

• **Indice**

- Introduzione

- Le serie

 - Le serie numeriche pure

 - Le serie letterali

 - Le serie miste alfa-numeriche

 - Ragionamento numerico

 - Le serie grafiche

- Le proporzioni

- Le percentuali

- Probabilità

 - Probabilità contraria

 - Combinazione di eventi

- Cenni di Calcolo combinatorio per la soluzione di alcuni quesiti

 - Permutazioni semplici

 - Permutazioni con ripetizione

 - Disposizioni semplici

 - Disposizioni con ripetizione

 - Combinazioni semplici

 - Combinazioni con ripetizione

 - Permutazioni, disposizioni o combinazioni?

- Logica verbale

Anagrammi

Aggiunta, sottrazione o cambio di lettera

Sinonimi e contrari

- Cenni di logica proposizionale

Enunciati e caratteristiche

Relazioni tra le proposizioni

Interferenze

Sillogismi

- **Introduzione**

Perché un altro libro sui quiz di logica?

Perché questo è un libro diverso dal solito contenitore di esercitazioni, perché punta al ragionamento per giungere alla soluzione. E' un libro che aiuta a capire come e perché determinati quiz si risolvono in un modo piuttosto che in un altro, spiegando il meccanismo con esempi e differenti modalità di svolgimento a seconda che il testo del quiz sia esposto in un modo o in un altro.

Oggi i test di logica sono presenti nella maggior parte dei concorsi per le Università o per molte prove selettive in attività pubbliche e private. E spesso la difficoltà maggiore che si incontra nel risolverli è dovuta al fatto che le modalità di ragionamento e svolgimento non sono ben chiari a chi li affronta. In queste pagine vengono affrontati i punti base per potere superare più facilmente i quiz di logica, siano essi di logica numerica, simbolica o verbale. Per i vari argomenti trattati vengono proposti degli esempi commentati che possono essere utilizzati anche come esercizi guidati. La maggior parte dei quesiti riportati negli esempi è stata preparata sui modelli dei test proposti nel

corso degli anni dalle varie Università o da aziende pubbliche o private, che utilizza questa modalità per selezionare i propri candidati.

I vari argomenti trattati sono divisi in base agli argomenti principali e paragrafi secondari, organizzati in ordine di difficoltà crescente, partendo dalle serie numeriche e letterarie alle applicazioni di calcolo combinatorio per la soluzione dei quiz e fino alla logica verbale. Si ricorda comunque che molti esercizi che rientrano nella logica verbale vanno accompagnati da una buona conoscenza del vocabolario italiano per potere scegliere senza sbagliare i significati dei termini proposti, inoltre bisogna porre sempre la massima attenzione nella lettura dei quesiti perché spesso una piccola distrazione può portare ad un'errata interpretazione con conseguente errore nella risoluzione.

A questo punto non resta che augurarvi buono studio!

Ateneapoli Editore

• Le serie

I quiz di logica numerica si possono presentare in vario modo. Iniziamo con il presentare qui le *serie*, ossia una sequenza di dati numerici, grafici o letterari presentati incompleti e legati tra di loro da un nesso logico che il candidato dovrà trovare. Solitamente questi quesiti sono di tipo alfanumerico (quindi costituiti da soli numeri o da sole lettere o da alternanza di numeri e lettere) o grafici (cioè caratterizzati da figure geometriche o da figure in generale).

Per cominciare, partiamo dalle serie alfanumeriche, che sono comunque quelle più comuni nei concorsi di tutti i generi.

LE SERIE NUMERICHE PURE

Nei quiz di serie numeriche pure si riscontra una sequenza di numeri legati tra di loro da una relazione matematica semplice. Quindi non si troveranno serie numeriche legate da relazioni quali logaritmi o radicali o potenze, ma solo addizioni, sottrazioni, moltiplicazioni e divisioni. Le serie sono sempre presentate incomplete e sta al candidato cercare il numero che manca trovando appunto la relazione che lo lega agli altri numeri. Portiamo di seguito un esempio che permetta di comprendere meglio quanto detto.

ESEMPIO 1

? 6 18 54 162

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

In questa serie numerica manca il termine iniziale che sarà quindi quello che deve essere trovato. Per fare ciò bisogna capire qual è la relazione che intercorre tra gli altri termini, o meglio tra un termine e quello immediatamente successivo. Si può riconoscere facilmente che la relazione che lega i primi due numeri e cioè il 6 e il 18 è una relazione di moltiplicazione, in quanto 18 è pari a 6×3 . Si deve allora controllare se anche la relazione che lega il 18 con il numero successivo, e cioè il 54 sia la stessa: infatti 54 è pari a 18×3 . Continuando si ha che 162 è pari a 54×3 . Questo vuol dire che il primo numero, quello che manca, deve essere collegato dalla stessa relazione e quindi deve essere un numero che moltiplicato per 3 dia 6. Tra le opzioni proposte nelle cinque risposte si vede

facilmente che il numero è il 2, ($2 \times 3 = 6$) quindi la risposta che completa correttamente la serie è la B.

Vediamo un altro esempio.

ESEMPIO 2

400 200 100 ? 25

- A) 150
- B) 100
- C) 50
- D) 25
- E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

In questo caso il termine da “scoprire” è posto nelle parti interne della sequenza, ma il ragionamento da effettuare è sempre lo stesso. Si parte quindi dai primi due numeri in sequenza e si cerca la relazione che li lega. Si può ipotizzare che sia una relazione di divisione ($400:2=200$) oppure una relazione di sottrazione ($400-200=200$). Quest’ultima ipotesi però va scartata perchè nella coppia di numeri successiva non si può applicare la stessa sottrazione, in quanto $200-200$ fa zero e non 100 come richiesto dalla serie numerica. Si torna quindi all’idea della divisione e si vede che $200:2=100$, quindi c’è ancora corrispondenza tra la relazione ipotizzata e la serie proposta. Ancora: $100:2=50$ (che sarebbe quindi il numero mancante) e $50:2=25$, il che fa capire che la divisione per 2 è il legame che unisce i numeri della serie numerica. La risposta corretta è quindi la C.

È molto importante, quando si affronta questo tipo di esercizi, guardare attentamente la serie nel suo insieme prima di cercare le relazioni che non sempre saltano istantaneamente all’occhio. Innanzitutto bisogna vedere se la serie è crescente (i numeri sono via via più grandi) o decrescente

(i numeri sono via via più piccoli). Questo infatti dà una prima indicazione su quale possa essere la relazione da cercare. Infatti, se i numeri della serie sono crescenti, va da sé che le relazioni possono essere di somma o di prodotto, ma non di sottrazione o divisione. Queste ultime due operazioni infatti portano i numeri a decrescere e quindi saranno utilizzate nelle serie decrescenti. Inoltre nelle serie crescenti per prodotto si raggiungono facilmente numeri abbastanza elevati e di solito gli intervalli tra due numeri consecutivi vanno sempre ad aumentare. Nelle serie somma, invece, le distanze tra i numeri consecutivi sono sempre abbastanza simili e inoltre difficilmente si raggiungono intervalli numerici (tra il primo numero della serie e l'ultimo) molto ampi. I due esempi precedentemente riportati, uno di moltiplicazione e uno di divisione, evidenziano l'andamento crescente nel primo caso e decrescente nel secondo.

Anche le somme creano un andamento crescente, ma di solito non si raggiungono numeri grandi come nel caso delle serie crescenti per moltiplicazione.

Infatti, se partiamo dal 6 come nella serie dell'esempio 1, ma al posto di moltiplicare per 3, sommiamo il 3, si ha la seguente serie:

ESEMPIO 3

? 6 9 12 15

A) 1

B) 2

C) 3

D) 4

E) 5

In questo caso, la relazione tra i due primi numeri disponibili, il 6 e il 9, è che $9=6+3$, e successivamente, $12=9+3$; $15=12+3$. Ne deriva che il numero da ricercare, è un numero che,

sommato a 3 dia 6, ossia proprio il numero 3 ($3+3=6$). La soluzione corretta quindi è quella proposta dalla lettera C. Si nota come la distanza tra il primo e l'ultimo numero della serie è molto minore rispetto alla distanza tra primo ed ultimo numero dell'esempio 1. Questa differenza di ampiezza aiuta a capire se la serie è una serie prodotto o una serie somma.

Tuttavia le serie non sono sempre crescenti o decrescenti, ma possono essere miste. In questo caso è possibile che si debbano alternare somme e sottrazioni oppure divisioni e moltiplicazioni. Vediamo un esempio per comprendere meglio come si possono presentare le serie di questo tipo.

ESEMPIO 4

4 16 8 32 16 ?

- A) 32
- B) 40
- C) 48
- D) 64
- E) 100

La logica che lega questa serie, in cui i numeri crescono e decrescono è la seguente: i primi due numeri sono legati da una relazione di moltiplicazione per 4 ($4 \times 4 = 16$). Il secondo e il terzo da una divisione per 2 ($16 : 2 = 8$) il terzo e il quarto ancora da una moltiplicazione per 4 ($8 \times 4 = 32$) mentre il quarto e il quinto ancora da una divisione per 2 ($32 : 2 = 16$). Ne deriva che l'ultimo numero deve essere collegato di nuovo da una moltiplicazione per 4 con il penultimo e quindi $16 \times 4 = 64$, per cui la risposta corretta è la D.

Le serie miste crescenti e decrescenti possono avere anche molte altre chiavi di lettura. Di seguito si riportano altre possibili combinazioni e vengono spiegati i metodi risolutivi.

Un esempio che a prima vista può sembrare non avere nessuna chiave di lettura è il seguente:

ESEMPIO 5

30 28 25 25 20 22 ?

A) 25

B) 22

C) 20

D) 15

E) 10

Come si diceva sopra, la prima cosa da fare è dare uno sguardo alla serie. Si capisce subito che questa serie è diversa da quelle presentate precedentemente, innanzitutto perchè all'interno vi sono due numeri uguali consecutivi, poi perchè non è né crescente né decrescente. Se si prova a cercare la relazione logica tra il primo e il secondo termine, salta facilmente all'occhio che i due numeri sono legati tra di loro da una relazione di sottrazione ($30-2=28$). Tuttavia questa relazione non è verificata tra il secondo e il terzo numero, per i quali esiste invece un'altra relazione di sottrazione: $28-3=25$. Si può quindi pensare che la serie è legata da una relazione di sottrazione di numeri via via crescenti: dapprima -2, poi -3, poi -4 ecc. Tuttavia il terzo e il quarto numero evidenziano che questa relazione non è possibile perchè la presenza di due numeri uguali rompe la relazione logica che si stava cercando di confermare. Come si risolve una situazione del genere?

Bisogna tenere conto che non sempre le relazioni vanno cercate tra due numeri successivi, ma alcune sequenze logiche presentano delle alternanze, ossia i numeri in sequenza sono uno sì e uno no. Nel nostro caso i numeri in sequenza sono alternati ad uno ad uno, quindi 30, 25 e 20 sono legati tra di loro da una relazione di differenza -5 ($30-5=25$; $25-5=20$), mentre gli altri e cioè 28, 25 e 22 sono legati da un'altra relazione di differenza, stavolta -3 ($28-3=25$; $25-3=22$).

Unendo così due sequenze alternate, ne deriva che il numero mancante andrà calcolato a seconda che si trovi nell'una o nell'altra sequenza. Nel nostro caso, il numero mancante fa parte della sequenza differenza -5 e quindi sarà pari a $20-5$, ossia 15 (risposta C).

Una sequenza abbastanza semplice, ma allo stesso tempo varia, è quella che prevede somme o differenze di numeri via via crescenti o decrescenti. Vediamo ad esempio, la seguente serie.

ESEMPIO 6

30 28 25 21 ? 10

A) 25

B) 21

C) 20

D) 18

E) 16

Questa serie prevede una differenza tra i numeri seguenti sempre diversa e in particolare sempre crescente. Infatti: $30-2=28$; $28-3=25$; $25-4=21$; a questo punto dovrà seguire una differenza -5, ossia $21-5=16$ (quindi la E sarà la risposta corretta). Continuando, si trova la conferma dell'esattezza della successione in quanto il numero trovato, al quale andrà sottratto il 6, completa la serie dell'esempio: $16-6=10$.

Come si fa a riconoscere una serie di questo tipo? Come per le altre serie si deve dapprima dare uno sguardo di insieme che permetterà di notare che la serie è decrescente. Poiché inoltre risulta leggermente decrescente, ne deriva che si debba da subito ipotizzare che sia una serie sottrazione e non una serie divisione. Si cerca allora la relazione tra i primi due numeri, che è facilmente individuabile e si prova a far coincidere la stessa anche per i successivi. Qualora questa non combaciasse, si cerca la relazione tra la differenza dei primi due numeri e quella dei secondi due. In

questo caso la relazione è abbastanza semplice perchè si hanno dei numeri via via crescenti. Ma possono verificarsi anche sequenze in cui la relazione è più complessa, come negli esempi successivi.

ESEMPIO 7

120 115 105 90 70 ?

A) 45

B) 50

C) 55

D) 60

E) 65

Una serie di questo tipo è decrescente e gli intervalli tra i due numeri vicini sono sempre diversi. Si trova però subito la relazione tra i primi due numeri, ossia una relazione di differenza -5 ($120-5=115$), ma la stessa relazione non si applica al numero successivo. Infatti da 115 a 105 bisogna sottrarre 10. Allora bisogna fare attenzione alla relazione tra i due numeri da sottrarre: dapprima 5 e dopo 10. Si può ipotizzare che i numeri da sottrarre vadano sempre crescendo, seguendo la numerazione per 5. Quindi il numero successivo da sottrarre dovrebbe essere, eventualmente, il 15 e poi il 20. Controllando la sequenza ci si accorge che proprio questi sono i valori che servono per passare da un numero all'altro: infatti, $105-90=15$ e $90-70=20$. Seguendo la numerazione allora, il numero mancante si otterrà sottraendo 25, valore successivo nella numerazione per 5. Si ha allora, $70-25=45$ (la risposta esatta è quindi la A).

Ancora, ci possono essere relazioni dirette tra due numeri successivi che determinano lo svilupparsi delle serie.

ESEMPIO 8

3 4 7 11 18 29 ?

A) 32

B) 35

C) 42

D) 47

E) 53

I numeri sono in relazione tra di loro per il fatto che, dal terzo in poi, si formano per somma con il numero precedente ($4+7=11$; $7+11=18$; $11+18=29$). Ne deriva che il numero mancante sarà dato dalla somma di $18+29=47$ – risposta D.

Si può verificare lo stesso tipo di serie anche come differenza o come prodotto (più raramente come divisione dei termini).

ESEMPIO 9

1 3 3 9 27 ?

A) 27

B) 30

C) 159

D) 207

E) 243

In questo esercizio ogni numero è dato dal prodotto dei due precedenti. Quando le relazioni sono di questo tipo, difficilmente si trova qualche soluzione studiando i primi due numeri, perchè è solo a partire dal terzo che la logica della sequenza viene “svelata”. Naturalmente anche in questo caso uno sguardo d’insieme aiuta a comprendere meglio la serie che si ha davanti. Infatti si nota subito che c’è un numero ripetuto, quindi, o siamo di fronte ad una serie mista, o, dubbio che ci può venire quando il primo numero della serie è l’uno, ad una serie prodotto di ogni numero per il successivo. Infatti, 3×1 dà ancora 3, e $3 \times 3 = 9$. Ancora, $9 \times 3 = 27$ e $27 \times 9 = 243$, ossia il numero corrispondente alla risposta E.

Ma gli esempi di serie numeriche non sono finiti qui. Un altro tipo di sequenza un po’ più complessa è quello che vede la doppia operazione (ad esempio prodotto + somma oppure prodotto + sottrazione) e che può creare qualche difficoltà nel trovare le relazioni tra i numeri. Un esempio di questo tipo è il seguente:

ESEMPIO 10

5 9 17 33 65 ?

- A) 80
- B) 105
- C) 129
- D) 167
- E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

A prima vista i numeri della serie non presentano relazioni riconoscibili. Ma con un po’ di attenzione e di esercizio, si può riconoscere il nesso tra i vari numeri. In questo caso, la relazione tra 5 e 9 è che $9 = 5 \times 2 - 1$; quella tra 9 e 17 è: $17 = 9 \times 2 - 1$. Si ha cioè che la relazione tra un numero e il numero successivo è del tipo $N \times 2 - 1$. Procedendo così fino ad arrivare al numero mancante risulterà che esso sarà $65 \times 2 - 1 = 129$, ossia la risposta C. Come si fa a comprendere che la relazione proposta debba

essere di prodotto e sottrazione? Anche in questo caso bisogna dapprima notare che la serie è crescente, quindi la possibilità è che sia una serie somma o prodotto. Poiché i numeri crescono abbastanza velocemente si può protendere di più verso la serie prodotto. In questo caso, in cui i numeri sono abbastanza semplici, si può, ad intuito, notare che 9 è molto simile a 5×2 come 17 è molto simile a 9×2 . E in tutti e due i casi la differenza tra la moltiplicazione per 2 e il numero in elenco è di 1. Si affaccia quindi la possibilità che la serie non sia una serie prodotto semplice, ma una serie mista, in questo caso appunto prodotto ($\times 2$) e differenza (-1). Controllando gli altri numeri della serie si nota che la relazione è valida fino in fondo e quindi si può facilmente calcolare il numero mancante.

Può capitare naturalmente una situazione in cui si verifichi una serie prodotto e somma, come nell'esempio seguente.

ESEMPIO 11

3 11 35 107 323 ?

A) 445

B) 537

C) 649

D) 825

E) 971

Qui si vede che la serie cresce molto velocemente, quindi sicuramente alla base ci sarà una relazione prodotto. Tuttavia, non riuscendo a trovare nessuna relazione semplice tra i primi tre termini 3, 11 e 35, si deve cercare una relazione complessa, provando con una somma o una differenza. Il numero 11 infatti, potrebbe derivare da $3 \times 3 + 2$ ma anche da $3 \times 4 - 1$. Tuttavia è la prima relazione che si rispecchia anche nei numeri seguenti: $35 = 11 \times 3 + 2$; $107 = 35 \times 3 + 2$ ecc. Quindi il risultato finale sarà dato da $323 \times 3 + 2 = 971$ (risposta E).

LE SERIE LETTERALI

Tutti gli stessi ragionamenti logici applicati per le sequenze numeriche possono essere applicati alle sequenze letterali, che prevedono, al posto dei numeri, le lettere dell'alfabeto. In questo caso bisogna porre attenzione ad un dettaglio: quale alfabeto si usa nei quiz? Quello italiano o quello "inglese" che prevede anche le lettere J,K,W,X,Y? Solitamente si utilizza quello italiano, ma quando nella serie si presentano le lettere straniere, allora è sottinteso che bisogna utilizzare quello inglese.

Perché la logica è la stessa che nelle serie numeriche? Perché anche qui vengono presentate una serie di lettere distanziate tra di loro e bisogna capire la relazione che regola questa distanza.

ESEMPIO 12

a c e g ?

- A) b
- B) h
- C) i
- D) p
- E) q

Questa sequenza presenta una relazione semplicissima: viene considerata una lettera sì e una no dell'alfabeto, quindi quella che manca sarà la lettera "i" (risposta C). Naturalmente si possono avere sequenze più complesse, come nel caso delle serie numeriche, anche se solitamente si hanno solo serie somma e serie sottrazione, non moltiplicazioni o divisioni. Di seguito riportiamo alcuni esempi.

ESEMPIO 13

b e i p ?

A) r

B) t

C) u

D) v

E) z

In questo caso tra le prime due lettere, “b” ed “e”, passano tre spazi, compresa l’ultima lettera, (c,d,e). Tra la seconda e la terza, invece, passa uno spazio in più (f,g,h,i). Già da qui si può immaginare che la serie sia costruita in modo che tra due lettere successive passi sempre uno spazio in più rispetto a quello delle lettere precedenti. Infatti, controllando le relazioni tra la “i” e la “p” si nota che intercorrono 5 spazi (l,m,n,o,p), per cui ci si aspetta che la lettera che manca sarà quella a distanza sei lettere dalla “p”, ossia la “v” (risposta D).

ATTENZIONE

La differenza principale tra le serie numeriche e quelle letterali è che i numeri sono infiniti, mentre le lettere sono limitate. Non è raro, per questo, trovare che le serie letterarie, una volta arrivate alla “z”, riprendano da capo permettendo così un maggior numero di possibilità.

Poiché, come si diceva, si possono costruire serie letterali molto simili a quelle numeriche, si possono trovare, anche con le lettere, serie composte, costituite da due (o più) sequenze accostate, magari una somma e una sottrazione.

ESEMPIO 14

a e e d i c o ?

A) b

B) e

C) h

D) n

E) z

La campanella d'allarme dovrebbe suonare nel vedere due lettere simili: raramente una serie crescente o una decrescente presentano lettere o numeri simili, a meno che non si tratti di serie moltiplicazione in cui si ritrova una moltiplicazione per 1 (vedi esempio 9). Più spesso lettere o numeri uguali indicano una serie mista, che seguono logiche diverse tra di loro. In questo caso c'è una serie crescente tra la prima, terza, quinta e settima lettera della sequenza e una serie decrescente tra la seconda, quarta e sesta lettera. Vista l'alternanza, la lettera da "scoprire" fa parte della serie decrescente che andiamo ad analizzare. Partendo dalla lettera "e" (la prima, quella subito dopo la "a"), la lettera successiva della serie decrescente è una "d", ossia la lettera prima della "e". Dopo la "d" viene la "c" (lettera prima della "d"): ne deriva che la lettera da indovinare sarà la "b", che nella serie decrescente è la lettera che precede la "c". Quindi la risposta corretta è la A.

LE SERIE MISTE ALFA-NUMERICHE

Si possono trovare anche serie miste, composte cioè sia da termini numerici che letterali. Anche in questo caso valgono tutte le possibilità degli esempi precedenti, e cioè addizione, sottrazione (moltiplicazione e divisione per le serie numeriche) e, soprattutto, sequenze alternate. Infatti,

trovandosi di fronte ad una serie alfanumerica, spesso ci si trova davanti una sequenza che segue una logica per il termine numerico ed un'altra per quello letterario.

ESEMPIO 15

4 c 12 f 36 i ?

- A) m
- B) q
- C) 78
- D) 108
- E) nessuna delle risposte è corretta

In questo caso la serie numerica è una serie moltiplicativa $\times 3$, mentre la serie letterale è una $+3$. Il termine che manca è un numero, e quindi deve essere la continuazione della serie moltiplicativa $\times 3$, ossia $36 \times 3 = 108$ (risposta D).

RAGIONAMENTO NUMERICO

Un ultimo tipo di test che si ritrova spesso è quello che prevede delle piccole serie di tre-quattro numeri, inserite o meno in una griglia e seguite dai segni (o dalle parole) $+$ (più) e $-$ (meno). Questo tipo di quiz è molto simile ad una serie numerica composta, in cui si danno diverse informazioni e si evidenzia anche che alcune informazioni fornite sono corrette, o meglio seguono la logica della serie e pertanto sono utili a trovarne la soluzione, mentre altre non lo sono. Facciamo subito un esempio pratico.

ESEMPIO 16

14	27	5	+
18	29	7	+
18	36	8	-
22	2	4	-

- A) 7 16 4
 B) 5 61 5
 C) 8 24 7
 D) 15 35 2
 E) 3 31 3

Le prime due righe sono seguite dal segno + che vuol dire che la soluzione della serie deve essere trovata tra queste due righe perchè è dove si trova il segno + che la logica della serie è corretta. Le righe con il segno meno possono non essere considerate proprio, oppure essere considerate come “prova” della correttezza del ragionamento. Un'altra caratteristica particolare di questo tipo di esercizio è che non viene quasi mai chiesto cosa bisogna trovare. Sono esercizi che vengono presentati senza un testo, ma il candidato deve già sapere che si richiede di trovare i numeri che seguono la logica richiesta.

Cerchiamo di capire allora qual è la logica che collega i numeri delle prime due serie. Molto spesso il punto di partenza di questi esercizi è il numero centrale, che funge da legame con i due laterali. In questo caso, si può notare che il numero centrale è formato da due numeri, 2 e 7, che moltiplicati tra loro danno il primo numero, cioè 14, mentre, sottraendo 2 a 7 si ha il terzo numero, ossia il 5. Se questo ragionamento è valido deve essere confermato al rigo di sotto, anche esso contrassegnato con il +. E infatti si ha che $2 \times 9 = 18$ e $9 - 2 = 7$. Le terne di numeri contrassegnate dal “meno” invece, non seguono questa logica. Allora tra le soluzioni si deve trovare una terna di numeri che segua la logica delle prime due righe e si può quindi dire che la risposta giusta è la D.

ESEMPIO 17

25 79 27 +

24 31 26 -

13 46 15 +

31 46 33 +

A) 15 17 19

B) 21 35 23

C) 27 95 29

D) 13 48 17

E) nessuna delle risposte è corretta

Anche in questo caso cerchiamo la soluzione tra le sole righe contrassegnate dal “+”. Si nota subito che il primo e l’ultimo numero sono tutti a differenza di 2. Infatti sono 25 e 27; 24 e 26; 13 e 15; 31 e 33. Bisogna però cercare di capire qual è la relazione con il numero centrale. Si può allora notare che il numero centrale è fatto da due cifre di cui la prima è data dalla somma delle cifre della prima colonna e la seconda dalla somma delle cifre della seconda colonna. Prendiamo ad esempio la prima riga: 25; 79; 27. Si nota che il 79 è fatto dal 7 (che deriva da 2+5 del primo numero) e da 9 (che deriva da 2+7 del secondo numero). Nella terza riga si hanno 13, 46 e 15 e infatti il 46 è dato dal 4 (1+3 derivati dal 13) e dal 6 (1+5 derivati dal 15). Lo stesso dicasi per l’ultima riga, anche essa contrassegnata dal “+”. Bisogna quindi trovare, tra le soluzioni, una terna di numeri che segua questa logica, e questa terna è quella della risposta B.

ESEMPIO 18

62 12 8 +

35 8 15 -

24 8 6 +

45 20 9 +

96 38 17 -

A) 31 4 13

B) 15 5 10

C) 64 10 24

D) 41 5 8

E) 27 14 9

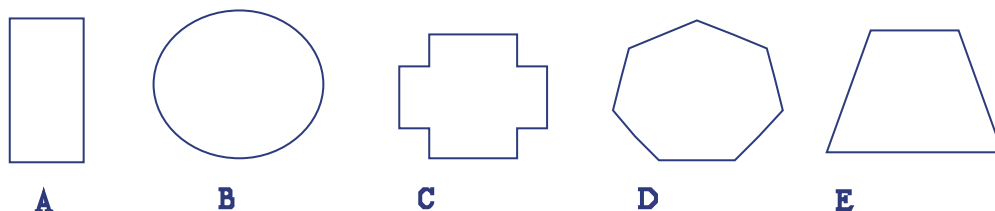
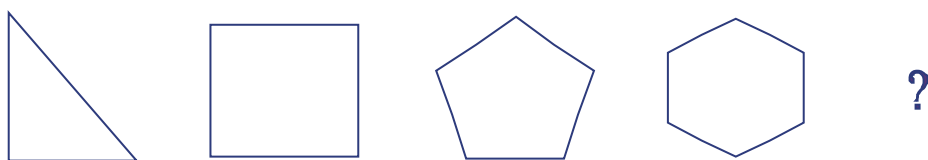
Anche in questo caso conviene sempre partire dalle terne segnate con il “+” e dal numero centrale. Si nota allora che esso è dato dal prodotto dei due numeri della prima colonna (cioè: $12=6 \times 2$; $8=2 \times 4$; $20=4 \times 5$). Il numero della terza colonna è invece dato dalla somma delle due cifre del numero della prima colonna ($8=6+2$; $6=2+4$; $9=4+5$). Quindi la soluzione corretta è la E, l’unica che rispetta questa logica numerica.

LE SERIE GRAFICHE

Le serie grafiche presentano, al posto di lettere o numeri, delle figure geometriche o non geometriche che sono messe in relazione. La logica che caratterizza le serie grafiche si basa su variazioni di colore (solitamente alternanza bianco-nero); su variazione del numero di lati o angoli delle figure presentate; su relazioni spaziali (spostamenti di elementi da destra a sinistra, dall’alto verso il basso o avanti-dietro). Vediamo subito alcuni esempi che permettono di comprendere meglio i vari casi.

ESEMPIO 19

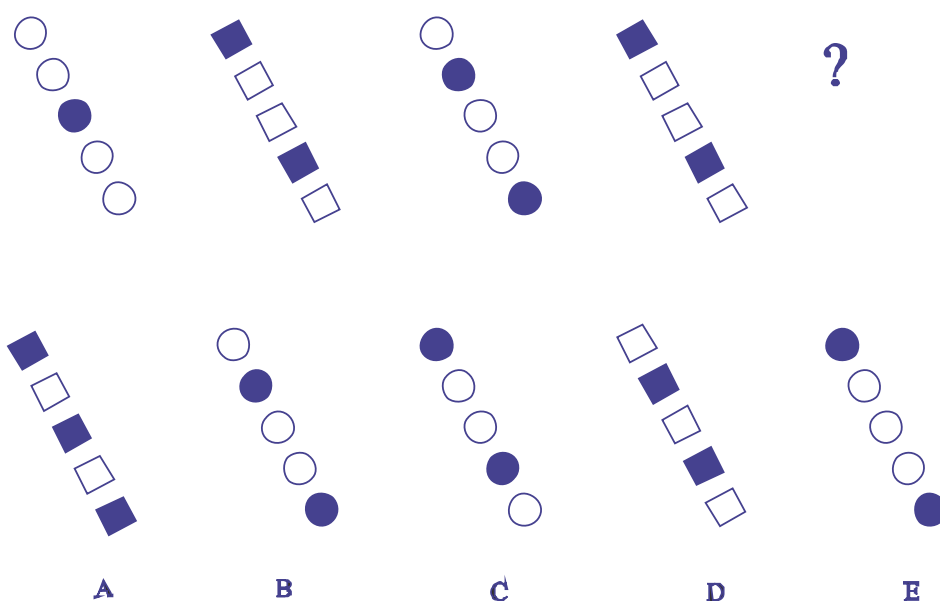
Trovare la figura che completa la serie



Come per le serie numeriche, anche in questo caso la serie va osservata bene nel suo insieme. Si notano una serie di figure geometriche bianche (quindi si esclude subito che si debba cercare un'alternanza di colori) e si nota che ogni immagine è costituita da un'unica figura geometrica. Inoltre è chiaro che la serie prevede figure geometriche con un numero sempre crescente di lati. Quindi dopo il triangolo (3 lati), il quadrato (4 lati) il pentagono (5 lati) e l'esagono (6 lati) deve logicamente seguire un eptagono (7 lati). La risposta corretta è quindi la D.

ESEMPIO 20

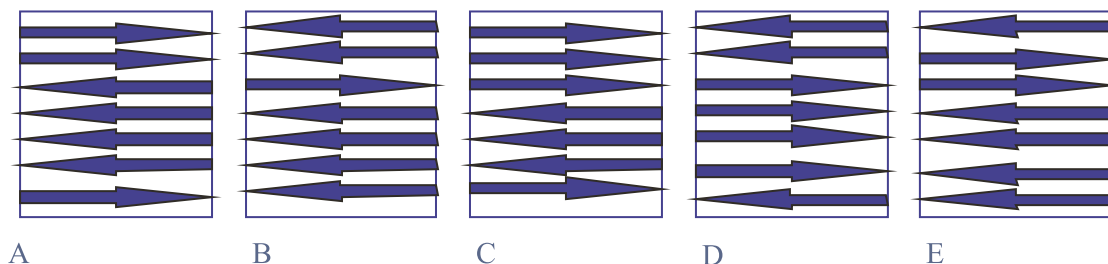
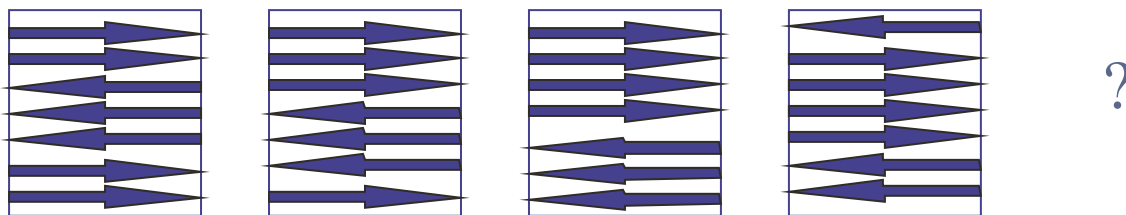
Individua la figura che completa la serie seguente



Questa serie, come già visto per le serie numeriche e letterali, è formata da due sequenze diverse che si alternano: una di cerchietti e una di quadratini. La grafica mancante, quindi, sarà necessariamente costituita da cerchietti, per cui si possono già scartare le risposte A e D. Bisogna ora capire come si alternano i cerchietti bianchi e neri per trovare la soluzione. Per prima cosa si noterà che l'alternanza bianco-nero non è uguale, ma ci sono due cerchietti bianchi che separano i neri che invece si presentano sempre singolarmente. Nella prima immagine il cerchietto nero è centrale, mentre nella terza sembra essere “salito” di una posizione e contemporaneamente dal basso ne è spuntato un altro. Si può immaginare allora di trovarsi in una relazione spostamento alto-basso, per cui si deve cercare, tra le soluzioni, una figura che avrà il cerchietto nero in “prima posizione”, ossia nella parte più alta del grafico. Le due possibili risposte sono la C e la E. Tuttavia, si nota subito che l'alternanza un nero-due bianchi che caratterizza le prime due immagini della serie è conservata solo nella risposta C, mentre la E presenta tre cerchietti bianchi di seguito, per cui non può corrispondere alla conclusione della sequenza. La risposta corretta è quindi la C.

ESEMPIO 21

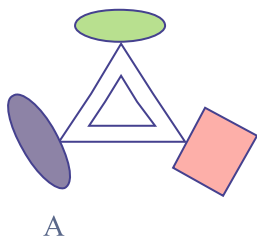
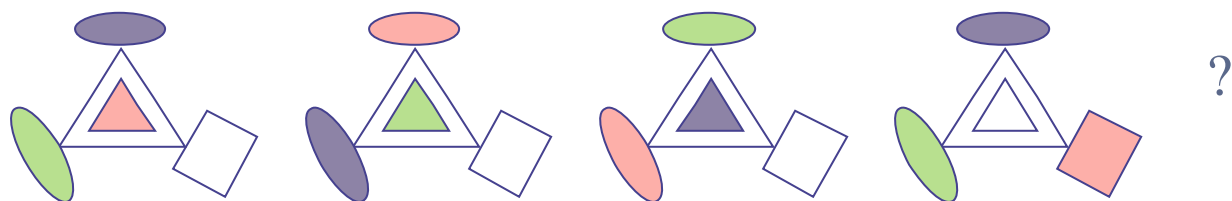
Individua la figura che completa la serie seguente



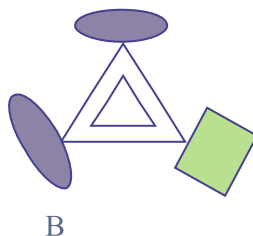
In questo quesito è evidente che bisogna focalizzare la propria attenzione sulla direzione delle frecce. Guardando attentamente le immagini, si noterà che nel passare da un'immagine all'altra dapprima cresce il numero delle frecce in alto che sono rivolte a destra, poi si aggiunge una freccia rivolta a sinistra. Ma la variazione delle frecce non è casuale. Infatti si può notare che la freccia dell'ultimo rigo “sale di posto” e va ad occupare il primo rigo mentre le altre restano invariate. Seguendo questo ragionamento, si trova che la serie viene completata con la figura D.

ESEMPIO 22

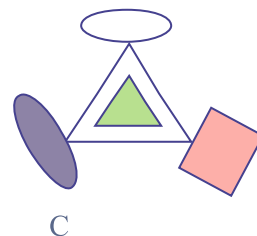
Individua la figura che completa la serie seguente



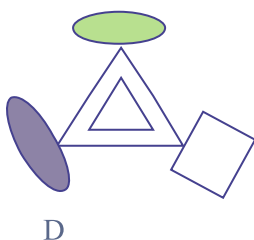
A



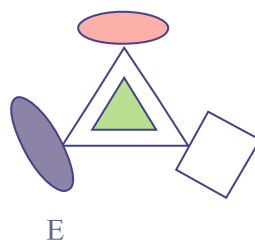
B



C



D

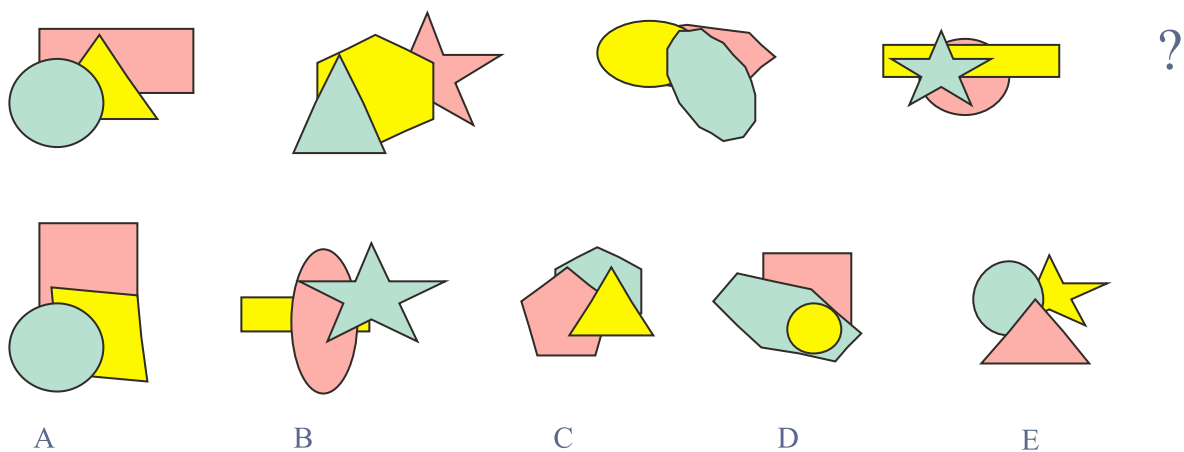


E

Questo quesito appare più complesso per la presenza di molte figure. Tuttavia, anche in questo caso, vanno considerati gli spostamenti dei colori tra una figura e l'altra. Si nota che le prime tre figure hanno un cambio di "riempimenti" che si alterna tra di loro, ma che non coinvolge il quadrato. Nella quarta figura, il quadrato prende il riempimento del triangolo piccolo della prima figura. La quarta figura cambia radicalmente, visto che il quadrato laterale ha subito una variazione di riempimento. Ma poiché non vengono date ulteriori informazioni su come proseguono i cambiamenti, si deve ipotizzare che le variazioni seguano la logica delle immagini precedenti, con il quadrato di destra che resta invariato e le altre figure che si scambiano i riempimenti. Questo vuol dire che ci si aspetta che il bianco del triangolo centrale passi all'ellisse di sopra, il viola dell'ellisse di sopra passi all'ellisse di sinistra e il verde dell'ellisse di sinistra passino al triangolo centrale. Come per la figura della risposta C, che è quella corretta.

ESEMPIO 23

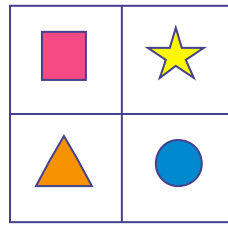
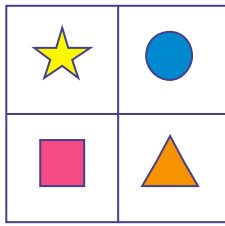
Trovare la figura che completa la serie



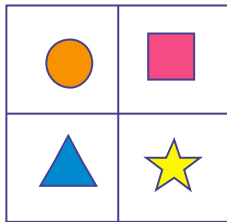
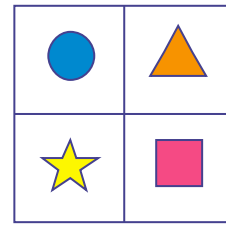
In questa serie si nota subito che sono presenti figure geometriche con riempimenti diversi: rosa, giallo e celeste. È quindi possibile che la logica di successione riguardi un legame geometrico o un legame “di colore”. Un primo sguardo non permette di notare una “logica” nell’alternanza tra le figure geometriche, ma permette di notare che, indipendentemente dalla figura geometrica, ogni raggruppamento segue la seguente successione di colori: la figura in primo piano è celeste; quella centrale è gialla; quella di dietro è rosa. Quindi anche la figura mancante dovrà seguire la stessa successione, per cui ne deriva che la risposta corretta è la A, l’unica che ha la figura rosa dietro, quella gialla al centro e quella a celeste davanti.

ESEMPIO 24

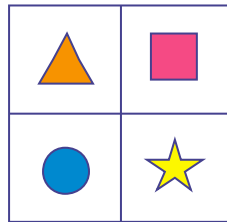
Individuare la figura che completa la serie



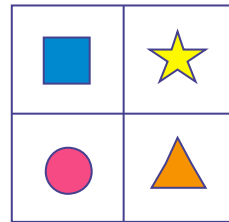
?



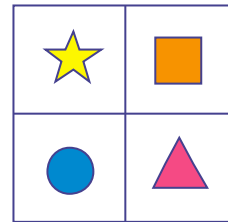
A



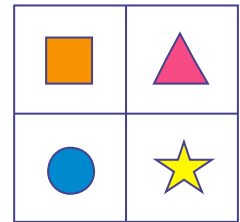
B



C



D



E

Le figure che si alternano all'interno dei quadratini non sono disposte a caso, ma sono sempre nello stesso ordine (e sempre degli stessi colori): stella, cerchio, triangolo e quadrato. Quella che cambia è la disposizione all'interno del quadrato grande, in quanto si ha uno spostamento da sinistra a destra e dall'alto verso il basso di ciascun elemento. Dalla prima alla seconda figura della serie, infatti, la stella, che sta in alto a sinistra, passa a destra, mentre il cerchio azzurro che è in alto a destra, passa sotto. Il triangolo passa a sinistra e il quadrato passa sopra. Bisogna allora cercare se c'è, tra le risposte, una figura che faccia lo stesso movimento per tutte le parti del quadrato e che poi, successivamente, si rispecchia anche nell'ultima immagine della serie. La figura che completa la serie è la B, infatti, si nota che stella, triangolo, cerchio e quadrato, si spostano di una posizione proprio come richiesto dalla sequenza (e mantenendo gli stessi colori) e questo spostamento è poi confermato dall'ultima figura della serie.

• Le proporzioni

Una proporzione è un'uguaglianza tra i rapporti di più grandezze, omogenee a due a due.

I termini di una proporzione del tipo $A : B = C : D$ (si legge A sta a B come C sta a D) prendono i seguenti nomi:

- A e D termini estremi della proporzione

- B e C termini medi della proporzione

Se si considerano invece i termini in relazione alla loro vicinanza al segno di divisione, allora A, B, C e D prendono i seguenti nomi:

- A e C termini antecedenti (in quanto termini che precedono il simbolo della divisione)

- B e D termini conseguenti (in quanto termini che seguono il simbolo della divisione)

Le proporzioni, come molti altri enti matematici, presentano una serie di proprietà che riportiamo di seguito (si prenda sempre in considerazione la proporzione $A : B = C : D$).

Proprietà fondamentale delle proporzioni

In una proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi

$$A * D = B * C$$

Proprietà dell'invertire

$$B : A = D : C$$

Proprietà del permutare i medi

$$A : C = B : D$$

Proprietà del permutare gli estremi

$$D : B = C : A$$

Proprietà del comporre

$$(A + B) : B = (C + D) : D \quad \text{oppure}$$

$$(A + B) : A = (C + D) : C$$

Proprietà dello scomporre

$$(A - B) : B = (C - D) : D \quad (\text{con } A > B) \quad \text{oppure}$$

$$(A - B) : A = (C - D) : C$$

Proprietà del comporre e dello scomporre

$$(A + B) : (A - B) = (C + D) : (C - D) \quad (\text{con } A > B)$$

Quando i due termini medi sono uguali tra di loro, allora prendono il nome di “medio proporzionale”.

Da tutte queste formule ne consegue che, avendo un’incognita al posto di uno dei termini, si potrà, utilizzando le precedenti proprietà, trovare il valore dell’incognita (ad esempio se si ha $A : B = C : X$, segue che $X = BC/A$). Alcune proporzioni non sono dirette, ma inverse, quindi non si ha una relazione del tipo $A : B = C : D$, ma $A : B = 1/C : 1/D$ che può anche scriversi come $A : B = D : C$. Questo tipo di relazione è spesso usata nei quiz e verrà approfondita in un esempio successivo.

ESEMPIO 25

Trovare il termine che completa la seguente proporzione

$$30 : X = 5 : 15$$

- A) 150
- B) 100
- C) 90
- D) 75
- E) 45

Per risolvere questa proporzione bisogna ricordare che ogni volta che si deve trovare il termine mancante di una proporzione basta moltiplicare i termini estremi (se il numero da trovare è un medio) o i medi (se il numero da trovare è un estremo) e dividere per l'altro numero restante. In questo caso la X sarà data da $30 \times 15 : 5 = 90$. Quindi la risposta corretta è la C

Altri test da risolvere tramite le proporzioni possono essere i seguenti.

ESEMPIO 26

Un architetto sta facendo un progetto di una casa alla scala di 1:10, ossia un centimetro del progetto è pari a 10 metri della costruzione reale. Quanto valgono sulla carta i 17 metri di una delle pareti della casa?

- A) 1,5
- B) 1,7
- C) 15
- D) 17
- E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

Per risolvere questo quesito dobbiamo impostare una proporzione. Se 1:10 evidenzia che un centimetro è pari a 10 metri reali e il quiz vuole sapere quanto valgono sulla carta 17 metri reali, allora ne deriva che la proporzione da impostare è

$$1 : 10 = X : 17$$

Infatti 10 e 17 indicano i termini della costruzione reale e quindi vanno messi tutti e due come conseguenti (o, capovolgendo la proporzione, tutti e due come antecedenti, cioè $10 : 1 = 17 : X$), mentre 1 e il valore da trovare vanno messi tutti e due come antecedenti (o eventualmente, capovolgendo la proporzione, tutti e due come conseguenti).

Ne deriva allora che

$$X = 1 \times 17 : 10 = 1.7 \text{ (risposta B).}$$

Ma la maggior parte dei quiz che utilizza le proporzioni è tipo quelli riportati nei due esempi che seguono e che richiedono l'utilizzo delle proporzioni dirette ed inverse.

ESEMPIO 27

Per piastrellare un marciapiede di 200 metri, 4 operai impiegano 7 giorni di lavoro. Quanti giorni ci impiegherebbero gli stessi operai a piastrellare 300 metri dello stesso marciapiede?

- A) 7
- B) 8.5
- C) 9
- D) 10.5
- E) 12

Questo è un quesito di proporzionalità diretta, in quanto è evidente che maggiore sarà la lunghezza del marciapiede, più tempo ci impiegheranno gli operai a piastrellarlo. In particolare, se per piastrellare 200 metri ci metteranno 7 giorni, per piastrellarne 300 ci metteranno un numero di giorni maggiore dato dalla proporzione seguente:

$$200 : 7 = 300 : X$$

Da cui:

$$X = 7 \times 300 : 200 = 10.5 \text{ (risposta D)}$$

(si noti che il numero di operai che lavora non incide sull'impostazione della proporzione).

Il seguente, invece, è un quesito di proporzionalità inversa. La proporzionalità inversa evidenzia che la relazione che c'è tra i primi termini della proporzione è inversamente valida per i secondi termini della proporzione, ossia:

$$A : B = 1/C : 1/D$$

Questo tipo di proporzioni si incontra nei quesiti in cui viene richiesto il calcolo di un termine che, all'aumentare dei valori della prima parte della proporzione, tende a diminuire o viceversa, al diminuire del valore della prima parte della proporzione, tende ad aumentare.

ESEMPIO 28

Per piastrellare un marciapiede di 200 metri, 4 operai impiegano 7 giorni di lavoro. Quanti giorni ci impiegherebbero a piastrellare lo stesso marciapiede se fossero aiutati da un quinto operaio?

A) 5,6

B) 6

C) 6,4

D) 6,8

E) 7

Se quattro operai impiegano un certo tempo per svolgere un lavoro, è abbastanza logico che con un operaio in più impiegheranno meno tempo. Ossia, aumentando il numero degli operai, diminuisce il tempo di lavoro. Si tratta quindi, come dicevamo precedentemente, di una proporzionalità inversa, che può essere scritta in questo modo:

$$4 : 5 = 1/7 : 1/X$$

Questa proporzione si può scrivere - invertendo la doppia frazione - come:

$$4 : 5 = X : 7$$

Da cui

$$X = 7 \times 4 : 5 = 5,6 \text{ (risposta A).}$$

Lo stesso quesito può richiedere, al posto dei giorni che impiegherebbero i 4 operai con una persona in più, quanti metri potrebbero piastrellare gli operai nello stesso numero di giorni.

ESEMPIO 29

Per piastrellare un marciapiede di 200 metri 4 operai impiegano 7 giorni di lavoro. Quanti metri di marciapiede potrebbero piastrellare se fossero aiutati da un quinto operaio?

A) 235

B) 178

C) 160

D) 144

E) 205

Si avrebbe allora una proporzione basata sul numero di operai e sui metri di marciapiede da piastrellare:

$$4 : 5 = 1/200 : 1/X$$

Ossia

$$4 : 5 = X : 200$$

E quindi

$$X=4 \times 200 : 5 = 160 \text{ metri (risposta C).}$$

ESEMPIO 30

Per confezionare 25 abiti, 4 sarte ci impiegano 50 giorni. Quanti giorni ci impiegherebbero 10 sarte per confezionare lo stesso numero di abiti?

A) 10

B) 15

C) 20

D) 25

E) 30

Ancora una volta, si comprende subito che il quesito è di proporzionalità inversa, visto che maggiore è il numero di sarte, minori sono i tempi di lavoro. Si imposta quindi la proporzione, che sarà del tipo:

$$4 : 10 = 1/50 : X$$

Ossia

$$4 : 10 = X : 50$$

E quindi

$$X=50 \times 4 : 10 = 20 \text{ (risposta C).}$$

- **Le percentuali**

La percentuale è la frazione di un numero intero espressa in centesimi e indicata con il simbolo %. Esprime il rapporto tra due grandezze mediante una frazione che ha come denominatore il numero 100. Così, 20% significa $20/100$. Il calcolo delle percentuali è molto diffuso nel campo della finanza, dell'industria e in quello scientifico, in particolare nella fase di valutazione dei dati.

Per calcolare quanto vale in percentuale il rapporto tra due numeri, si calcola la frazione e si moltiplica il risultato per cento. Ad esempio la frazione $4/16$ corrisponde al 25% (infatti $4/16 = 0.25$; $0.25 \times 100 = 25$)

Molto più spesso però viene richiesto di calcolare il valore % di un numero. Ad esempio calcolare il 30% di 45. Si fa quindi il calcolo contrario: si moltiplica 45×30 e si divide per 100. Si ha quindi $45 \times 30 = 1350$; $1350 : 100 = 13.50$.

I test di questo tipo possono essere impostati in vario modo, ma l'importante è cercare sempre di comprendere bene il testo prima di effettuare i calcoli.

ESEMPIO 31

Un paio di scarpe costa 120 euro. Per i saldi di primavera viene scontato del 15%. Quanto pagherò le scarpe se decido di comprarle?

- A) 18
- B) 80
- C) 102
- D) 138
- E) 180

Per calcolare il valore del nuovo prezzo bisogna considerare che il prezzo pieno, ossia 120 euro, corrisponde al totale (che si rapporta a 100) mentre il prezzo scontato, quello da pagare, si rapporta alla percentuale dello sconto. Bisogna quindi applicare la seguente proporzione:

$$120 : 100 = X : 15$$

Da cui

$$X = 120 \times 15 : 100 = 18$$

ATTENZIONE

Il valore così calcolato non rappresenta il prezzo finale, ma lo sconto che bisogna applicare. Il prezzo finale sarà quindi $120 - 18 = 102$.

La risposta corretta è quindi la C.

ESEMPIO 32

Un capo d'abbigliamento costa 30 euro. Dopo avere applicato uno sconto, viene pagato 25 euro. A quanto ammonta lo sconto?

- A) circa 80%
- B) circa 50%
- C) circa 33%
- D) circa 17%
- E) circa 5%

Anche in questo quesito bisogna calcolare la proporzione che permette di rapportare i valori alle percentuali. Il quesito in questione è simile al precedente come impostazione, ma differisce per il fatto che ora si ha il prezzo finale e bisogna calcolare la percentuale di sconto. La proporzione sarà quindi:

$$30 : 100 = 25 : X$$

Da cui

$$X=100 \times 25 : 30 = 83.33$$

Questo valore rappresenta il corrispondente percentuale dei 25 euro, mentre per sapere di quanto è lo sconto, bisogna sottrarre il valore ottenuto dal 100%. Quindi lo sconto sarà

$$100 - 83.3 = 16.7$$

ossia 17% circa, come da risposta D.

ESEMPIO 33

Una busta contiene 76 caramelle di cui 24 a menta, 38 a limone e il rimanente a fragola. Qual è la percentuale di caramelle a limone?

A) 24%

B) 50%

C) 76%

D) 80%

E) nessuna delle risposte è corretta

Questo quesito, come altri, fornisce informazioni inutili che possono distrarre il candidato dal focalizzare il punto. Infatti volendo conoscere la percentuale di un certo numero di caramelle, non servono le informazioni sulle altre caramelle, ma solo la quantità totale. Il totale, ossia il 100% è 76, quindi per sapere a che percentuale corrispondono le caramelle al limone bisogna impostare la seguente proporzione:

$$76 : 100 = 38 : X$$

Da cui

$$X = 38 \times 100 : 76 = 50$$

Le caramelle al limone quindi rappresentano il 50% del totale (risposta B).

Un altro tipo di quesiti riguarda la variazione percentuale di prezzo o di qualsiasi altra grandezza. La variazione percentuale indica, ad esempio nel caso di prezzi, la variazione di prezzo, espressa in percentuale, che uno stesso oggetto ha subito a distanza di mesi o di anni.

Ad esempio, un maglione che costava 105 euro e viene venduto l'anno successivo a 140 euro, ha subito un incremento del 33%, mentre, se costava 140 euro ed è stato scontato al prezzo di 105 euro, vuol dire che ha avuto un decremento del 25% circa.

Vediamo i calcoli:

se voglio calcolare l'incremento percentuale faccio la differenza tra i prezzi (il più alto meno il più basso):

$$140-105=35$$

Successivamente divido il risultato ottenuto per il prezzo più basso, in questo caso 105 ed ottengo

$$35:105=0.33 \text{ (circa)}$$

E infine moltiplico il valore ottenuto per 100,

$$0.33 \times 100 = 33\%$$

La formula può essere scritta come segue:

$$((V_f - V_i) : V_i) \times 100$$

dove V_f = valore finale e V_i = valore iniziale.

Se invece il maglione è stato scontato, quindi costava 140 e lo pago 105, allora il decremento sarà dato da una formula simile, con la differenza che la divisione verrà fatta non per il prezzo più basso, ma per quello più alto:

$$((V_f - V_i) : V_f) \times 100 = 25\%$$

ESEMPIO 34

Un minimarket ha una superficie di 360 mq. Un secondo minimarket ha una superficie che è minore del precedente del 15%. Quanti mq misura il secondo minimarket?

- A) 54
- B) 108
- C) 206
- D) 315
- E) 345

Ancora una volta bisogna applicare la proporzione che relaziona i numeri alle quantità percentuali:

$$360 : 100 = X : 15$$

$$X = 360 \times 15 : 100 = 54$$

Naturalmente il numero ottenuto rappresenta il corrispondente del 15% e non la soluzione. Per ottenere la soluzione bisogna sottrarre al totale (360) il numero ottenuto dai calcoli. Quindi il secondo minimarket avrà una superficie pari a

$$360 - 54 = 206 \text{ mq (risposta C).}$$

ESEMPIO 35

100 grammi di un alimento presentano il 5% di proteine e il 75% di carboidrati. Quanti grammi di carboidrati presenteranno 25 grammi dello stesso prodotto?

- A) 5.85
- B) 18.75
- C) 25
- D) 27.38

E) 50.8

Anche in questo quesito viene fornita un'informazione inutile, ossia la percentuale di proteine nell'alimento. Per la soluzione del problema dobbiamo considerare che i 100 grammi rappresentano il 100% dell'alimento, di cui il 75% è rappresentato dai carboidrati. Quando si prenderanno solo 25 grammi dell'alimento, la percentuale dei carboidrati sarà sempre del 75%, solo che stavolta sono i 25 grammi a rappresentare il 100% dell'alimento.

Quindi l'equazione da svolgere sarà:

$$25 : 100 = X : 75$$

$$X = 25 \times 75 : 100 = 18.75$$

ESEMPIO 36

Un negozio di abbigliamento che fino al 2008 aveva avuto una vendita di circa 800 capi all'anno, nel 2009 registra una vendita di 1000 capi all'anno. Qual è stato l'incremento percentuale delle vendite?

A) 15%

B) 25%

C) 34%

D) 47%

E) 63%

In questo tipo di quesiti viene introdotto il concetto di variazione percentuale. Bisogna cioè calcolare la variazione percentuale tra il valore finale (V_f) e quello iniziale (V_i). Tale variazione è data dalla formula generica $((V_f - V_i) : V_i) \times 100$

In questo caso quindi $((1000 - 800) : 800) \times 100 = 25$

L'incremento percentuale sarà quindi del 25% (risposta B).

ESEMPIO 37

Un ciclista amatore percorre giornalmente 120 km per allenarsi. A due mesi dalla gara incrementa la distanza e percorre ogni giorno 175 km. Qual è l'incremento percentuale della distanza?

- A) dipende dalla velocità del ciclista
- B) circa il 30%
- C) 38%
- D) circa il 46%
- E) 55%

Anche in questo quesito bisogna calcolare una variazione percentuale data dalla formula generica:

$((V_f - V_i) : V_i) \times 100$ in cui il valore iniziale è 120 e quello finale è 175. Si ha allora:

$((175 - 120) : 120) \times 100 = 45.8\%$, ossia circa il 46% (risposta D).

ESEMPIO 38

Un'azienda ha un fatturato annuale di 850mila euro. Quale sarebbe il decremento percentuale se il fatturato annuale passasse a 715mila euro?

- A) circa il 16%
- B) circa il 20%
- C) 45%
- D) 48%
- E) circa il 57%

In questo test non bisogna calcolare un incremento ma un decremento. Questo vuol dire che nella formula la divisione deve essere effettuata con il numero dal valore maggiore.

$$((850000-715000)/850000) \times 100 = 15.8\%$$

Il decremento quindi è del 16% circa, come indicato in risposta A.

ESEMPIO 39

Una scuola l'anno scorso aveva 1150 alunni. Quest'anno ha subito un incremento di iscrizioni del 15%. A quanto ammonta il numero di alunni di quest'anno?

A) 1165

B) 1200

C) 1287

D) 1323

E) 1500

Questo quesito prevede sempre l'applicazione della stessa formula per il calcolo dell'incremento/decremento, ma bisogna stare attenti al testo, che già ci dà l'incremento e vuole sapere qual è il valore finale. Si ha quindi:

$$((V_f - V_i) : V_i) \times 100 = 15$$

da cui:

$$((V_f - 1150) : 1150) \times 100 = 15$$

Applicando un semplice conto algebrico, ciò che era diviso al membro di sinistra diventa moltiplicato al membro di destra e ciò che era moltiplicato a sinistra diventa diviso al membro di destra:

$$V_f - 1150 = (15 \times 1150) : 100$$

$$V_f - 1150 = 172.5$$

Poiché stiamo calcolando un incremento di persone, il risultato ottenuto andrà approssimato a 173, visto che non possiamo avere 172.5 alunni!

$$V_f = 1150 + 173 = 1323$$

La risposta esatta quindi è la D.

• Probabilità

Per quanto i programmi di studio della probabilità rientrano nella parte di matematica, sempre più spesso i quiz in cui bisogna applicare calcoli probabilistici fanno invece parte dei raggruppamenti dei quiz di logica (intesi come logica matematica).

Per potere affrontare i quiz di logica basati sui calcoli delle probabilità bisogna avere un minimo di conoscenza della materia, per cui di seguito verrà dato un excursus sulle principali nozioni utili alla risoluzione dei test.

Partiamo con il definire la **probabilità di un evento**, ossia quanto è possibile che un evento accada o meno. La probabilità di un evento è il rapporto tra il numero dei casi favorevoli (n_f) ed il numero dei casi possibili (n_p), supposti tutti ugualmente possibili:

$$P = \frac{n_f}{n_p}$$

Ad esempio, calcoliamo la probabilità che lanciando un dado esca un numero dispari. I numeri dispari sono 1, 3, 5 quindi $n_f=3$ (cioè ci sono tre casi favorevoli che esca un numero dispari), mentre i casi possibili sono dati dal fatto che un dado ha 6 facce, quindi $n_p=6$.

Calcolando il rapporto tra casi favorevoli e possibili si ha: $P=3/6=1/2$ (ossia 0.5, pari al 50% di probabilità).

La probabilità che un evento accada è sempre compresa tra il valore di 0 e 1 (lo 0 rappresenta la massima probabilità che l'evento non accada, ossia sicuramente non accade; mentre l'1 rappresenta la massima probabilità che l'evento accada, ossia esso sicuramente accade).

ESEMPIO 40

Che probabilità esiste che nel lancio di un dado esca il 5?

- A) 6%
- B) 12.3%
- C) 16.7%
- D) 23.2%
- E) 31.3%

Consideriamo il numero di casi favorevoli, si ha $n_f=1$ (in un dado infatti c'è un solo 5) mentre i casi possibili in un dado sono sempre 6. Si ha allora:

$$P = \frac{n_f}{n_p} = \frac{1}{6}$$

Il problema richiede la risposta in percentuale, per cui bisognerà trasformare la frazione in percentuale:

$$(1:6) \times 100 = 16.7\%$$

LA PROBABILITÀ CONTRARIA

La probabilità contraria (q) indica la probabilità per cui un evento non accade. Essa è data da:

$$q=1-p$$

ossia si può calcolare la probabilità che un evento accada e poi sottrarre il valore ottenuto dalla quantità 1 (che rappresenta la massima probabilità che un evento accada).

Ad esempio, nel quesito di prima, la probabilità contraria è data da

$$1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$$

Che calcolato in percentuale è pari a: 83% circa ($5:6 \times 100 = 83.3$)

ESEMPIO 41

In un bicchiere ci sono 6 caramelle a menta e 15 a fragola. Qual è la probabilità che, pescando ad occhi chiusi, esca una caramella a menta?

- A) 6%
- B) 10%
- C) 15%
- D) 21%
- E) 28.5%

I numeri di casi favorevoli sono 6 mentre quelli possibili sono $15+6=21$.

La probabilità di pescare una caramella a menta quindi è:

$$P = \frac{nf}{np} = \frac{6}{21} = 0.285$$

Che, espresso in percentuale è pari al 28.5% (risposta E).

ATTENZIONE

A seconda dei quiz, i risultati possono essere richiesti sotto forma di frazione, come numero assoluto o come percentuale. Ma essendo le risposte già scritte e solo da scegliere, non si può incorrere in errori. È bene comunque abituarsi ad esprimere le probabilità in tutti e tre i modi.

ESEMPIO 42

Dato un dado e una moneta, è più probabile che nel lancio del dado esca il 4 o che nel lancio della moneta esca testa?

- A) più probabile che esca 4
- B) più probabile che esca testa
- C) la probabilità è la stessa
- D) non si possono paragonare questi due dati
- E) nessuna delle risposte è corretta

Questo tipo di quiz mette a paragone due diversi eventi per i quali bisogna calcolare la probabilità che essi si verifichino e definire quindi quale sia più o meno probabile a seconda di quale sia la domanda richiesta. Il procedimento iniziale è quindi sempre lo stesso, ossia considerare i casi favorevoli e quelli probabili. In seguito vanno paragonati i due risultati per vedere quale dei due ha una probabilità di accadimento maggiore o minore per potere quindi rispondere correttamente.

Nel nostro caso, per il dado si ha

$$n_f=1$$

$$n_p=6$$

$$\text{probabilità : } \frac{1}{6}$$

Per la moneta invece si ha:

$$n_f=1$$

$$n_p=2$$

$$\text{probabilità} : \frac{1}{2}$$

Si ha quindi, per il dado, il 17% circa di probabilità, mentre per la moneta il 50%, quindi è più probabile che esca testa nel lancio della moneta (risposta B).

ESEMPIO 43

Lanciando due dadi non truccati, che probabilità si ha che la somma delle facce sia 4?

- A) $1/2$
- B) $3/2$
- C) $4/16$
- D) $1/12$
- E) $1/4$

Quando si lanciano due dadi, i numeri che permettono di avere 4 sono:

dado 1	dado 2
1	3
2	2
3	1

Quindi ci sono 3 casi favorevoli su un totale di 36 casi possibili (6 facce per ogni dado fanno sì che si possano avere 36 casi possibili; si vedrà in seguito che la combinazione di due eventi si calcola moltiplicando i casi dei due eventi) da cui:

$$\text{probabilità} : \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

(risposta D).

ESEMPIO 44

In un bicchiere ci sono cinque palline e su ogni pallina c'è un numero che va da 1 a 5. In un altro bicchiere ci sono altre cinque palline su cui sono segnati i numeri da 6 a 10. Se si estrae una pallina da ciascun bicchiere, qual è la probabilità che la somma dei numeri delle palline sia 11?

- A) 11/10
- B) 6/5
- C) 3/11
- D) 1/5
- E) 7/4

Quando si estrae la prima pallina dal primo bicchiere, qualunque sia il numero estratto, la probabilità che la somma sia 11 dipende dal numero estratto dal secondo bicchiere. In questo, ci sono 5 possibili numeri da estrarre (quindi $n_p=5$) ma solo un numero, per come sono stati scelti i numeri nell'esercizio, potrà dare come somma il numero 11 (quindi $n_f=1$). Infatti, ipotizziamo che dall'estrazione del primo bicchiere esca il numero 4. Dei numeri del secondo bicchiere (che sono 5 e vanno da 6 a 10), solo uno, il 7, sommato al 4, darà 11. Lo stesso dicasi per qualsiasi numero venga estratto dal primo bicchiere.

Quindi

$$P = \frac{n_f}{n_p} = \frac{1}{5}$$

La risposta corretta è quindi la D.

COMBINAZIONI DI EVENTI

Molto spesso i quesiti possono richiedere delle combinazioni di eventi, ossia che due o più eventi si verifichino insieme. In questo caso si devono calcolare le probabilità legate a ciascun evento e poi unirle per ottenere la soluzione finale. L'unione delle soluzioni, quando i due eventi sono indipendenti tra loro, ossia si verificano senza influenzarsi l'un l'altro, avviene per moltiplicazione, come si può vedere nell'esempio di seguito.

ESEMPIO 45

In un vaso ci sono 100 palline: 50 bianche e 50 nere. Chiudo gli occhi e pesco due palline: qual è la probabilità che esse siano entrambe nere?

- A) 2/100
- B) 49/99
- C) 49/198
- D) 99/150
- E) 2/98

Pescando la prima pallina ho n_f/n_p probabilità che essa sia nera. Ossia

$$P = \frac{n_f}{n_p} = \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Quando però pesco la seconda pallina, le condizioni iniziali sono cambiate perché ora ho 49 casi favorevoli su 99 possibili, quindi

$$P = \frac{n_c}{n_p} = \frac{49}{99}$$

La probabilità che entrambe le palline siano uguali è data dall'unione delle due probabilità, ossia dal prodotto dei due risultati:

$$P = \frac{1}{2} * \frac{49}{99} = \frac{49}{198}$$

Quindi la risposta corretta è la C.

ESEMPIO 46

Una scatola contiene 2 cioccolatini al latte e 10 fondenti. Una seconda scatola contiene 8 cioccolatini al latte e 4 fondenti. Estraiamo un cioccolatino da ciascuna scatola: che probabilità c'è che siano entrambi al latte?

- A) 1/5
- B) 4/7
- C) 1/12
- D) 1/9
- E) 2/5

La probabilità di estrarre un cioccolatino al latte dalla prima scatola è:

$$P = \frac{n_c}{n_p} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Mentre la probabilità di estrarre un cioccolatino al latte dalla seconda è

$$P = \frac{n_e}{n_p} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Poiché il quesito chiede quale sia la probabilità che i due eventi si verifichino insieme, si devono combinare le due probabilità moltiplicando tra di loro i risultati. Ne deriva che

$$\frac{2}{3} * \frac{1}{6} = \frac{1}{9}$$

Come indicato in risposta D.

ESEMPIO 47

Una scatola contiene 2 cioccolatini al latte e 10 fondenti. Una seconda scatola contiene 8 cioccolatini al latte e 4 fondenti. Estraiamo un cioccolatino da ciascuna scatola: che probabilità c'è che siano uno al latte e uno fondente?

- A) 11/18
- B) 21/20
- C) $\frac{1}{2}$
- D) $\frac{5}{7}$
- E) $\frac{4}{5}$

Con gli stessi dati del problema precedente, si può richiedere un'altra probabilità, ossia quella di estrarre un cioccolatino di un tipo e uno di un altro dalle due scatole. In questo caso bisogna prevedere una doppia possibilità: se la prima estrazione dalla prima scatola è di un cioccolatino al latte o se la prima estrazione dalla prima scatola è fondente. Calcoliamo la probabilità che la prima estrazione dalla prima scatola dia un cioccolatino al latte. Essa sarà:

$$P = \frac{n_f}{n_p} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Allora dall'altra scatola dovrà uscire un cioccolatino fondente. Le probabilità che ciò si verifichi sono:

$$P = \frac{n_f}{n_p} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

La probabilità totale che i due eventi si verifichino insieme sarà data dal prodotto dei risultati, ossia:

$$\frac{1}{3} * \frac{1}{6} = \frac{1}{18}$$

Ma può verificarsi che la prima estrazione dalla prima scatola dia un cioccolatino fondente. Le probabilità che ciò avvenga sono

$$P = \frac{n_f}{n_p} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

Allora, dalla seconda scatola le probabilità che esca un cioccolatino al latte sono

$$P = \frac{n_f}{n_p} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Da cui il totale:

$$\frac{5}{6} * \frac{2}{3} = \frac{10}{18}$$

In questo tipo di test la probabilità che si verifichi una situazione o l'altra dipende da quale tipo di cioccolatino viene estratto per primo: i due eventi sono cioè legati dal fatto che uno esclude l'altro. Si ha allora che per avere il risultato totale non si dovrà effettuare un'altra moltiplicazione, ma una somma, per cui si ha:

$$\frac{10}{18} + \frac{1}{18} = \frac{11}{18}$$

Quindi la risposta corretta è la A.

ATTENZIONE

È importante ricordare che due o più eventi possono essere indipendenti (ad esempio se lancio due dadi, il numero che esce da uno non dipende da quanto è uscito sull'altro) oppure dipendenti (ossia nel caso dell'esempio di sopra, la prima estrazione condiziona la probabilità che l'estrazione dell'altra scatola mi sia utile al calcolo della probabilità). Il totale di due eventi indipendenti viene ottenuto tramite moltiplicazione, quello di due eventi dipendenti tramite somma.

• Cenni di Calcolo combinatorio

Il calcolo combinatorio permette di studiare e analizzare i modi per raggruppare e/o ordinare una serie di elementi di un insieme secondo regole date. Viene utilizzato per risolvere quiz che ad esempio richiedono quante possibilità ci siano che lanciando un dado esca tot volte un numero o che da due o più barattoli contenenti palline di diverso colore se ne estraggano due o più uguali.

Nel calcolo combinatorio si parla di **permutazioni** (semplici o con ripetizioni), **disposizioni** (semplici o con ripetizioni) e **combinazioni** (semplici o con ripetizioni).

PERMUTAZIONI SEMPLICI

Una permutazione semplice indica un insieme di oggetti posti in sequenza: gli elementi di questa sequenza possono essere presi solo una volta. Per effettuare una permutazione bisogna ricordare il significato di un numero fattoriale, ossia quel numero che, seguito da un punto esclamativo, indica che esso è pari al prodotto di tutti i numeri a partire dal numero stesso scendendo fino ad 1. Ad esempio $4! = 4*3*2*1 = 24$.

Quando ho un insieme m , le permutazioni possibili sono pari a $m!$ (m fattoriale, ossia $m*(m-1)*(m-2)*...*1 = m!$).

ESEMPIO 48

Quanti numeri diversi di 4 cifre posso creare a partire dai numeri 4-5-6-7?

- A) 20
- B) 24
- C) 36
- D) 42
- E) 80

Prima di applicare i calcoli, vediamo qual è la logica dell'esercizio. Iniziamo il nostro ragionamento dalla prima cifra a nostra disposizione, il 4. Tra i vari numeri che possiamo ottenere il 4 potrà trovarsi per primo (es. 4XXX) o per secondo (X4XX) o per terzo (XX4X) o per ultimo (XXX4). Se consideriamo la seconda cifra, il 5, essa avrà meno possibilità del 4, perchè troverà degli spazi già occupati: ad esempio se il 4 aveva quattro possibilità di posizione, il 5 avrà solo altre 3 possibilità (es. 45XX, oppure 4X5X, oppure 4XX5). Il 6, terza cifra tra quelle a nostra disposizione, troverà ancora meno spazio di inserimento, avendo solo due spazi liberi, mentre, fissate le prime tre cifre, l'ultima rimasta potrà sistemarsi solo e necessariamente in una posizione. Ne deriva che le posizioni sono descritte dal numero $4!$. Ossia $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ (risposta B). Esistono quindi 24 numeri che si possono costruire mettendo insieme le 4 cifre a disposizione. In generale si può dire che il numero di permutazioni semplici di n oggetti è dato dal prodotto del numero n per i suoi antecedenti, ossia $n!$

ATTENZIONE

Il risultato che si cerca non è un numero derivante dalle cifre 4-5-6-7, ma solo il numero di possibilità che queste si combinino tra di loro. Quindi non importa quale cifra si scelga per prima: le possibilità di sistemazione saranno sempre 4 per la prima, 3 per la seconda, 2 per la terza e una per l'ultima.

PERMUTAZIONI CON RIPETIZIONE

In alcune permutazioni possono esserci degli elementi che devono ripetersi: si verifica cioè che un oggetto, una volta utilizzato, può essere utilizzato di nuovo. In questo caso, indicando con k_1, k_2, k_3 fino a k_z il numero di volte in cui si ripetono gli elementi 1, 2, 3, z , le permutazioni vengono calcolate tramite la seguente formula:

$$P_n^{k_1, k_2, k_3, \dots, k_z} = \frac{n!}{k_1! * \dots k_z!}$$

ESEMPIO 49

Una partita di calcio tra due squadre è finita 5 a 3 per la squadra che giocava in casa. In quante possibili combinazioni si sono succedute le reti?

- A) 38
- B) 44
- C) 56
- D) 67
- E) 91

Questo problema presenta una permutazione con ripetizione. Può essere che le reti siano state segnate una per ogni squadra e poi una squadra ne ha segnate due in più alla fine, oppure che sono state segnate prima le 5 reti per una squadra e poi le 3 dell'altra. Il numero totale di reti segnate, è di $5+3=8$. Le ripetizioni invece sono date dai valori 5 e 3. La formula da applicare sarà allora:

$$\frac{8!}{5! * 3!} = 56$$

La risposta corretta è quindi la C.

DISPOSIZIONI SEMPLICI

Una disposizione semplice si verifica quando è dato un insieme S contenente n oggetti di lunghezza k . Poiché la disposizione è semplice non si possono avere ripetizioni dello stesso oggetto.

Il numero $D_{n,k}$ di disposizioni semplici di k oggetti estratti da un insieme di n oggetti è dato da:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

ESEMPIO 50

Avendo 20 libri, in quanti modi si possono disporre su una libreria 7 libri scelti tra i 20?

- A) 568700
- B) 888954
- C) 65842130
- D) 78962500
- E) nessuna delle precedenti risposte è corretta

Poiché gli oggetti che devo disporre sono stati scelti da un numero maggiore di oggetti e non posso avere ripetizioni, sono in un caso di disposizione semplice. Avrò quindi che il risultato è dato dal rapporto tra

$$\frac{20!}{(20-7)!} = \frac{20!}{13!} = 390700800$$

La risposta corretta è quindi la E.

ESEMPIO 51

In una gara di corsa partono 15 atleti. Calcolare il numero di modi diversi in cui si può disporre il podio dei primi tre classificati.

A) 1125

B) 1985

C) 2730

D) 2986

E) 3255

Il numero di atleti, ossia gli n oggetti, è 15, mentre, visto che il podio prevede 3 posti, si ha $k=3$. Le possibilità di organizzazione dei primi tre classificati sul podio sono date quindi da

$$\frac{15!}{(15-3)!} = \frac{15!}{12!} = 2730$$

(La risposta corretta è quindi la C).

DISPOSIZIONI CON RIPETIZIONE

Come per le permutazioni, anche per le disposizioni si possono avere dei casi in cui uno o più oggetti vengono usati più volte: si hanno cioè delle disposizioni con ripetizione. Il calcolo in questo caso segue la formula:

$$D'_{n,k} = n^k$$

ESEMPIO 52

Il codice pin di un cellulare è formato da 4 cifre. Considerando la tastiera standard di un cellulare, quanti possibili codici si possono creare?

- A) 400
- B) 847
- C) 1256
- D) 10000
- E) nessuna delle risposte precedenti è corretta

Il numero di tasti con cifre numeriche in un cellulare con tastiera standard è 10. Quindi il risultato sarà $10^4=10000$ (risposta D).

ESEMPIO 53

Il codice pin di un cellulare è formato da 6 cifre numeriche. Le prime due sono il 4 e il 5 e so per certo che le rimanenti non sono né il 4 né il 5. Quante possibilità di combinazioni ci sono per formare il pin completo?

- A) 4096
- B) 5012
- C) 6848
- D) 8400
- E) 10000

I numeri sulla tastiera sono 10, ma poiché 2 sono già noti, devo considerare che il totale dei numeri sia 8. Inoltre delle 6 cifre del pin, 2 sono già conosciute, quindi le ripetizioni possibili non sono 6 ma 4. Si ha quindi che il risultato è dato da $8^4=4096$ (risposta A).

COMBINAZIONI SEMPLICI

In una combinazione semplice si ha la presentazione di elementi di un insieme senza che l'ordine dei componenti abbia importanza. Naturalmente, in quanto “semplice” la combinazione di questo tipo non prevede la ripetizione di uno stesso elemento all'interno della presentazione. La formula che definisce le combinazioni semplici è data da:

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dove C indica la combinazione, D la disposizione, P la permutazione, n il numero di oggetti dell'insieme S e k la lunghezza degli elementi di S.

ESEMPIO 54

Ad un tavolo di gioco vengono distribuite 5 carte ad ogni giocatore. Il mazzo iniziale aveva 32 carte. In quanti modi diversi ogni giocatore può ricevere le carte?

- A) 48600
- B) 98601
- C) 147896
- D) 201376
- E) 315450

Iniziamo col notare che ogni volta che una carta viene data, non si può più ripetere: quindi siamo di fronte ad una combinazione semplice. Il numero di carte totale è 32, il numero di carte distribuite è 5, da cui deriva:

$$\frac{32!}{5!(32-5)!} = \frac{32!}{5!*27!} = 201376$$

(risposta D).

COMBINAZIONI CON RIPETIZIONE

Come per le permutazioni e per le disposizioni, si possono avere le combinazioni con ripetizione, quando alcuni componenti vengono ripetuti più volte. In questo caso si ha:

$$C' = \frac{(n + k - 1)!}{k!(n - 1)!}$$

Dove C' indica la combinazione con ripetizione.

ESEMPIO 55

In quanti modi posso dividere 18 penne in 4 cassetti?

- A) 785
- B) 960
- C) 1330
- D) 1545
- E) nessuna delle precedenti risposte è corretta

Risulta subito evidente che gli oggetti da distribuire sono le penne, per cui $k=18$. Ne deriva che la combinazione risulta pari a

$$\begin{aligned} C' &= \frac{(n+k-1)!}{(n-1)! * k!} = \frac{(4+18-1)!}{(4-1)! * 18!} \\ &= \frac{21!}{3! * 18!} = 1330 \end{aligned}$$

(risposta C).

PERMUTAZIONI, DISPOSIZIONI O COMBINAZIONI?

Durante la lettura del testo di un esercizio può essere facile riconoscere che la soluzione debba essere ricavata tramite un calcolo combinatorio, ma si può avere difficoltà a riconoscere se si tratta di applicare le formule delle permutazioni, delle combinazioni o delle disposizioni (semplici o con ripetizione che siano). Un'importante domanda che bisogna porsi prima di affrontare un calcolo combinatorio è: ogni oggetto dell'insieme può essere utilizzato una sola volta o più di una volta? Inoltre, è importante l'ordine degli oggetti nell'insieme che sto considerando oppure no? Le risposte a queste domande ci aiuteranno a capire quale formula dovremo usare.

Diamo qui uno schema riassuntivo per cercare di riconoscere facilmente, per le varie tipologie di esercizi, in quali casi ci si trova.

Permutazioni semplici: numero di elementi = n ; gli elementi differiscono solo per l'ordine: ordine diverso = raggruppamento diverso; tutti gli elementi sono diversi tra di loro.

Formula:

$$P_n = n!$$

Permutazioni con ripetizioni. Sono presenti più volte gli stessi elementi; Ordine diverso = raggruppamento diverso.

Formula:

$$P_n^{k_1, k_2, k_3, \dots, k_z} = \frac{n!}{k_1! * \dots k_z!}$$

Distribuzioni semplici: Non ci sono ripetizioni degli oggetti. Ordine diverso = raggruppamento diverso

Formula:

$$D_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Disposizioni con ripetizioni: Sono presenti più volte gli stessi elementi; ordine diverso = raggruppamento diverso

$$D_{n,k} = n^k$$

Combinazioni semplici: Senza ripetizioni; ordine diverso = stesso raggruppamento

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! * (n-k)!}$$

Combinazioni con ripetizioni: sono presenti più volte gli stessi elementi; ordine diverso = stesso raggruppamento

$$C' = \frac{(n + k - 1)!}{(n - 1)! * k!}$$

Per capire se in un esercizio devo usare le disposizioni, le permutazioni o le combinazioni, per prima cosa bisogna chiedersi: nei gruppi che si devono formare, è importante l'**ordine** con cui sono disposti gli elementi? Se l'ordine non è importante ci troviamo nel caso delle combinazioni, mentre se è importante, allora ci troviamo di fronte ad un problema di permutazione o disposizione. A questo punto, per distinguere se sono nel campo delle permutazioni o delle disposizioni, devo comprendere se nei gruppi devono essere presenti ogni volta tutti gli elementi (in questo caso devo calcolare le permutazioni) oppure no (e allora utilizzo le disposizioni).

ESEMPIO 56

Lanciamo una moneta sei volte. Qual è la probabilità di ottenere tre volte testa?

- A) 5/21
- B) 7/21
- C) 1/16
- D) 3/16
- E) 5/16

Lanciando una moneta ho il 50% delle probabilità che esca testa e il 50% di probabilità che esca croce. Focalizziamo la nostra attenzione sull'uscita della testa, che è quella richiesta dal quiz. Ho quindi il 50% delle probabilità che corrisponde a 1/2. Poiché però devo effettuare 6 lanci, devo cumulare il risultato, avrò quindi $(1/2)^6 = 1/64$ casi possibili.

Vediamo ora quali sono i casi favorevoli. Poiché bisogna che esca tre volte testa, allora vuol dire che bisogna combinare i sei lanci con le tre teste che devono uscire. Si ha quindi una combinazione semplice del tipo

$$C_{n,k} = \frac{n!}{k! * (n - k)!}$$

Con $n=6$ e $k=3$ da cui segue

$$C = \frac{6!}{3! * (6-3!)} = \frac{6!}{3! * 3!} = \frac{720}{36} = 20$$

Conoscendo i casi favorevoli e quelli possibili, possiamo ora calcolare la probabilità, che è data da

$$P = \frac{20}{64} = \frac{5}{16}$$

Come in risposta E.

ESEMPIO 57

Lanciamo una moneta sei volte. Qual è la probabilità di ottenere testa almeno tre volte?

- A) 7/41
- B) 15/37
- C) 21/32
- D) 13/8
- E) 1/3

La differenza con l'esercizio precedente è data dal fatto che la richiesta non è che esca tre volte testa, ma che esca almeno tre volte testa (quindi può uscire anche quattro, cinque o anche sei volte testa). Vediamo come bisogna ragionare in questo tipo di quiz.

I casi possibili sono sempre $(1/2)^6 = 1/64$

Ma i casi favorevoli non sono solo 20 come nel quesito precedente. Perché 20 sono i casi in cui esce tre volte testa, ma a noi serve che esca almeno tre volte, quindi vuol dire che può uscire anche quattro, cinque o sei volte. Calcoliamo quindi i casi favorevoli per l'uscita di 4, 5 e 6 teste e si ha:

$$C_{6,4} = \frac{6!}{4! * (6-4)!} = \frac{720}{48} = 15$$

$$C_{6,5} = \frac{6!}{5! * (6-5)!} = \frac{720}{120} = 6$$

$$C_{6,6} = 1$$

Per cui la probabilità totale sarà data dalla somma di tutti i casi favorevoli diviso quelli possibili, ossia:

$$P = \frac{20}{64} + \frac{15}{64} + \frac{6}{64} + \frac{1}{64} = \frac{42}{64} = \frac{21}{32}$$

Come da risposta C.

Abbiamo 6 bicchieri. Ciascuno di essi contiene 4 palline bianche e 18 nere. Estraiamo una pallina da ciascun bicchiere. Qual è la probabilità di estrarre tre palline bianche e tre nere?

- A) $6/7$
- B) $41/105$
- C) $127/2783$
- D) $9/256$
- E) $256/3125$

Per risolvere questo quesito dobbiamo calcolare dapprima la probabilità di uscita di una pallina da un bicchiere. Per ogni bicchiere, la quantità di palline bianche e nere è la stessa, e possiamo quindi calcolare i vari passaggi che ci permettono di arrivare alla soluzione. Per i vari bicchieri si hanno le seguenti quantità di palline e probabilità di estrazione:

bicchieri 1	4 bianche + 16 nere	probabilità di estrazione pallina bianca $=n_f/n_p=4/20=1/5$
Bicchieri 2	4 bianche + 16 nere	probabilità di estrazione pallina bianca $=n_f/n_p=4/20=1/5$
Bicchieri 3	4 bianche + 16 nere	probabilità di estrazione pallina bianca $=n_f/n_p=4/20=1/5$
Bicchieri 4	4 bianche + 16 nere	probabilità di estrazione pallina nera $=n_f/n_p=16/20=4/5$
Bicchieri 5	4 bianche + 16 nere	probabilità di estrazione pallina nera $=n_f/n_p=16/20=4/5$
Bicchieri 6	4 bianche + 16 nere	probabilità di estrazione pallina bianca $=n_f/n_p=16/20=4/5$

Ora bisogna calcolare la possibilità che le palline escano di tre colori uguali, per cui le probabilità vanno moltiplicate tra di loro.

Probabilità totale di uscita di 3 palline bianche dai bicchieri 1, 2 e 3: $1/5*1/5*1/5=1/125$

Probabilità totale di uscita di 3 palline nere dai bicchieri 4, 5 e 6: $4/5*4/5*4/5=64/125$

Infine, è necessario che i risultati ottenuti escano insieme, quindi ancora una volta dobbiamo moltiplicare i valori ottenuti.

Probabilità totale di uscita 3 bianche e 3 nere: $1/125*64/125=64/15625$

Ma il valore così calcolato non rappresenta il risultato finale, perché non è stato ancora considerato il numero di combinazioni possibili delle estrazioni. Infatti è possibile che si estragga prima una

bianca, poi due nere, poi due bianche e poi un'altra nera. Oppure prima due bianche e poi due nere e poi una bianca e una nera e così via. Dobbiamo quindi calcolare il numero di combinazioni possibili di uscita dei diversi colori delle palline. Poiché ho 6 bicchieri e le uscite sono a tre colori alla volta, posso impostare una combinazione semplice con $n=6$ e $k=3$, da cui deriva:

$$C = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{6!}{3!(6-3)!} = \frac{6!}{3!3!}$$

Il risultato che si ottiene è 20: e le 20 combinazioni vanno quindi moltiplicate per le probabilità calcolate precedentemente ottenendo così:

$$\frac{64}{15625} * 20 = \frac{1280}{15625} = \frac{256}{3125}$$

Come in risposta E.

ESEMPIO 59

Determinare la probabilità che in una famiglia con sei figli quattro di essi siano maschi e i restanti due siano femmine.

- A) $33/97$
- B) $21/83$
- C) $15/64$
- D) $9/8$
- E) $3/2$

La possibilità che un figlio sia maschio o femmina è di $1/2$ (come nel lancio di una moneta può uscire solo o testa o croce, nel caso dei figli la possibilità è che sia o maschio o femmina). Poiché il

quesito ci informa che i figli sono 6, allora la probabilità che siano dell'uno o dell'altro sesso è data da

$$\left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}$$

Vediamo ora quante sono le combinazioni che definiscono la possibilità di un rapporto di quattro maschi su sei figli:

$$C = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{6!}{4!2!} = 15$$

Moltiplicando la probabilità per il numero di combinazioni possibili si ha:

$$15 * \frac{1}{64} = \frac{15}{64}$$

(risposta C).

ESEMPIO 60

Cinque persone hanno a disposizione 5 sedie: in quanti modi diversi le possono occupare?

- A) 25
- B) 50
- C) 100
- D) 120
- E) 180

Cinque persone possono disporsi in $5!$ modi (ossia 120, come in risposta D). Poiché le sedie sono proprio lo stesso numero delle persone, ne deriva che le possono occupare solo nei 120 posti previsti dalla disposizione.

ESEMPIO 61

Sette persone hanno a disposizione 4 sedie: in quanti modi diversi le possono occupare?

- A) 210
- B) 187
- C) 133
- D) 49
- E) 28

Sette persone possono disporsi in $7!$ modi, ossia 5040 possibilità. Tuttavia possono occupare solo 4 sedie alla volta, quindi ci troviamo in una combinazione di 7 persone da disporre 4 alla volta, ossia

$$\frac{7!}{4!} = \frac{5040}{24} = 210$$

Come in risposta A

ESEMPIO 62

Quanti diversi incontri di pugilato possono essere organizzati tra nove pugili?

- A) 72
- B) 66
- C) 49
- D) 36
- E) 14

Per risolvere questo quesito bisogna calcolare le combinazioni dei vari incontri che vanno prese a 2 a 2 perché i pugili si sfidano a coppie.

$$\frac{9!}{2!(9-2)!} = \frac{9!}{2!7!} = \frac{362880}{10080} = 36$$

36 incontri diversi come in risposta D.

ESEMPIO 63

Ad una festa a sorpresa arrivano, a casa del festeggiato ignaro, 57 persone. Invitati e festeggiato si salutano tutti con una stretta di mano. Quante diverse strette di mano si verificano?

- A) 3500
- B) 2004
- C) 1653
- D) 116
- E) nessuna delle precedenti risposte è corretta

Le persone in totale sono 58, perché non va dimenticato il festeggiato. Avremo quindi che ogni persona (n=58) si saluterà a gruppi di 2 alla volta (k=2), per cui, calcolando le combinazioni, si ha:

$$\frac{58!}{2!(58-2)!} = \frac{58!}{2!56!} = 1653$$

Come riportato in risposta C

ESEMPIO 64

Quante partite di scacchi diverse possono essere giocate da sei giocatori?

- A) 12

- B) 15
- C) 18
- D) 24
- E) 30

Questo è un problema di combinazione semplice. Si deve valutare il numero $C_{6,2}$ delle combinazioni semplici di 6 elementi di classe 2 (presi 2 a 2: una partita a scacchi viene infatti giocata da due giocatori).

$$C_{n,k} = \frac{6!}{2! * (6-2)!} = \frac{6!}{2! * 4!} = 15$$

Come in risposta B.

• Logica verbale

Quando si parla di logica verbale si intende quella parte di logica e di esercizi associati che non prevedono calcoli matematici, ma ragionamenti logico-deduttivi su informazioni fornite in modo spesso simile ad un “rompicapo”.

Oppure rientrano nei ragionamenti logico-verbali tutti quegli esercizi di associazioni di termini con significato simile, legati da anagrammi o con funzione logica simile. Questi ultimi si presentano di solito come proporzioni verbali. Le proporzioni verbali possono essere di diverso tipo. Di solito si mettono in relazione termini che sono legati da una funzione logica o grammaticale comune (ad esempio nome: nome = aggettivo : aggettivo) come vedremo anche in seguito, o sono collegati da lettere in comune (sono quindi anagrammi).

ANAGRAMMI

Iniziamo dagli anagrammi che risultano i più semplici da comprendere e risolvere. Negli esercizi con anagrammi difficilmente si richiede di anagrammare parole con più di sette-otto lettere. Vediamo alcuni esempi e le successive spiegazioni.

ESEMPIO 65

Intimo : Onirico = X : Ironico

- A) Moniti
- B) Eroico
- C) Indico
- D) Intero
- E) Omare

Nel caso in esempio si può notare che onirico e ironico sono formati dalle stesse lettere, quindi il termine mancante dovrà essere formato dalle stesse lettere di intimo. La parola corretta è quindi quella dell'opzione A, ossia moniti.

ESEMPIO 66

Sire : Rise = Vocale : X

- A) Calvo
- B) Alcove
- C) Seri
- D) Veloce
- E) Arse

Anche in questo caso le prime due parti della proporzione sono legate tra di loro da una relazione di anagrammi. Ne deriva che il termine da trovare dovrà essere l'anagramma della parola Vocale, ossia Alcove (risposta B).

Purtroppo in questo tipo di proporzioni verbali non ci sono regole da applicare per potere risolvere i quesiti, ma c'è solo bisogno di un'attenta osservazione dei termini che permetta di trovare la logica della relazione. Di seguito alcuni esercizi per potersi esercitare.

ESEMPIO 67

Sesta : Tasse = Ripe : X

- A) Pera
- B) Sete
- C) Tesa
- D) Pire
- E) Rupe

Anche in questo caso un quiz con soluzione anagrammatica: la risposta corretta è quindi la D.

ESEMPIO 68

Stima : X = Riva : Vari

- A) Stiva
- B) Rovi
- C) Vero
- D) Mista
- E) Mosto

La soluzione corretta è la D, in quanto “mista” è anagramma di “stima”.

ESEMPIO 69

Mare : X = Lime : Meli

- A) Erma
- B) Remo
- C) Moli
- D) More
- E) Nessuna delle soluzioni è quella giusta

La soluzione corretta di questa proposizione anagrammatica è la A.

AGGIUNTA, SOTTRAZIONE O CAMBIO DI LETTERA

Altri tipi di proporzioni possono essere date da parole che differiscono per una lettera o per una sillaba, come nell'esempio che segue.

ESEMPIO 70

Libro : Libero = X : Capire

- A) Quaderno
- B) Lettura
- C) Comprendere
- D) Capre
- E) Nessuna delle soluzioni è quella corretta

In questo caso la relazione che lega i primi due termini è la differenza di una lettera, in particolare la “e” che trasforma il “libro” in “libero”. Quindi, anche il secondo termine della proporzione dovrà essere legato dalla stessa relazione: la differenza di una lettera. La risposta corretta è quindi la D, in quanto aggiungendo la lettera “i” a capre si ottiene capire.

ESEMPIO 71

Grande : X = Grane : Orto

- A) Piccolo
- B) Carota
- C) Grandine
- D) Corto
- E) Molto

La relazione tra “grande” e “grane” è che, per passare da un termine ad un altro, si perde una lettera, in questo caso la “d”. Quindi anche per passare dalla parola incognita ad orto deve essere stata persa una lettera, ossia, la parola da trovare ha una lettera in più rispetto ad orto. Quindi la risposta corretta è la D (corto – orto).

ESEMPIO 72

Presto : Preso = X : Rata

- A) Tardi
- B) Reso
- C) Grata
- D) Tassa
- E) Nessuna delle risposte è corretta

Anche in questo caso la proporzione è verificata per differenza di lettera, e quindi la parola incognita sarà quella della soluzione C.

Altri test ancora prevedono delle proporzioni tra termini in cui si verificano dei cambi di lettere. Si riportano un esempio e qualche esercizio.

ESEMPIO 73

Mesto : Pesto = Caro : X

- A) Raro
- B) Rata
- C) Presto
- D) Lesto

E) Pero

La differenza tra le prime due parole del primo termine della proporzione è una differenza di lettera: la m e la p cambiano “mesto” in “pesto”. Ne deriva che anche la differenza tra le due parole del secondo termine della proporzione deve essere una differenza di una lettera, in questo caso la c e la r (risposta A) che cambiano “caro” in “raro”.

ESEMPIO 74

$X : \text{Sauna} = \text{Lesto} : \text{Resto}$

- A) Testo
- B) Vapore
- C) Caldo
- D) Pesto
- E) Fauna

Il cambio di lettera è alla base di questa proporzione. Quindi la parola da trovare sarà quella fornita dalla risposta E, fauna.

ESEMPIO 75

$\text{Posto} : \text{Sole} = X : \text{Gole}$

- A) Bruciato
- B) Mosto
- C) Mare
- D) Occhi
- E) Nessuna delle precedenti risposte è corretta

Ancora un quiz basato su proporzioni di cambio di lettera. In questo caso la soluzione è data dalla risposta B.

SINONIMI E CONTRARI

Alcune proporzioni prevedono che la relazione tra i termini proposti sia di sinonimia o di opposizione. Anche in questo caso non ci sono regole da seguire, ma è necessaria una buona conoscenza dei termini italiani. Come nell'esempio e negli esercizi riportati di seguito.

ESEMPIO 76

Assenza : Presenza = X : Manca

- A) Dritto
- B) Destra
- C) Arrivo
- D) C'è
- E) Nessuna delle risposte precedenti è corretta

La relazione tra le prime due parole del primo termine della proporzione è di opposizione (infatti assenza è il contrario, ossia l'opposto di presenza) quindi anche le due parole del secondo termine devono essere legate dalla stessa natura logica di opposizione. Il contrario di manca è chiaramente destra, per cui la risposta corretta è la B.

ESEMPIO 77

Dolce : X = Buono : Cattivo

- A) Salato
- B) Zucchero
- C) Amaro
- D) Saporito
- E) Sale

A volte bisogna porre attenzione sul significato corretto dei termini per non incorre in errori. Dopo aver compreso che la proporzione è basata su relazione di opposizione, bisogna fare attenzione a scegliere il termine corretto, perché ci si potrebbe sbagliare utilizzando il termine "salato" come opposto di "dolce", mentre il contrario di "salato" nella lingua italiana è "insipido". Il contrario di "dolce" è "amaro", come in risposta C.

ESEMPIO 78

Esuberanza : X = Rumore : Silenzio

- A) Fragranza
- B) Flemma
- C) Confusione
- D) Premura
- E) Riposo

Un altro test sulle proporzioni con termini in opposizione. Questa volta la risposta corretta è la B, in quanto la flemma è il contrario dell'esuberanza.

• Cenni di logica proposizionale

La logica preposizionale è lo studio delle varie forme e possibilità di ragionamento ed ha lo scopo di definire i ragionamenti corretti e distinguerli da quelli scorretti. Prima di partire con esempi ed esercizi, riportiamo una serie di definizioni che vengono utilizzate nel linguaggio della logica:

Argomento: è quella parte del discorso che ha lo scopo di fornire le ragioni, i motivi del perché le cose che si affermano sono proprio così.

Premessa: una parte di discorso che introduce degli argomenti.

Spiegazione: è quella parte del discorso che ha come scopo la descrizione delle cose come stanno.

Enunciato: è la parte del discorso minima in cui il soggetto viene connesso con un predicato. Un enunciato può essere vero o falso.

Deduzione: è una modalità di ragionamento per cui, partendo da una o più premesse, si deve necessariamente giungere ad una determinata e unica conclusione.

Induzione: è una modalità di ragionamento per cui, partendo da determinate promesse, si può dimostrare la probabilità – più o meno elevata - che si verifichi una conclusione.

Argomento deduttivo: un argomento che usa un ragionamento deduttivo è definito “argomento deduttivo”, ossia un discorso in cui, se le premesse che lo costituiscono sono valide, allora è valida la conclusione che se ne trae. Bisogna però porre attenzione su una cosa: non necessariamente un argomento deduttivo valido è anche vero (cioè possibile). Infatti, il fatto che due o più argomenti siano logici, non vuol dire necessariamente che siano realistici.

Ad esempio, in questo sillogismo:

Prima premessa: Tutti i cani sono verdi.

Seconda premessa: Bobby è un cane.

Ne deriva che: Bobby è verde.

Dal punto di vista logico il discorso riportato è valido, ma sicuramente non possiamo affermare che esso sia vero, non esistendo nella realtà cani verdi...

Principio di non contraddizione: definisce che dati due enunciati contraddittori, se uno dei due è vero, l'altro deve essere per forza falso.

ENUNCIATI E CARATTERISTICHE

Abbiamo detto che un enunciato è una proposizione minima di senso compiuto e che può essere vero o falso. Tra gli enunciati ci sono quelli che definiscono le *proposizioni categoriche*, ossia quelle dichiarazioni che possono essere analizzate dividendo le asserzioni in diverse categorie, o classi, o gruppi. Ad esempio sono proposizioni categoriche quelle che affermano che in un certo gruppo A sia incluso o meno un altro gruppo B o un ulteriore gruppo C. Quindi le proposizioni categoriche definiscono le relazioni che esistono tra più categorie o gruppi. Queste relazioni sono strettamente connesse da quello che in matematica è chiamato “insieme”.

Si possono distinguere quattro tipi di proposizioni categoriche: *proposizione universale affermativa*, *universale negativa*, *particolare affermativa* e *particolare negativa*..

Una **proposizione universale affermativa** dice che ogni elemento di una classe A è anche elemento della classe B, per cui tutti gli elementi di A sono sempre inclusi in B. Ad esempio la proposizione “tutti gli uomini sono biondi” è una proposizione universale affermativa. Una proposizione universale affermativa può anche presupporre una proprietà tale che permetta ad un oggetto di essere definito nella classe B se ha quella determinata caratteristica della classe A. Ad esempio la proposizione “se quello è un uomo, allora è biondo” evidenzia una proprietà (l’essere un uomo) che permette di definire che allora è biondo.

ATTENZIONE

Come spiegato precedentemente nei ragionamenti logici non cerchiamo la verità di una determinata affermazione, ma solo la validità.

Una **proposizione universale negativa** è definita invece in modo che ogni elemento di una certa classe A non è elemento di un’altra classe B. Quindi non può essere che un gruppo o classe B appartenga ad A. Un esempio di proposizione universale negativa è “nessun uomo è biondo”. Anche in questo caso si può ottenere una relazione tra la proprietà dell’oggetto e la validità della negazione: “Se quello è un uomo, allora non è biondo” oppure “se quello è biondo, allora non è un uomo”.

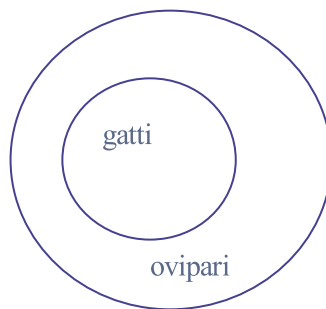
ESEMPIO 79

“Tutti i gatti sono ovipari” è:

- A) una proposizione falsa
- B) una proposizione affermativa
- C) una proposizione universale affermativa

- D) una proposizione negativa
- E) una proposizione non vera

Per quanto la frase sia non vera dal punto di vista biologico, nel campo della logica essa viene catalogata come proposizione universale affermativa (risposta C), in quanto afferma che tutti gli elementi di una certa classe (in questo caso i gatti) sono “contenuti” un'altra classe (in questo caso degli ovipari). Se rappresentassimo dal punto di vista grafico questa proposizione, ne risulterebbero due insiemi, uno contenuto nell'altro, come riportato in figura:



La rappresentazione grafica della proposizione universale affermativa è sempre di questo tipo ed evidenzia appunto che una classe è insieme dell'altra.

ESEMPIO 80

“Tutti gli atleti sono alti e magri”.

Da questa frase si può dedurre che:

- A) Se sei solo alto non sei un atleta
- B) se sei solo magro non sei un atleta
- C) se sei alto e magro allora sei un atleta
- D) tutte le precedenti risposte sono deducibili dalla frase data
- E) nessuna delle precedenti risposte è deducibile dalla frase data

Anche questo esempio si basa su una proposizione universale affermativa. Una proposizione che prevede una congiunzione di predicati (alti E magri) e non una disgiunzione (alti O magri). Questo vuole dire che sono necessarie tutte e due le caratteristiche per potere essere reputato un atleta, e quindi una sola caratteristica non fa di te un atleta. Se la frase fosse stata disgiuntiva (tutti gli atleti sono alti O magri) allora anche l'essere solo alto o solo magro era condizione sufficiente per essere un atleta. La risposta corretta è quindi la D.

ESEMPIO 81

“Nessuno studente è attento in classe”.

Da questa frase si deduce che:

- A) Se Aldo è uno studente, non è attento in classe
- B) Se Aldo non è uno studente, è attento in classe
- C) Se Aldo è uno studente, potrebbe non essere attento in classe
- D) Se Aldo non è uno studente, potrebbe essere attento in classe
- E) Solo la C è errata

In questo caso abbiamo un esempio di proposizione universale negativa, che oppone l'essere studente con l'essere attento in classe. La risposta A è sicuramente valida, in quanto deriva direttamente dalla proposizione del testo. Ma anche la B è valida in quanto non essendo Aldo uno studente, allora può essere attento in classe (il non essere attenti è caratteristica degli studenti). L'opzione C non è logicamente derivata dalla proposizione principale che afferma che NESSUNO studente è attento, quindi non c'è possibilità che uno studente possa essere attento. L'opzione D può ancora essere valida in quanto, non avendo informazioni su “i non studenti” non possiamo sapere se Aldo sia attento o meno, ma comunque tutte e due le possibilità sono logicamente valide. Quindi la risposta corretta è la E.

Una **proposizione particolare affermativa** dice che almeno un elemento di una certa classe appartiene anche ad un'altra classe. Si riconoscono facilmente perché sono solitamente introdotte da termini partitivi come “alcuni” “certi” “qualche”. Sono del tipo “alcuni cani sono neri” da cui “se quello è un cane POTREBBE essere nero”, oppure “se quello è nero POTREBBE essere un cane” (non essendo un'affermazione universale non è detto che sia vera l'associazione tra i due termini).

Una **proposizione particolare negativa** afferma invece che almeno un elemento di un gruppo è sicuramente escluso da un altro gruppo: “alcuni cani non sono pericolosi”.

ESEMPIO 82

“Alcuni ragazzi sono irrequieti durante l'ora di filosofia”

Dalla frase precedente si può dedurre che:

- A) Alcuni ragazzi non sono irrequieti durante l'ora di filosofia

- B) Se c'è l'ora di filosofia, allora alcuni saranno irrequieti
- C) Se non c'è l'ora di filosofia, alcuni ragazzi potrebbero non essere irrequieti
- D) Tutte le risposte precedenti sono corrette
- E) Nessuna risposta precedente è corretta

La proposizione dell'esercizio è una proposizione particolare affermativa, che prevede che solo una parte del tutto svolga una tale azione. Ne deriva che, se alcuni ragazzi sono irrequieti ce ne saranno altri non irrequieti, quindi la risposta A è corretta. Ma anche la risposta B è corretta, in quanto evidenzia che se durante una giornata scolastica c'è un'ora di filosofia, allora i ragazzi diventeranno irrequieti, che è l'equivalente alla proposizione presentata nel testo. Ora, se sappiamo che durante l'ora di filosofia i ragazzi sono irrequieti, è anche vero che non sappiamo cosa succede durante le altre ore. Quindi può essere considerato vero il fatto che, se non c'è l'ora di filosofia, i ragazzi possono non essere irrequieti. Quindi, essendo corrette tutte e tre le prime tre risposte, la soluzione al quesito è la D.

ESEMPIO 83

“Gli elefanti non scordano mai niente”.

Quale delle seguenti frasi è logicamente deducibile dalla proposizione riportata?

- A) Alcuni animali non scordano mai niente
- B) Gli elefanti ricordano tutto
- C) Alcuni animali hanno una buona memoria
- D) Tutte e tre le frasi sono corrette
- E) Nessuna frase è corretta

In questo quesito è riportato un trabocchetto. Bisogna infatti ricordare che nei quesiti di logica vanno valutate solo ed esclusivamente le informazioni fornite. Ora, da nessuna parte nel quesito è scritto che gli elefanti sono animali. Per quanto possiamo controbattere che tutti sanno che gli elefanti sono animali, né l'opzione A né la C sono DEDUCIBILI dal testo riportato, ma sono deducibili da una nostra conoscenza pregressa. Quindi, l'unica risposta corretta è la B!

RELAZIONI TRA PROPOSIZIONI

Le relazioni tra i vari tipi di proposizioni danno origine ad altre proposizioni che possono essere di diverso tipo.

Proposizioni contraddittorie: due proposizioni sono contraddittorie quando una è la negazione dell'altra. Ne deriva che è impossibile che siano entrambe vere. Ancora una volta prima di continuare si ricorda l'importanza fondamentale della validità di due o più proposizioni. Allora deriva che due proposizioni sono contraddittorie sempre se una è universale e l'altra è particolare o se una è affermativa e l'altra è negativa.

Una frase del tipo “tutti gli uomini sono biondi” e “alcuni uomini sono biondi” sono contraddittorie perché se è vera la prima frase, la seconda deve essere non vera o viceversa.

Proposizioni contrarie: due proposizioni si dicono contrarie quando non possono essere entrambe vere. La differenza tra le contraddittorie e le contrarie è che per le contraddittorie si prevede che una delle due proposizioni sia vera e l'altra falsa, mentre nelle contrarie potrebbero essere entrambe false. Quindi si può dire che le proposizioni contrarie possono ammettere una terza possibilità, non definita dalle due proposizioni presentate. Sono sempre contrarie tra loro le proposizioni universali affermative e quelle universali negative.

Proposizioni subcontrarie: due proposizioni si dicono subcontrarie quando possono essere entrambe vere ma non possono essere entrambe false. Si trova questo tipo di relazione tra una proposizione particolare affermativa ed una particolare negativa. Se per esempio confrontiamo la frase “alcuni cani sono neri” (particolare affermativa) e la frase “alcuni cani non sono neri” (particolare negativa) ne deriva che possono essere entrambe vere, ossia, in un insieme di cani alcuni sono neri e altri non sono neri. Ma non possono essere entrambe false, perché se è falso che alcuni cani sono neri, deve essere vero che alcuni cani non sono neri.

Proposizioni subalterne: due proposizioni subalterne hanno lo stesso soggetto e predicato e quindi la medesima qualità, ma differiscono per la quantità. Ne deriva che la verità di una proposizione universale (superalterna) porta alla verità nella corrispondente proposizione particolare (subalterna), ma non può verificarsi il contrario.

Così dalla frase “tutti gli uomini sono biondi” possiamo ricavare che, se questa frase è vera, sarà vera (perché subalterna) la frase “alcuni uomini sono biondi” mentre sarà falsa la frase “nessun uomo è biondo” (perché contraria) e sarà falsa la frase “alcuni uomini non sono biondi” (perché contraddittoria).

ESEMPIO 84

Marco, Lorenzo, Carlo e Pasquale sono quattro fratelli. Sapendo che solo una delle affermazioni riportate è vera, chi è il più alto?

Pasquale, dice “Marco è il fratello più alto”

Marco afferma “è Lorenzo il più alto”

Lorenzo dice “non sono io il più alto”

Carlo dice “non sono io il più alto”

Quindi il più alto è:

- A) Marco
- B) Pasquale
- C) Lorenzo
- D) Carlo
- E) Non ci sono informazioni sufficienti per stabilirlo

Per risolvere questo quesito non va mai perso di vista il fatto che SOLO UNA delle affermazioni proposte è vera. Analizzando bene le frasi si noterà allora che si vengono a creare delle situazioni in cui risultano vere più frasi (cosa non possibile), per cui automaticamente si dovranno scartare delle opzioni. Partiamo dalla prima frase. Se fosse vero quanto affermato da Pasquale (cioè che Marco è il più alto), allora sarebbero vere anche le affermazioni di Lorenzo e Carlo (cioè che loro non sono i più alti) e quindi avremmo tre proposizioni vere, il che non è possibile.

Andiamo allora alla seconda frase. Se fosse vero che Lorenzo è il più alto, allora sarebbe vero anche quanto affermato da Carlo, che dice di non essere il più alto. Quindi si avrebbero due proposizioni vere e non una. Anche la verità della terza e della quarta affermazione porterebbe ad avere più proposizioni vere, il che ancora una volta, non è possibile. Per risolvere il quesito bisogna quindi ipotizzare che una delle affermazioni sia falsa, non vera. In particolare, si può notare che se è falsa l'affermazione di Marco, allora deve essere vero quanto afferma Lorenzo. Abbiamo quindi trovato una proposizione vera che risulta anche essere l'unica e possiamo quindi affermare che anche le affermazioni di Carlo e di Pasquale sono false. Ora, Pasquale afferma che Marco è il più alto, ma poiché la proposizione è falsa, vuol dire che non è Marco ad essere il più alto. Carlo invece afferma di non essere il più alto, ma siccome anche questa proposizione è falsa, ne deriva che è proprio lui ad essere il più alto! Quindi la risposta corretta è la D.

INTERFERENZE

Le interferenze possono essere le *conversioni*, le *obversioni* e le *contrapposizioni*.

Conversioni: una conversione è un procedimento per cui, partendo da una proposizione e tramite uno scambio tra soggetto e predicato, si può ottenere una proposizione logicamente equivalente. È sempre possibile effettuare una conversione nelle proposizioni universali negative e nelle

proposizioni particolari affermative. Ad esempio, dalla frase universale negativa “nessun uomo è invulnerabile” posso ottenere la conversione logicamente equivalente di “nessun invulnerabile è un uomo”. Parimenti, dalla frase particolare affermativa “alcuni uomini sono cantanti” posso ottenere la conversione logicamente equivalente in “alcuni cantanti sono uomini”. Si capisce subito che la conversione non può avvenire per le proposizioni particolari, perché da una frase tipo “alcuni animali sono cani” otterrei una conversione del tipo “alcuni cani sono animali”. Allo stesso modo per le proposizioni universali affermative la conversione non dà una proposizione logicamente valida (da “tutti i cani sono animali” otterrei per conversione “tutti gli animali sono cani”).

Obversioni: una obversione si crea partendo da una proposizione e lasciando soggetto e quantità invariati, ma cambiando la qualità e il predicato da positivo a negativo. Questo tipo di interferenza si può applicare a tutti i tipi di proposizioni universali e particolari. Ad esempio dalla proposizione universale affermativa “tutti i cani sono animali” si ottiene la proposizione obversa “Nessun cane è un non-animale”. Si vengono a creare così delle trasformazioni da universale affermativa a universale positiva e viceversa e da particolare affermativa a particolare negativa e viceversa.

Contrapposizione: un’interferenza per contrapposizione si genera contrapponendo e sostituendo il soggetto e il predicato di una proposizione con i rispettivi opposti. Questo tipo di interferenza è valida per le proposizioni universali affermative e per le particolari negative. Ad esempio, la frase “tutti i re sono ricchi” diventa per contrapposizione “tutti i non ricchi sono non re” (esempio in proposizione universale affermativa).

Avere chiare queste definizioni permette di chiarire la lettura di quei quiz che si presentano in maniera “complessa” ma che, dopo un’attenta analisi, evidenziano la semplicità delle strutture logiche da cui sono caratterizzati.

ESEMPIO 85

Aldo, Bruno, Carla, Dario ed Esther sono cinque cuochi che devono esaminare degli aiutanti. I candidati sono Franca, Giulio, Isabella, Lucia, Marco. Ogni candidato ha presentato un dolce: una torta panna e fragole, una crostata, un babà, un dolce al cucchiaio e una pastiera. Cuochi, candidati e dolci sono stati elencati in un ordine casuale. Sappiamo che:

Aldo assaggia la torta; Bruno assaggia il dolce di Giulio; Carla assaggia il babà che non è stato preparato da Franca; Dario assaggia il dolce preparato da Lucia e Marco ha preparato la pastiera.

Dalle informazioni riportate di può dedurre che Franca ha preparato:

- A) la torta
- B) il babà
- C) la crostata
- D) il dolce al cucchiaio
- E) non ci sono abbastanza informazioni per rispondere correttamente

Per potere risolvere questo tipo di quesiti bisogna innanzitutto analizzare le varie proposizioni. Si nota subito che sono quasi tutte proposizioni affermative e quindi non ci sono troppi “trabocchetti”. Basta sciogliere le informazioni date in uno schema più immediato da leggere. Poniamo quindi le informazioni su tre colonne, una per i cuochi, una per i candidati e una centrale, tutte da riempire in base alle informazioni ricevute:

Aldo	torta panna e fragole	
Bruno		Giulio
Carla	babà	
Dario		Lucia
	pastiera	Marco

Si vede subito che il cuoco mancante, che ha assaggiato la pastiera di Marco, è Ilaria. Tra i candidati, invece, risulta dal testo che Franca non ha preparato il babà, quindi automaticamente deve avere preparato la torta panna e fragole, quindi la risposta corretta è la A.

ESEMPIO 86

Gianni, Lucio, Marta, Maria e Paolo sono cinque fratelli. Si sa che Paolo è più grande di Maria che è più piccola di Marta, mentre Lucio è il maggiore dei fratelli e Gianni è più piccolo di Marta, ma più grande di Paolo.

Chi è il terzo dei fratelli?

- A) Gianni
- B) Lucio
- C) Marta
- D) Maria
- E) Paolo

Anche in questo caso le proposizioni sono semplici e il modo migliore per risolvere il quesito è ordinare le informazioni date. Ordinando le prime due informazioni (e ponendo i nomi in colonna dal più grande al più piccolo) si ha:

Paolo

Maria

Maria risulta più piccola di Marta, ma non ci viene detto niente sulla relazione di età tra Marta e Paolo. Quindi possono verificarsi due possibilità:

Paolo	oppure	Marta
Marta		Paolo
Maria		Maria

Inoltre si ha che Lucio è il maggiore dei fratelli:

Lucio	Lucio
Paolo	Marta
Marta	Paolo
Maria	Maria

L'ultimo dato, ossia che Gianni è più piccolo di Marta ma più grande di Paolo, ci permette di verificare che l'ordine corretto è quello della seconda colonna. Infatti solo con l'ordine della seconda colonna si può avere che Gianni è più piccolo di Marta ma più grande di Paolo.

Lucio

Marta

Gianni

Paolo

Maria

La risposta corretta quindi è la A.

ESEMPIO 87

Di 3 oggetti A, B e C, almeno 2 sono gialli. Sappiamo che se A è giallo lo è anche B, se C è giallo lo è anche A e che tra B e C almeno un oggetto non è giallo. Allora possiamo dedurre che:

A) A, B e C sono gialli

B) A non è giallo mentre B è giallo

C) C non è giallo mentre B è giallo

D) A e C sono gialli

E) C è giallo e B non è giallo

Cerchiamo di schematizzare le informazioni date relative ai tre oggetti.

Abbiamo un primo enunciato che afferma che se A è giallo allora anche B è giallo (ma non ci dice che A è sicuramente giallo):

Se A giallo allora B giallo

Un secondo enunciato afferma che se C è giallo allora lo è anche A:

Se C giallo allora A giallo

Inoltre tra B e C almeno uno non è giallo.

Analizziamo ora le opzioni fornite dalle risposte. La prima non può essere vera perchè sappiamo che tra B e C almeno un oggetto non è giallo.

La seconda opzione non può essere vera, perchè contraddittoria con il testo che afferma che se A è giallo anche B è giallo (e quindi C sarebbe non giallo) e se C è giallo anche A è giallo (e allora sarebbe B ad essere non giallo). Non si afferma mai che A possa essere non giallo!

La terza opzione è vera in quanto se A è giallo anche B è giallo. Inoltre, dovendo essere o B o C non gialli e avendo affermato che B è giallo, ne deriva che C non è giallo.

La quarta e quinta opzione sono entrambe non possibili perchè se C fosse giallo allora dal secondo enunciato deriva che anche A è giallo. Ma se A è giallo, dal primo enunciato deriva che anche B deve essere giallo. Tuttavia tra B e C ci deve essere per forza un oggetto non giallo, per cui queste due opzioni non possono essere considerate valide.

La risposta corretta è dunque la C.

ESEMPIO 88

Se domenica starà bene, Marzia andrà al mare a nuotare. Se Marco avrà voglia di nuotare andrà con lei. Domenica Marco è al parco giochi. Se ne deduce che sicuramente:

A) Marzia non è andata al mare a nuotare

B) Marzia non stava bene

C) Marco non aveva voglia di nuotare

D) Marco non si sentiva bene

E) sono valide almeno due opzioni

La risposta corretta è la C in quanto il fatto che Marco era al parco giochi non fornisce nessuna informazione sulla salute di Marzia, né sul fatto che sia andata a nuotare o meno. L'unica possibilità che Marco non sia andato a nuotare è che non si sentiva bene, come dall'opzione C.

I SILLOGISMI

Sicuramente tutti ricordano il celebre sillogismo su Socrate (Socrate è un uomo - tutti gli uomini sono mortali - Socrate è mortale). Un sillogismo è un ragionamento deduttivo costituito da tre proposizioni: due premesse ed una conclusione. Data per certa la verità delle due premesse, deve derivarne necessariamente la verità della conclusione.

In un sillogismo sono presenti solo tre termini che risultano ricorrenti nelle due premesse e nella conclusione. Nell'esempio precedente i termini sono Socrate, uomo, mortale. Tali termini prendono i nomi di termine maggiore, termine minore e termine medio.

Il termine maggiore è quello che viene posto come predicato della conclusione; il termine minore è invece quello collocato come soggetto della conclusione; il termine medio è il termine che non figura nella conclusione, ma solo nelle premesse.

La premessa che contiene il termine maggiore è detta premessa maggiore, quella che contiene il termine minore è detta invece premessa minore.

ESEMPIO 89

Analizzare il seguente sillogismo:

Gli italiani sono europei

I toscani sono italiani

Dunque i toscani sono europei

Analizziamo il sillogismo sulle basi delle conoscenze acquisite: il termine maggiore è "europei", in quanto viene posto come predicato della proposizione conclusiva. Il termine minore è invece "toscani" in quanto viene posto come soggetto della proposizione conclusiva. La premessa che contiene il termine maggiore è quindi "gli italiani sono europei", mentre la premessa minore è "i toscani sono italiani". Il termine "italiani", comune ad entrambe le premesse, rappresenta il termine medio.

Tuttavia non è detto che l'unione di due premesse che generano una conclusione sia un sillogismo corretto dal punto di vista logico, così come non è detto che se esso è corretto dal punto di vista logico sia anche vero.

Infatti per definizione un sillogismo è **corretto** se e solo se la conclusione è conseguenza logica delle premesse, ossia se la verità delle premesse implica quella della conclusione (non può esistere un caso in cui le premesse siano vere e la conclusione sia falsa). Quindi c'è bisogno di analizzare le relazioni tra le premesse (se sono vere o non vere) e la conclusione che se ne trae.

Lo studio dei sillogismi e della loro logica e correttezza può essere effettuato tramite gli insiemi e più precisamente tramite i diagrammi di Eulero-Venn. Infatti questi permettono di avere più chiare - perchè in via grafica - le relazioni tra le premesse e la conclusione. I diagrammi di Eulero-Venn rappresentano graficamente gli insiemi degli elementi che fanno parte delle premesse e della conclusione tramite figure chiuse.

ESEMPIO 90

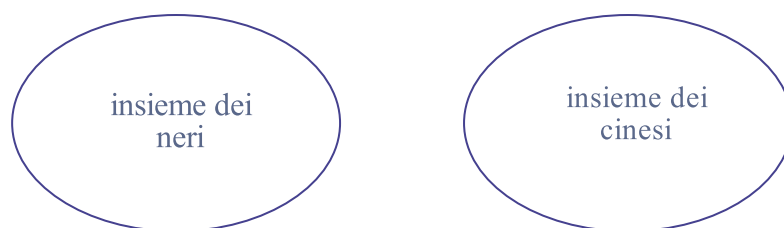
Premessa 1: Nessun nero è cinese (proposizione universale negativa)

Premessa 2: Tutti gli africani sono neri (proposizione universale positiva)

Conclusione: Nessun africano è cinese

Graficamente il sillogismo sopra espresso viene rappresentato dai seguenti insiemi:

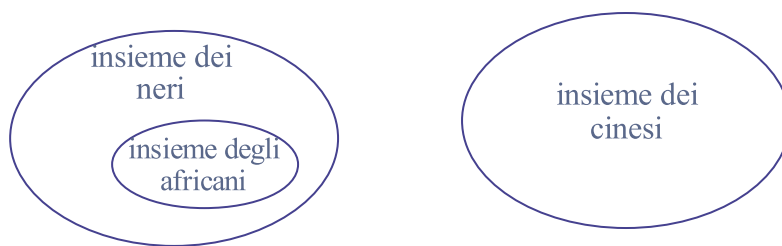
Nessun nero è cinese: poiché nessun nero è cinese, ne deriva che i due insiemi sono due unità separate, in quanto non hanno niente in comune.



Tutti gli africani sono neri: poiché tutti gli africani sono neri, vuol dire che l'insieme di tutti gli africani è contenuto nell'insieme dei neri, quindi i due insiemi sono uno interno all'altro



Unendo le due premesse si ha che nessun africano è nero: poiché gli africani fanno parte dell'insieme dei neri e l'insieme dei neri è completamente staccato da quello dei cinesi, ne deriva che la rappresentazione grafica della conclusione sarà la seguente:



In altri termini, se l'insieme dei neri è disgiunto da quello dei cinesi e quello degli africani è contenuto in quello dei neri, anche l'insieme degli africani è disgiunto da quello dei cinesi. Quindi il sillogismo è corretto.

ESEMPIO 91

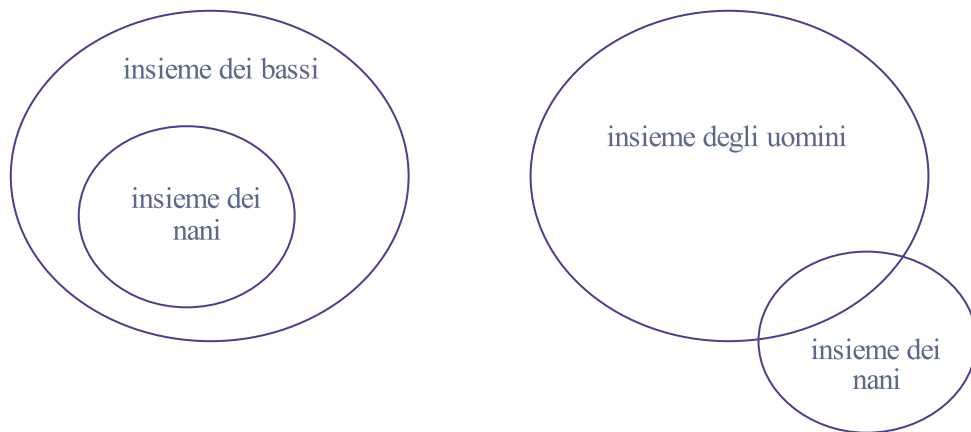
Rappresentiamo il seguente sillogismo e verifichiamo che sia corretto

Premessa I: Tutti i nani sono bassi

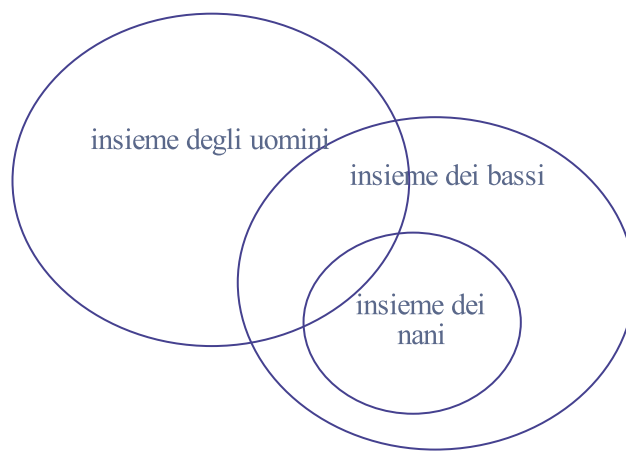
Premessa II: Qualche uomo è un nano

Conclusione: Qualche uomo è basso

La rappresentazione grafica della premessa I è data da un insieme contenuto in un altro in quanto l'insieme dei nani è contenuto nell'insieme dei bassi.



unendo i due grafici si ottiene:



Da cui si riconosce che il sillogismo è corretto in quanto l'insieme degli uomini, intersecando quello dei nani, va automaticamente ad intersecare anche quello dei bassi di cui l'insieme dei nani fa parte.

ESEMPIO 92

Tutti i gatti sono quadrupedi

Qualche animale non è quadrupede

Date le due premesse, qual è la conclusione corretta del seguente sillogismo?

- A) Quindi qualche gatto è quadrupede
- B) Quindi qualche animale è quadrupede
- C) Quindi qualche animale non è un gatto
- D) Quindi tutti i gatti sono quadrupedi
- E) Quindi qualche animale è un gatto

La risposta corretta è la C. Infatti, nella prima premessa viene enunciato che tutti i gatti sono quadrupedi (proposizione universale affermativa). Nella seconda che qualche animale non è quadrupede (proposizione particolare negativa). La conclusione, essendo vere le due premesse, deve essere costruita ricordando che il termine medio non vi deve apparire. Il termine medio in questo caso è “quadrupede”. Le due possibili conclusioni sarebbero quindi la C e la E. Ma poiché la seconda premessa è particolare negativa, ne deve derivare che anche la conclusione debba contenere il dato particolare negativo, cosa che non si verifica nell’opzione E.

ESEMPIO 93

Tutti i mammiferi allattano i piccoli

Nessun serpente allatta i piccoli

Date le due premesse, qual è la conclusione del seguente sillogismo?

- A) Quindi nessun mammifero è un serpente
- B) Quindi nessun serpente è un mammifero
- C) Quindi nessun mammifero allatta i piccoli
- D) Quindi alcuni serpenti allattano i piccoli
- E) Nessuna delle soluzioni è corretta

La soluzione corretta è la B. Le due premesse, in quanto una universale affermativa e l’altra universale negativa, escludono a vicenda la possibilità di intersezione. Possiamo trascrivere questo sillogismo con i diagrammi di Eulero –Venn. Si ha allora:



Ossia, degli insiemi separati, per cui nessun serpente è un mammifero.

ATTENZIONE

Questo sillogismo, per quanto logicamente valido, non è reale per il fatto che in realtà la classe dei mammiferi è definita come classe di animali che allatta, per cui, biologicamente parlando, i due insiemi coincidono. Tuttavia, qui si chiede solo di controllare la logica delle relazioni, non che esse siano reali.

ESEMPIO 94

Tutti gli scienziati sono un po' stralunati

Alcuni scienziati sono persone simpatiche

Date le due premesse, qual è la conclusione del seguente sillogismo?

- A) Quindi alcuni scienziati sono un po' stralunati
- B) Quindi nessuna persona simpatica è un non scienziato
- C) Quindi tutte le persone simpatiche sono un po' stralunate
- D) Quindi alcune persone simpatiche sono un po' stralunate
- E) Nessuna delle precedenti risposte è corretta

Le due premesse sono una universale affermativa, l'altra particolare affermativa, relazione che si dovrà mantenere nella conclusione. Inoltre si noti che il termine "scienziati" risulta essere il termine medio, quindi non dovrà apparire nella conclusione. La risposta corretta è quindi la D.

• **Conclusioni**

Giunti alla fine di questo testo si consiglia di esercitarsi quanto più possibile sui quiz (che si trovano facilmente anche su internet digitando su un motore di ricerca “quiz di logica” o sul sito www.testuniversitari.it). Perché oltre ad acquisire la metodologia è importante riuscire ad avere una buona padronanza della materia, cosa che si può ottenere solo con una continua e costante esercitazione.