\| = o(\|h\|)$ per $h \to 0$.
- Osservazione: $\partial_{x_k} f(p) = F'(0)$, dove $F(s) = f(p + se_k)$; più in generale, $\partial_v f(p) = F'(0)$, dove $F(s) = f(p + sv)$.
- Definizione di norma euclidea di una matrice.
- Proposizione: sia $A$ una matrice $n \times q$. Allora $\|Ax\| \leq \|A\|\|x\|$ per ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Dimostrazione.
- Proposizione: sia $f$ differenziabile in $p$. Allora $f$ è continua in $p$. Dimostrazione.
- Metodi per lo studio della differenziabilità di funzioni di più variabili: maggiorazioni, valori lungo rette o lungo curve scelte opportunamente.

**Lezione 13 (lunedì 3/4/2017, ore 12:30-14:30, durata 2)**

Esercitazione (prima prova intercorso, aperta a tutti gli studenti).

**Lezione 14 (mercoledì 5/4/2017, ore 10:30-12:30, durata 2)**

- Dimostrazione lasciata in sospeso da Lezione 12.
- Teorema del differenziale (enunciato per funzioni $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$, con $n, q$ qualunque). Dimostrazione: fatta nel caso $n = 2$, $q = 1$.
- Formula della matrice jacobiana della funzione composta $J_{g \circ f}(p) = J_g(f(p))J_f(p)$, anche riscritta per componenti. Senza dimostrazione.
- Caso particolare: derivata della funzione $F(t) = f(\varphi(t))$, dove $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $\varphi$ è curva in $\mathbb{R}^n$.
- Definizione: $f : A \to \mathbb{R}$, con $A \subseteq \mathbb{R}^n$ aperto, è di classe $C^1(A)$ se tutte le sue derivate parziali esistono e sono continue in $A$.

**Lezione 15 (giovedì 6/4/2017, ore 8:30-10:30, durata 2)**

- Caso particolare della derivata della funzione composta: se $F(s) = f(x + sh)$, con $x, h \in \mathbb{R}^n$, $s \in \mathbb{R}$, si ha la formula $F'(s) = \nabla f(x + sh) \cdot h$.
- Conseguenza: formula per la derivata direzionale $\partial_v f(x) = \nabla f(x) \cdot v$.
- Interpretazione geometrica del gradiente $\nabla f(x)$ come direzione in cui è massima la crescita della funzione $f$ a partire dal punto $x$.
- Definizione di sottoinsieme connesso di $\mathbb{R}^n$.
- Proposizione: funzioni a gradiente nullo su un dominio connesso sono costanti. Senza dimostrazione (cenno dell'idea della dimostrazione).
- Formula di Taylor di ordine 1 con resto di Peano. Dimostrazione (di fatto non c'è niente da dimostrare: è la definizione di differenziabilità).
- Formula di Taylor di ordine 1 con resto di Lagrange. Dimostrazione.
- Definizione di punto critico: $p$ si dice punto critico per $f$ se $\nabla f(p) = 0$.
- Definizione di punto di minimo/massimo, locale/globale, stretto/largo per funzioni reali di più variabili.
- Definizione di punto di sella: punto critico che non è di massimo né di minimo. (In senso più stringente: descrizione della geometria della sella).
- Teorema di Fermat in più variabili. Dimostrazione.
- Studio di massimi e minimi tramite lo studio del segno dei valori $f(x) - f(p)$ intorno al punto $p$.

**Lezione 16 (lunedì 10/4/2017, ore 12:30-14:30, durata 2)**

- Definizione di derivate parziali seconde, matrice hessiana $H_f(p) = D^2 f(p)$ di $f$ nel punto $p$. Definizione di funzione di classe $C^2$ su un aperto di $\mathbb{R}^n$.
- Definizione: una matrice $n \times n$ si dice simmetrica se i suoi elementi soddisfano $a_{jk} = a_{kj}$ per ogni $j, k = 1, \ldots, n$.
- Teorema di Schwarz. Senza dimostrazione.
- Osservazione: se $A$ è una matrice $n \times n$ di elementi $a_{jk}$, e $h = (h_1, \ldots, h_n)$ è un vettore di $\mathbb{R}^n$, allora $Ah \cdot h = \sum_{j,k=1}^n a_{jk} h_j h_k$. Dimostrazione.
- Proposizione: se $f$ è di classe $C^2$, la funzione composta $F(s) = f(x + sh)$, con $x, h \in \mathbb{R}^n$ fissati, ha derivata prima $F'(s) = \nabla f(x + sh) \cdot h$ e derivata seconda $F''(s) = D^2 f(p)h \cdot h$. Dimostrazione.
- Proposizione: la composizione di due funzioni di classe $C^1$ è di classe $C^1$; la composizione di due funzioni di classe $C^2$ è di classe $C^2$. Senza dimostrazione.
- Formula di Taylor di ordine 2 con resto in forma di Lagrange. Dimostrazione.
- Formula di Taylor di ordine 2 con resto in forma di Peano. Dimostrazione.
- Definizione di matrice quadrata $n \times n$ definita positiva, definita negativa, definita, semidefinita positiva, semidefinita negativa, semidefinita, indefinita.
- Proposizione: la sfera dei versori $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ è un insieme compatto di $\mathbb{R}^n$. Cenno della dimostrazione.
- Caratterizzazione delle matrici definite. Dimostrazione.

**Lezione 17 (lunedì 10/4/2017, ore 14:30-16:30, durata 2)**

- Proposizione: il segno di una matrice è dato dai suoi autovalori: se gli autovalori di $A$ sono tutti positivi, allora $A$ è definita positiva; se sono tutti negativi, $A$ è definita negativa; se sono tutti $\geq 0$, $A$ è semidefinita positiva; se sono tutti $\leq 0$, $A$ è semidefinita negativa; se $A$ ha un autovalore positivo e uno negativo, allora $A$ è indefinita. Senza dimostrazione.
- Osservazione: $Ae_k \cdot e_k = a_{kk}$. Di conseguenza, se $A$ è matrice definita positiva, allora gli elementi della diagonale $a_{kk}$ sono tutti positivi; se $A$ è semidefinita positiva, allora $a_{kk}$ sono tutti $\geq 0$; se $A$ è definita negativa, allora $a_{kk}$ sono tutti $< 0$; se $A$ è semidefinita negativa, allora $a_{kk}$ sono tutti $\leq 0$; se la diagonale contiene un elemento positivo e uno negativo, allora $A$ è indefinita.
- Proposizione sul determinante di una matrice simmetrica $2 \times 2$. Senza dimostrazione.
- Condizioni necessarie del secondo ordine per massimi/minimi. Dimostrazione.
- Condizioni sufficienti del secondo ordine per massimi/minimi. Dimostrazione.
- Classificazione dei punti critici di una funzione in base alla sua matrice hessiana.

**Lezione 18 (mercoledì 12/4/2017, ore 10:30-12:30, durata 2)**

- Classificazione dei punti critici in presenza di struttura "differenza di quadrati" e, più in generale, classificazione dei punti critici utilizzando i valori della funzione lungo curve scelte opportunamente.
- Tecniche elementari per stabilire se punti di massimo/minimo locali sono anche globali: studio dei valori della funzione lungo curve scelte opportunamente.
- Definizione di punti di massimo/minimo vincolato.
- Studio di massimi e minimi vincolati in situazioni semplici (circonferenza, ellisse) tramite parametrizzazione globale del vincolo.

**Lezione 19 (lunedì 24/4/2017, ore 12:30-14:30, durata 2)**

- Teorema di Dini della funzione implicita. Dimostrazione.
- Teorema sulle derivate della funzione implicita: se $F \in C^k$, anche $f \in C^k$. Senza dimostrazione.
- Calcolo delle derivate della funzione implicita.

- Sviluppo di Taylor della funzione implicita.

**Lezione 20 (mercoledì 26/4/2017, ore 10:30-12:30, durata 2)**

- Teorema dei moltiplicatori di Lagrange (in $\mathbb{R}^2$). Dimostrazione.
- Teorema della funzione implicita in dimensione qualunque. Senza dimostrazione.
- Teorema dei moltiplicatori di Lagrange in dimensione qualunque. Senza dimostrazione.

**Lezione 21 (giovedì 27/4/2017, ore 8:30-10:30, durata 2)**

- Applicazione del teorema dei moltiplicatori di Lagrange: la media geometrica è minore o uguale alla media aritmetica.
- Utilizzo del teorema dei moltiplicatori di Lagrange per lo studio di massimi e minimi vincolati.

**Lezione 22 (mercoledì 3/5/2017, ore 10:30-12:30, durata 2)**

*Equazioni differenziali ordinarie*
- Equazioni differenziali in forma normale, ordine o grado di un'equazione differenziale, problemi di Cauchy di grado $1, 2, n$.
- Teorema di esistenza e unicità locale per il problema di Cauchy. Senza dimostrazione.
- Teorema di esistenza locale di Peano per il problema di Cauchy. Senza dimostrazione.
- Teorema di esistenza globale per il problema di Cauchy. Senza dimostrazione.
- Teorema di regolarità delle soluzioni: se $f \in C^k$, allora $u \in C^{k+1}$. Senza dimostrazione.
- Proposizione: se $f$ e $\partial_y f$ sono continue su $I \times J$, allora $f$ è lipschitziana in $y$, uniformemente in $t$ su $I \times J$. Dimostrazione.
- Corollario del teorema di esistenza e unicità del problema di Cauchy (le soluzioni non si toccano): se $u' = f(t, u)$, $v' = f(t, v)$ e $u(t_0) < v(t_0)$, allora $u(t) < v(t)$ per ogni $t$ nell'intervallo in cui entrambe le soluzioni sono definite. Senza dimostrazione rigorosa (idea della dimostrazione).
- Esempio di problema di Cauchy con più soluzioni.

**Lezione 23 (giovedì 4/5/2017, ore 8:30-10:30, durata 2)**

- Equazioni a variabili separabili: soluzioni costanti (dette equilibri), metodo generale di risoluzione.
- Formula risolutiva per l'equazione $u' + a(t)u = 0$ (lineare, di primo grado, omogenea, a variabili separabili).
- Formula risolutiva per l'equazione $u' + a(t)u = b(t)$ (lineare, di primo grado, non omogenea). Come si ottiene la formula.
- Equazioni riconducibili ad equazioni a variabili separabili mediante sostituzione.

**Lezione 24 (lunedì 8/5/2017, ore 16:30-18:30, durata 2)**

Equazioni riconducibili ad equazioni a variabili separabili mediante sostituzione particolare:
- Equazioni della forma $u' = g(u/t)$.
- Equazioni di Bernoulli $u' + a(t)u + b(t)u^p = 0$.
- Equazioni della forma $u' = g(at + bu + c)$, con $a, b, c \in \mathbb{R}$.
- Equazioni della forma $u' = g(\frac{at+bu+c}{At+Bu+C})$, con $a, b, c, A, B, C \in \mathbb{R}$: facoltative.

*Equazioni differenziali lineari*
- Definizione: le equazioni differenziali lineari di grado $n$ sono quelle della forma $\mathcal{L}u = b(t)$, dove la scrittura $\mathcal{L}u$ è un'abbreviazione per indicare $\mathcal{L}u := u^{(n)} + a_{n-1}(t)u^{(n-1)} + \ldots + a_1(t)u' + a_0(t)u$. Se $b = 0$ si dicono omogenee, altrimenti si dicono non omogenee.

- Osservazione: le equazioni lineari hanno esistenza globale.
- Proprietà delle equazioni lineari: $\mathcal{L}(u+v) = \mathcal{L}u + \mathcal{L}v$, $\mathcal{L}(\lambda u) = \lambda \mathcal{L}u$ per ogni funzione $u(t), v(t)$ e ogni costante $\lambda \in \mathbb{R}$. Dimostrazione.
- Proposizione: l'insieme $S := \{u : \mathcal{L}u = 0\}$ (insieme delle soluzioni dell'equazione lineare omogenea $\mathcal{L}u = 0$) è uno spazio vettoriale, e una sua base è l'insieme $\{u_1, \dots, u_n\}$, dove $u_k$ è la soluzione del problema di Cauchy $\mathcal{L}u = 0$ con dato iniziale $e_k = (0, \dots, 1, 0, \dots, 0)$. Senza dimostrazione.
- Proposizione (soluzioni di un'equazione lineare non omogenea): sia $\mathcal{L}\bar{u} = b(t)$. Allora $\{u : \mathcal{L}u = b(t)\} = \{u = \bar{u} + v : \mathcal{L}v = 0\}$. Dimostrazione.

**Lezione 25 (mercoledì 10/5/2017, ore 10:30-12:30, durata 2)**

- Richiamo di algebra lineare e precisazione: cosa significa "sistema di generatori" e "linearmente indipendenti" nel contesto dello spazio vettoriale $S$ (vedi sopra), in cui i "vettori" sono funzioni $u(t)$.
- Metodo di variazione delle costanti (in dettaglio per equazioni di ordine 2; cenno a cosa cambia per ordine $\geq 3$).
- Matrice wronskiana. Teorema del wronskiano. Senza dimostrazione. Enunciato anche per equazioni di grado $n$.
- Esempio significativo di variazione delle costanti: equazione $u'' + 4u = b(t)$.
- Metodo "di similitudine" per la risoluzione di equazioni lineari non omogenee in casi semplici.

**Lezione 26 (giovedì 11/5/2017, ore 8:30-10:30, durata 2)**

- Equazioni lineari a coefficienti costanti: definizione di polinomio caratteristico.
- Teorema fondamentale dell'algebra: ogni polinomio di grado $n$ a coefficienti complessi ha $n$ radici complesse; inoltre se i coefficienti del polinomio sono reali allora le sue radici sono numeri reali o coppie di numeri complessi coniugati. Senza dimostrazione.
- Richiamo di algebra: molteplicità algebrica delle radici dei polinomi.
- Teorema: legame tra le radici del polinomio caratteristico e le soluzioni linearmente indipendenti dell'equazione differenziale omogenea $\mathcal{L}u = 0$. Senza dimostrazione.
- Metodo "di similitudine" per la ricerca di soluzioni particolari di equazioni lineari non omogenee $\mathcal{L}u = b(t)$ nel caso in cui $b(t)$ sia un polinomio, o un esponenziale, o un seno, o un coseno, oppure una combinazione data da somme e prodotti di questi ingredienti. "Principio di sovrapposizione" per equazioni lineari.

**Lezione 27 (mercoledì 17/5/2017, ore 10:30-12:30, durata 2)**

*Curve in $\mathbb{R}^n$*
- Definizione di curva in $\mathbb{R}^n$, sostegno di una curva, curva semplice, curva chiusa, curva regolare, curva regolare a tratti, vettore tangente, versore tangente.
- Equazione della retta tangente ad una curva: equazioni in forma parametrica e in forma cartesiana.
- Verso di percorrenza, definizione: il punto $\varphi(t_1)$ precede il punto $\varphi(t_2)$ se $t_1 < t_2$.
- Definizione di diffeomorfismo tra intervalli $g : [a, b] \to [c, d]$. Definizione di curve equivalenti.

**Lezione 28 (giovedì 18/5/2017, ore 8:30-10:30, durata 2)**

- Definizione di lunghezza $L(\varphi)$ di una curva $\varphi$. Definizione di integrale curvilineo $\int_\varphi f$ di una funzione $f$ lungo una curva $\varphi$.
- Proposizione: se $\varphi$ e $\psi$ sono due curve equivalenti, allora $\int_\varphi f = \int_\psi f$ per ogni funzione $f$; in particolare $L(\varphi) = L(\psi)$. Dimostrazione.
- Baricentro di una curva.

**Lezione 29 (lunedì 22/5/2017, ore 12:30-14:30, durata 2)**

- Ascissa curvilinea. Proprietà dell'ascissa curvilinea.
- Osservazione: se una curva $\varphi$ ha norma $\|\varphi(t)\| =$ costante, allora $\varphi(t) \cdot \varphi'(t) = 0$ per ogni $t$. Dimostrazione assegnata per esercizio.

*Forme differenziali e campi vettoriali in* $\mathbb{R}^n$
- Definizione di forma differenziale su $\mathbb{R}^n$, di campo vettoriale su $\mathbb{R}^n$, e corrispondenza tra le due nozioni.
- Definizione di $dx_k$, notazione $\omega(x) = \sum_{k=1}^n a_k(x)dx_k$, definizione di spazio duale $(\mathbb{R}^n)^*$ come insieme delle funzioni lineari di $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (cioè le funzioni che si rappresentano come una matrice riga).
- Definizione di forma differenziale di classe $C^k(D)$.
- Definizione di forma esatta, definizione di primitiva di una forma differenziale.
- Definizione di campo gradiente, definizione di potenziale di un campo gradiente.
- Definizione di integrale $\int_\varphi \omega$ di una forma differenziale $\omega$ lungo una curva $\varphi$.

**Lezione 30 (mercoledì 24/5/2017, ore 10:30-12:30, durata 2)**

- Proposizione: integrale di una forma differenziale lungo due curve equivalenti. Dimostrazione.
- Teorema: integrale curvilineo di una forma esatta. Dimostrazione.
- Teorema di caratterizzazione delle forme esatte. Dimostrazione (solo le due implicazioni più semplici).
- Definizione di lavoro di un campo vettoriale lungo una curva.
- Proposizione: il lavoro di un campo gradiente lungo una curva è dato dalla differenza di potenziale nei punti finale e iniziale.

**Lezione 31 (giovedì 25/5/2017, ore 8:30-10:30, durata 2)**

- Definizione di forma differenziale chiusa su un dominio $D$.
- Proposizione: le forme esatte di classe $C^1$ sono forme chiuse. Dimostrazione.
- Esempio significativo di forma chiusa $\omega(x, y)$ che non è esatta.
- Definizione (non rigorosa) di insieme semplicemente connesso. Vari esempi in $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ di insiemi che sono o non sono semplicemente connessi.
- Teorema: se $\omega$ è forma chiusa in $A$ e $A$ è semplicemente connesso, allora $\omega$ è esatta in $A$. Senza dimostrazione.
- Metodo di restrizione del dominio a un suo sottoinsieme semplicemente connesso per semplificare i calcoli di integrali curvilinei in situazioni particolari di forma chiusa ma non esatta.

*Integrali doppi*
- Cenno alla costruzione dell'integrale di Riemann su sottoinsiemi limitati di $\mathbb{R}^2$ fatta a imitazione dell'integrale in dimensione 1 su intervalli $[a, b] \subset \mathbb{R}$.
- Definizione di insieme $D \subset \mathbb{R}^2$ normale rispetto a $x$ o rispetto a $y$.
- Area di un insieme normale $D$. Area di un insieme $D$ che è unione finita di insiemi normali con interni disgiunti (cioè che hanno in comune solo punti di frontiera).

**Lezione 32 (lunedì 29/5/2017, ore 12:30-14:30, durata 2)**

- Definizione di funzione integrabile su un insieme normale $D \subset \mathbb{R}^2$. Definizione di integrale doppio $\int_D f(x, y)\, dxdy$ di una funzione integrabile $f$ su un dominio normale $D$. Definizione di integrale doppio $\int_D f(x, y)\, dxdy$ di una funzione integrabile $f$ su un dominio $D$ formato dall'unione finita di insiemi normali con interni disgiunti (che hanno cioè in comune solo porzioni di bordo).
- Teorema: se $D$ è normale e $f$ è continua in $D$, allora $f$ è integrabile in $D$. Senza dimostrazione.
- Teorema: formule di riduzione per gli integrali doppi su domini normali. Senza dimostrazione.
- In questo contesto, "dominio" significa chiusura di un aperto.

- Formula per il volume dei solidi normali: se $E \subset \mathbb{R}^3$ è un solido della forma $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in D,\ g(x, y) \leq z \leq f(x, y)\}$, allora il suo volume è $\mathrm{Vol}\,(E) = \int_D \big(f(x, y) - g(x, y)\big)\, dxdy$.
- Baricentro di una regione piana.

**Lezione 33 (lunedì 29/5/2017, ore 14:30-16:30, durata 2)**

- Teorema di cambiamento di variabili per integrali doppi. Senza dimostrazione.
- Coordinate polari in $\mathbb{R}^2$.
- Definizione di frontiera orientata positivamente $+\partial D$ di una regione piana $D$.
- Teorema: formule di Gauss-Green nel piano. Senza dimostrazione. (Assegnata per esercizio la dimostrazione nel caso di un rettangolo).
- Applicazione delle formula di Gauss-Green al calcolo degli integrali curvilinei di forme differenziali in dimensione 2.

**Lezione 34 (mercoledì 31/5/2017, ore 10:30-12:30, durata 2)**

*Integrali tripli*
- Integrale triplo $\int_E f(x, y, z)\, dxdydz$ di una funzione continua $f$ su un dominio normale $E \subset \mathbb{R}^3$ (tramite le formule di riduzione).
- Volume $\mathrm{Vol}(E) = \int_E dxdydz$.
- Baricentro di un dominio $E \subset \mathbb{R}^3$.
- Teorema di cambiamento di variabili per integrali tripli. Senza dimostrazione.
- Coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$. Significato geometrico (raggio, latitudine, longitudine, meridiani e paralleli).
- Coordinate cilindriche in $\mathbb{R}^3$.
- Teorema di Guldino per il volume dei solidi di rotazione. Dimostrazione assegnata per esercizio (con suggerimento sull'impostazione).

*Superfici*
- Definizione di superficie regolare $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ (superficie bi-dimensionale nello spazio $\mathbb{R}^3$), e di sostegno di una superficie.
- Equazione parametrica del piano tangente ad una superficie (polinomio di Taylor di ordine 1 di $\varphi$).
- Definizione di superfici equivalenti.

**Lezione 35 (giovedì 1/6/2017, ore 8:30-10:30, durata 2)**

- Richiamo di geometria: definizione di prodotto vettoriale $u \wedge v$ tra due vettori $u, v \in \mathbb{R}^3$.
- Definizione di versore normale $\widehat{N}$ ad una superficie.
- Definizione di integrale superficiale $\int_\varphi f$ di una funzione scalare $f(x, y, z)$ su una superficie $\varphi$. Area della superficie.
- Baricentro di una superficie.
- Teorema di Guldino per l'area delle superfici di rotazione. Dimostrazione assegnata per esercizio (con suggerimento sull'impostazione).
- Definizione di flusso di un campo vettoriale attraverso una superficie.

**Lezione 36 (mercoledì 7/5/2017, ore 10:30-12:30, durata 2)**

- Orientamento di una superficie: è dato dal verso del versore normale.
- Proposizione: flusso di un campo vettoriale attraverso superfici equivalenti. Senza dimostrazione.
- Definizione di bordo di una superficie orientato positivamente: data una superficie $\varphi : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ con bordo $\varphi(\partial D)$, il suo bordo orientato positivamente è $\varphi(+\partial D)$, dove $+\partial D$ è il bordo orientato positivamente di $D$.

- Definizione di rotore $\operatorname{rot} f$ e divergenza $\operatorname{div} f$ di un campo vettoriale $f$ di $\mathbb{R}^3$.
- Teorema di Stokes in $\mathbb{R}^3$. Senza dimostrazione.
- Teorema della divergenza in $\mathbb{R}^3$. Senza dimostrazione.
- Applicazione del teorema della divergenza quando la superficie non racchiude un volume (si deve "aggiungere un tappo").