# CdS Architettura (quinquennale)
# Precorso di Matematica

Paolo Manselli

A.A. 2012/2013

## 1 Introduzione

Gli appunti che seguono propongono una base matematica per gli studenti del CdS in Architettura per affrontare le problematiche scientifiche degli insegnamenti del CdS.

E' chiaro che in queste poche pagine non é possibile rivedere o trattare tutta la matematica svolta in 14 anni di scuola dell'obbligo; si assume che lo studente abbia una buona conoscenza della cultura matematica di base.

I temi trattati sono quelli di un buon quarto anno del Liceo Scientifico, con la avvertenza che si desidera che lo studente non solo li conosca meccanicamente, ma che sia anche in grado di adoperarli.

Segue un elenco (necessariamente incompleto) di prerequisiti e di argomenti, utili per il CdS, che non potranno venir trattati nel precorso.

- Uso ragionato e buona manualitá delle quattro operazioni, dei numeri decimali, delle frazioni, del calcolo letterale; saper usare le proporzioni.

- Geometria Euclidea e suo uso.

- Grandezze di base (lunghezze, aree, volumi, grandezze fisiche elementari), uso dei loro multipli e sottomultipli ed un uso intelligente delle stesse.

Per orientamento si riporta l'elenco degli argomenti trattati di seguito.

- Notazioni e linguaggio insiemistico.
- Numeri naturali, interi, razionali, reali. Prime proprietá.
- Retta euclidea, la misura dei segmenti. Cenni su $\mathbf{R}$ . Retta cartesiana. Valore assoluto.
- Polinomi e loro fattorizzazione.
- Richiami su semplici equazioni, disequazioni e sistemi di disequazioni.
- Richiami su potenze e logaritmi e relative equazioni e disequazioni.
- Richiami su proprietá del Piano Euclideo.
- Piano cartesiano. Trigonometria, equazioni e disequazioni trigonometriche. Richiami di geometria analitica.

Durante il precorso verranno svolti esercizi e applicazioni. Se si hanno difficoltá a capirli e a svolgerli (o se ci sono problemi con quanto segue), rivolgersi al docente, senza aver paura di dire sciocchezze. Ricordare:

<u>Solo chi non fa nulla non commette errori.</u>

## 2 Notazioni e linguaggio insiemistico

**Definizione 1** *Insieme: collezione o famiglia di oggetti (detti elementi) considerata come una entitá singola.*

**Esempio**. Insieme delle persone presenti in questa stanza, in questo momento.

**Notazione**. Di solito gli insiemi sono indicati con lettere (maiuscole): $A, B, S$ e si scrive $x \in S$, $y \notin S$, per dire: " $x$ é un un elemento di $S$ ", "$y$ non é un elemento di $S$. "

**Notazione**. L'insieme che contiene il solo elemento $x$ si indica con $\{x\}$. L'insieme formato dalle tre figure $\triangle, \bigcirc, \uplus$ si indica con $S = \{\triangle, \bigcirc, \uplus\}$. Evidentemente: $\triangle \in S$, $\bigodot \notin S$.

**Definizione 2** *Sottoinsieme: insieme contenuto in un altro insieme.*
*La frase: A sottoinsieme di S si scrive $A \subset S$ (alcuni autori scrivono $A \subseteq S$). Nel seguito, per brevitá, si dirá talvolta insieme invece di sottoinsieme. Si indica con $\emptyset$ il sottoinsieme di S privo di elementi.*

Per costruire sottoinsiemi di $S$ si usa la notazione

$$A = \{s \in S : s \text{ gode della proprietá } \mathcal{P}\}.$$

**Esempio**. Sia $S = \{\triangle, \bigcirc, \uplus\}$. Sia $A = \{s \in S : s \text{ é un cerchio }\}$; allora $A = \{\bigcirc\}$. Sia $B = \{s \in S : s \text{ é un quadrato }\}$; allora $B = \emptyset$.

**Definizione 3** *Operazioni tra sottoinsiemi: Siano: $A \subset S$, $B \subset S$. Si definisce A unione B il sottoinsieme di $S$ : $A \cup B = \{s \in S : s \in A \text{ oppure } s \in B\}$.*

*Si definisce A intersezione B il sottoinsieme di $S$ : $A \cap B = \{s \in S : s \in A \text{ ed } s \in B\}$.*

*Si definisce poi $A \setminus B = \{s \in S : s \in A \text{ ed } s \notin B\}$.*

**Proprietá** Siano $A, B, C$ sottoinsiemi di $S$. Valgono le seguenti proprietá:
commutativa: $A \cup B = B \cup A; A \cap B = B \cap A$;
associativa: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C); (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
distributiva: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Notazioni stenografiche:
$\forall$ per ogni, per tutti ;
$\exists$ esiste un ;
$\Rightarrow$ implica;
$\Leftrightarrow$ equivale;
$:=$ per definizione é dato da, é definito come.

## 3 Numeri naturali, interi, razionali, reali. Prime proprietá.

**Definizione 4** *Si indica con* $\mathbf{N}$ *l'insieme dei numeri naturali :* $\{1, 1+1, 1+1+1, \ldots\}$; *si indica con* $\mathbf{Z}$ *l'insieme dei numeri interi:* $\{0, \pm 1, \ldots\}$.

Si suppongono noti il concetto di numeri primi, di massimo comun divisore e di minimo comune multiplo.

**Definizione 5** *Si chiamano frazioni (in* $\mathbf{Z}$ *) coppie ordinate di numeri* $a, b \in \mathbf{Z}$ *con* $b \neq 0$; *e si indicano con* $\frac{a}{b}$; *due frazioni* $\frac{a}{b}$, $\frac{c}{d}$ *si dicono equivalenti se* $ad = bc$. *Si indica con* $\mathbf{Q}$ *l'insieme dei numeri razionali "insieme delle frazioni, in cui siano identificate frazioni equivalenti ".*

**Proprietá di Q**

In $\mathbf{Q}$ sono definite due operazioni: addizione $+$ (risultato: somma) e moltiplicazione $\cdot$ (risultato: prodotto) ed una relazione di ordine $\leq$, aventi le seguenti proprietá. Qualsiasi siano $x \in \mathbf{Q}$, $y \in \mathbf{Q}$, $z \in \mathbf{Q}$,

1. proprietá commutativa $x + y = y + x$; $x \cdot y = y \cdot x$;
2. proprietá associativa $x + (y + z) = (x + y) + z$; $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
3. esistenza degli elementi neutri $0, 1$; si ha, per ogni $x \in \mathbf{Q} : 0 + x = x$; $1 \cdot x = x$;
4. esistenza dell'opposto: per ogni $x \in \mathbf{Q}$ esiste un elemento che si indica con $-x$ tale che $-x + x = 0$;
5. esistenza del reciproco: per ogni $x \in \mathbf{Q}$, $x$ non nullo, esiste un elemento che si indica con $x^{-1}$ tale che $x^{-1} \cdot x = 1$.

A partire dalla addizione e dalla moltiplicazione si definiscono altre due operazioni: la sottrazione (risultato: differenza) $x - y := x + (-y)$ e la divisione (risultato quoziente) $x : y = \frac{x}{y} := x \cdot y^{-1}$; questa operazione é lecita se e solo se $y$ é diverso da 0. Si noti che $y^{-1}$ puó essere anche scritto come $\frac{1}{y}$; la seconda notazione é conseguenza della definizione precedente.

La relazione di ordine gode delle seguenti proprietá.
Siano $x \in \mathbf{Q}$, $y \in \mathbf{Q}$, $z \in \mathbf{Q}$,

1. proprietá riflessiva $x \leq x$;
2. proprietá antisimmetrica $x \leq y$ and $y \leq x \Rightarrow x = y$;

3. proprietá transitiva $x \le y$ ed $y \le z \Rightarrow x \le z$.

Si definisce $x < y$ se $x \le y$ ed $x \neq y$.

Vi sono poi le proprietá di compatibilitá.

1. proprietá distributiva $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$;
2. $x \le y \Rightarrow x + z \le y + z$;
3. $x \le y, 0 \le z \Rightarrow x \cdot z \le y \cdot z$.

**esercizio 1** *Siano $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$ ed $n + 1 \neq 0$. delle due frazioni $\frac{m}{n}$, $\frac{m+1}{n+1}$ quale é la maggiore ?*

**esercizio 2** *Date le due frazioni $\frac{3}{11}, \frac{4}{11}$ determinare una frazione strettamente compresa tra le precedenti.*

Sia $a \in \mathbf{Q}$. Un diffuso errore é quello di considerare $-a < 0$; invece $-a$ significa opposto di $a$. Per esempio se $a = -3$, allora $-a = 3 > 0$.

Si vuole ricordare la definizione di <u>potenza</u> . Si ricorda che nella notazione per le potenze $a^b$, $a$ viene detta <u>base</u> e $b$ <u>esponente</u>.

**Definizione 6** *(potenza ad esponente naturale o intero) Sia $a \in \mathbf{Q}, n \in \mathbf{N}$. Si definisce:*

$$a^n := \underbrace{a \cdots a}_{\text{n volte}} .$$

*Sia $a \in \mathbf{Q}, p \in \mathbf{Z}$. Se $p > 0$, si identifica $p$ con un numero naturale e si definisce:*

$$a^p := \underbrace{a \cdots a}_{\text{p volte}} ;$$

*se $a \neq 0$, si definisce: $a^0 := 1$; sia $a \neq 0, p < 0$, allora si puó identificare $-p$ con un numero naturale; $a^{-p}$ é stato giá definito ed é non nullo; si definisce: $a^p := (a^{-p})^{-1}$. In pratica $2^{-3} = [2^3]^{-1} = 8^{-1} = \frac{1}{8}$.*

Si assume noto il concetto di fattorizzazione di un numero intero in fattori primi.

Vi sono molte altre proprietá in $\mathbf{Q}$ ; tuttavia esse possono essere tutte dedotte dalle precedenti.

Se ne vuole ricordare una che verrá usata ampiamente in seguito

Siano $a, b \in \mathbf{Q}\backslash\{0\}$. Se i due numeri hanno lo stesso segno, il loro prodotto é positivo; se i due numeri non hanno lo stesso segno, il loro prodotto é negativo. Quindi se $x \in \mathbf{Q}, \quad x^2 \geq 0$.

Espressioni, parentesi, fattorizzazioni, prodotti notevoli

Verrá chiamata espressione il risultato di una sequenza di operazioni di addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, elevamento a potenza ( ed altre operazioni che verranno definite in seguito) tra numeri. Se tali numeri non sono esplicitamente dati, ma sono rappresentati da lettere e supposti noti, essi vengono detti parametri. Se tali numeri sono rappresentati da lettere e non sono supposti noti vengono detti, a secondo della questione che si sta esaminando, incognite o variabili.

Una relazione tra due espressioni del tipo

$$A = B$$

é una identitá se la espressione in $A$ coincide con la espressione in $B$; analogamente si definiscono $A \geq B, A > B$.

Le operazioni in una espressione hanno un ordine: (i) elevamento a potenza; (ii) moltiplicazione e divisione; (iii) addizione e sottrazione. Questo ordine puó essere alterato dall'uso delle parentesi: quanto é contenuto in una parentesi va svolto per primo.

Tradizionalmente si usano tre tipi di parentesi $()$, $[]$, $\{\}$; in realtá ne basterebbe una, perché la prima parentesi che si apre é accoppiata alla ultima che si chiude.

esempio di espressioni

$$2^{1+2^2} - 2^6/2 + 365, \quad \frac{2^4 - 2^3}{\frac{30-\{2+[2\cdot 8-(2+3\cdot 4)]\}}{\frac{4}{20-4}}},$$

$$\frac{1}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}. \quad 2^{\frac{a^b+b^a}{(a+b)^{a-b}+(a-b)^{a+2b}}}.$$

E' utile ricordare che se $b \neq 0$, $\frac{a}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$, e che se $b \neq 0, c \neq 0, d \neq 0$,

$$\frac{(\frac{a}{b})}{(\frac{c}{d})} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c};$$

quindi:

$$\frac{(\frac{8-2}{5\cdot(8-4)})}{16} = \frac{8-2}{5\cdot(8-4)} \cdot \frac{1}{16}, \quad \frac{(\frac{8-2}{5\cdot(8-4)})}{\frac{2}{2^2+2^3}} = \frac{8-2}{5\cdot(8-4)} \cdot \frac{2^2+2^3}{2}.$$

**Osservazione 3.1** *Siano $A$ e $B$ espressioni . Allora se $a > 0$ si ha*

$$A > B \Rightarrow aA > aB$$

$$A \geq B \Rightarrow aA \geq aB$$

*Se invece $a < 0$, si ha*

$$A > B \Rightarrow aA < aB$$
$$A \geq B \Rightarrow aA \leq aB.$$

**Osservazione 3.2** *(Sostituzione nelle espressioni). Data una espressione in cui compare una variabile $x$, se ad $x$ si sostituisce una espressione $A$, ció va fatto ovunque compaia $x$.*

**Esempio 3.1** *Nella espressione*

$$\lim_{x-x_0 \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

*sostituire $x$ con $x_0 + h$. la espressione diventa*

$$\lim_{x_0+h-x_0 \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

*Se nella prima espressione si sostituisce $f(x)$ con $x^x$ la espressione diventa*

$$\lim_{x-x_0 \to 0} \frac{x^x - (x_0)^{x_0}}{x - x_0}$$

*Se nella seconda espressione si sostituisce $f(x)$ con $x^x$ la espressione diventa*

$$\lim_{h \to 0} \frac{(x_0 + h)^{x_0+h} - (x_0)^{x_0}}{h}$$

La fattorizzazione di una espressione consiste nello scrivere una espressione in prodotto di espressioni piú semplici. In proposito si ricordano le identitá chiamate prodotti notevoli:

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b), \quad a^2 + 2 \cdot ab + b^2 = (a + b)^2,$$

$$a^3 + b^3 = (a + b) \cdot (a^2 - ab + b^2), \quad a^3 - b^3 = (a - b) \cdot (a^2 + ab + b^2),$$
$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = (a + b)^3.$$

Usando queste uguaglianze si possono svolgere molte fattorizzazioni. Ad esempio

$$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 + b^2) \cdot (a^2 - b^2) = (a^2 + b^2) \cdot (a + b) \cdot (a - b).$$

<u>Rappresentazione decimale in **Q**</u>

**Definizione 7** *Si chiama allineamento decimale una sequenza (anche infinita) di cifre decimali* $(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)$ *, divisa in due da una virgola (un punto per gli anglo-americani), preceduta da un segno ed avente solo un numero finito di cifre tra il segno e la virgola. La parte a destra della virgola si chiama mantissa.*

Si puó provare che tutti i numeri razionali possono essere scritti come allineamenti decimali di tipo particolare; precisamente i numeri razionali possono essere scritti come:

- allineamenti decimali "finiti", ossia con mantissa formata da un numero finito di cifre seguite da infiniti zeri (che di solito si omettono);
- allineamenti decimali periodici, ossia con mantissa formata da una sequenza di un numero finito di cifre (possibilmente mancanti, dette <u>antiperiodo</u>) seguito da un gruppo di cifre che si ripetono senza fine (detto <u>periodo</u>, con almeno una cifra non nulla).

Un allineamento decimale periodico si trasforma in una frazione, avente lo stesso segno, nel seguente modo; si chiama <u>preperiodo</u> il numero intero formato dalla sequenza di cifre che precedono il periodo, ignorando la virgola (zero se non ci sono cifre non nulle che precedono il periodo); <u>complessivo</u> il numero intero sequenza formata dal preperiodo seguito dal periodo, <u>ndc_ periodo</u> numero di cifre del periodo; <u>ndc_ antiperiodo</u> il numero di cifre tra la virgola ed il periodo (0 se non ce ne sono). La frazione generatrice dell'allineamento decimale é

$$\frac{\text{complessivo} - \text{preperiodo}}{(10^{\text{ndc\_ periodo}} - 1) \cdot 10^{\text{ndc\_ antiperiodo}}}$$

<u>**Esempio**</u> $\frac{249}{16} = 15.5625$; $\frac{35}{30} = 1.16666666\ldots = 1.1\overline{6}$;

$$1,3\overline{92} = \frac{1392 - 13}{(10^2 - 1) \cdot 10} = \frac{1379}{990}.$$

## 4 Retta euclidea, la misura dei segmenti. Cenni su R . Retta cartesiana. Valore assoluto.

In ció che segue si suppongono noti i concetti di retta euclidea, punti, segmenti, lunghezza di un segmento rispetto ad un segmento unita' di misura, distanza di due punti ; questi concetti sono l'astrazione di concetti intuitivi.

Durante il corso verrá data la definizione rigorosa di $\mathbf{R}$ (insieme dei numeri reali). Per ora ci accontenteremo di dire che $\mathbf{R}$ e' un insieme di oggetti (detti numeri reali) che possono essere espressi da allineamenti decimali, anche non finiti e non periodici e che per i numeri reali **si definiscono tutte le operazioni giá definite per i razionali e per esse valgono tutte le proprietá enunciate per i numeri razionali**.

Vale la seguente fondamentale proprietá, non posseduta dai numeri razionali.

**Data una unitá di misura, ad ogni segmento corrisponde un numero reale positivo che ne é la lunghezza.**

**Definizione 8** *(retta cartesiana) Si consideri una retta euclidea e su di essa un punto $O$ ed un punto $U$; sia $X$ un qualunque punto della retta che sia dalla stessa parte di $U$ rispetto ad $O$. Si chiama ascissa di $X$ e si indica con $x$ la misura del segmento $OX$ rispetto alla unitá di misura OU. Se $X$ é dalla parte opposta di $U$ rispetto ad $O$, si chiama ascissa di $X$ e si indica con $x$ l'opposto della misura del segmento $OX$ rispetto alla unitá di misura OU. Se $X$ coincide con $O$ gli si assegna ascissa* 0. *Una retta euclidea in cui si sia introdotta la struttura ora descritta si chiama <u>una retta cartesiana</u>.*

Da ora in poi su una retta cartesiana verranno identificati i punti con le loro ascisse; si dirá, per esempio, il punto 1 invece di dire il punto di ascissa 1 (che é $U$). Nel seguito la retta cartesiana verrá indicata col simbolo $\mathbf{R}$ dei numeri reali. Non é difficile vedere che la distanza $d$ di $x \in \mathbf{R}$ da $y \in \mathbf{R}$ é data da

$$d = \begin{cases} x - y \text{ se } y \leq x \\ y - x \text{ se } x < y \end{cases} .$$

**Definizione 9** *Radice quadrata. Sia $a$ un numero reale non negativo; si puó provare che esiste un unico numero reale $b$ non negativo tale che $b^2 = a$; tale numero si chiama la radice quadrata di $a$ e si scrive $b = \sqrt{a}$. Quindi:*

$$\sqrt{4} = 2.$$

*Si osservi che ogni numero non negativo si puó scrivere come il quadrato della sua radice quadrata; cioé:*

$$a \geq 0 \quad \Rightarrow \quad a = (\sqrt{a})^2.$$

La teoria delle radici quadrate e dei radicali verrá ripassata in seguito.

**Definizione 10** *(valore assoluto) Sia $x \in \mathbf{R}$; si definisce valore assoluto ( o modulo) di $x$ il numero reale non negativo:*

$$|x| := \begin{cases} x \text{ se } x \geq 0 \\ -x \text{ se } x < 0 \end{cases}.$$

Proprietá del modulo Siano $x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}$. Valgono le seguenti proprietá.

1. $|x| = |-x|$.
2. $|x|$ é la distanza di $x$ da 0.
3. Piú in generale, $|x - y|$ é la distanza di $x$ da $y$.
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$.
5. $|x \pm y| \leq |x| + |y|$.
6. $|(|x| - |y|)| \leq |x - y|$.

Osservare che, per ogni numero reale $x$ si ha

$$\sqrt{x^2} = |x|.$$

Altro esempio di fattorizzazione di espressioni

$$a^4 + b^4 = (a^2)^2 + (b^2)^2 + 2a^2b^2 - 2a^2b^2 =$$

$$(a^2+b^2)^2 - (\sqrt{2})^2 \cdot a^2b^2 = (a^2+b^2)^2 - (\sqrt{2}ab)^2 = (a^2+b^2+\sqrt{2}ab)(a^2+b^2-\sqrt{2}ab).$$

**Definizione 11** *(Intervallo). Si chiama intervallo un sottoinsieme di $\mathbf{R}$ che sia di uno qualsiasi dei tipi sotto elencati.*

*Si indica con $[a, b] := \{x \in \mathbf{R} : a \leq x \leq b\}$. $[a, b]$ viene chiamato intervallo chiuso e limitato di estremi $a, b$.*

*Si indica con $(a, b) := \{x \in \mathbf{R} : a < x < b\}$. $(a, b)$ viene chiamato intervallo aperto e limitato di estremi $a, b$.*

*Si chiamano intervalli semiaperti (e limitati): $[a, b) := \{x \in \mathbf{R} : a \leq x < b\}$ ed $(a, b] := \{x \in \mathbf{R} : a < x \leq b\}$.*

*Si indica con $[a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} : x \geq a\}$. $[a, +\infty)$ viene chiamato intervallo chiuso e illimitato (superiormente), di estremo $a$.*

*Si indica con* $(a, +\infty) := \{x \in \mathbf{R} : x > a\}$. $(a, +\infty)$ *viene chiamato intervallo aperto e illimitato (superiormente) di estremo* $a$.

*Si indica con* $(-\infty, b] := \{x \in \mathbf{R} : x \le b\}$. $(-\infty, b]$ *viene chiamato intervallo chiuso e illimitato (inferiormente) di estremo* $b$.

*Si indica con* $(-\infty, b) := \{x \in \mathbf{R} : x < b\}$. $(-\infty, b)$ *viene chiamato intervallo aperto e illimitato (inferiormente) di estremo* $b$.

*Si pone anche* $(-\infty, +\infty) := \mathbf{R}$. *Tale intervallo é illimitato sia superiormente che inferiormente e si puó considerare sia aperto sia chiuso.*

*Si indica con* $I$ *un intervallo qualsiasi, dei tipi considerati qui sopra.*
*Dato un intervallo* $I$ *limitato, i due punti che limitano l'intervallo si dicono* <u>*gli estremi*</u>*, il punto medio tra gli estremi si chiama il* <u>*centro*</u> *dell'intervallo, la distanza tra il centro e gli estremi si chiama il* <u>*raggio*</u> *dell'intervallo; se l'intervallo ha estremi* $a < b$*, il centro é* $\frac{a+b}{2}$ *ed il raggio* $\frac{b-a}{2}$.

## 5 Richiami su potenze.

Si é data precedentemente la definizione di potenza ad esponente intero. Si vogliono ora definire potenze piú generali.

**Definizione 12** *Radicali. Sia* $a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}, n$ *dispari. Si puó provare che la equazione:* $x^n = a$ *ha una ed una soluzione in* $\mathbf{R}$ *; tale soluzione ha lo stesso segno di* $a$ *e si indica con* $\sqrt[n]{a}$.

*Sia* $a \in \mathbf{R}, n \in \mathbf{N}, n$ *pari. Se* $a = 0$*, la equazione:* $x^n = 0$ *ha la unica soluzione* $x = 0$*. Se* $a < 0$*, la equazione:* $x^n = a$ *non ha soluzione. Se* $a > 0$*, si puó provare che la equazione:* $x^n = a$ *ha due soluzioni in* $\mathbf{R}$ *, l'una opposta dell'altra. Allora, se* $a \ge 0$*, si indica con* $\sqrt[n]{a}$ *l'unica soluzione non negativa della equazione:* $x^n = a$ *(definizione giá richiamata per* $n = 2$*; si scrive di solito* $\sqrt{a}$ *invece di* $\sqrt[2]{a}$ *).*

**Esempio 5.1** *Sia* $a$ *un numero reale ed* $n$ *un numero naturale.*

*Se* $n$ *é dispari*

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n} = a.$$

*Se* $n$ *é pari*

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n} = |\,a|.$$

*Se $a \geq 0$ ed $n$ é un numero naturale (pari o dispari)*

$$(a^n)^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a^n} = a.$$

Esempio

$$((-2)^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2.$$

$$((-2)^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{(-2)^2} = 2 = |-2|.$$

$$x^3 = -1 \text{ ha una sola soluzione } x = -1$$

$$y^2 = 1 \text{ ha soluzione } |y| = 1, \text{ quindi due soluzioni: } y = -1 \text{ ed } y = 1;$$

$$\text{ricordare che:} \sqrt{(-1)^2} = 1.$$

**Definizione 13** *(potenza ad esponente razionale) Sia $a \in \mathbf{R}$, $a > 0$. Sia $n \in \mathbf{N}$. Si definisce: $a^{\frac{1}{n}} := \sqrt[n]{a}$.*

*Sia ora $r \in \mathbf{Q}$. $r$ si puó scrivere (in infiniti modi) come una frazione: $r = \frac{p}{n}$, con $p \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$. Si definisce:*

$$a^r := (a^{\frac{1}{n}})^p.$$

*Si puó provare che, cambiando la rappresentazione frazionaria di $r$, il numero $a^r$ ora definito non cambia. La base $a$ non puó essere nulla perché l'esponente $r$ puó essere negativo. La base $a$ non puó essere negativa, perché se si scrive $r$ come una frazione a denominatore pari, la espressione $(a^{\frac{1}{n}})^p$ non avrebbe senso.*

**Esempio 5.2** *L'uso delle potenze razionali permette di risolvere rapidamente espressioni con radici:*

$$\sqrt[18]{\sqrt[4]{10^{144}}} = \{[10^{144}]^{\frac{1}{4}}\}^{\frac{1}{18}} = 10^{\frac{144}{4 \cdot 18}} = 10^2 = 100.$$

**Definizione 14** *(potenza ad esponente reale) Sia $b \in \mathbf{R}$. Si vuole ora accennare alla potenza ad esponente $b$. La definizione rigorosa verra' data durante il corso.*

*Nella potenza ad esponente reale occorre che la base $a$ sia positiva.*

*In tal caso $a^b$ si puó definire per ogni $a > 0$, $b$ reale qualsiasi ed $a^b$ é sempre un numero reale positivo.*

Proprietá delle potenze Valgono i seguenti fatti.

- Le definizioni ora date sono coerenti tra di loro. Per esempio se $b$ é un numero reale che é anche intero e razionale le tre definizioni di $a^b$ corrispondenti, forniscono lo stesso numero.

- Le proprietá delle potenze studiate nelle scuole medie valgono per tutte le potenze ora ricordate. Siano $a, d, b, c, x$ numeri reali tali che le formule scritte qui di seguito abbiano senso.

  1. $a = b \Rightarrow a^c = b^c$.
  2. $c \neq 0,\ a > 0,\ b > 0,\ a^c = b^c \Rightarrow a = b$.
  3. $a^b \cdot a^c \ = \ a^{b+c}$.
  4. $\frac{a^b}{a^c} \ = \ a^{b-c}$.
  5. $(a^b)^c \ = \ a^{b \cdot c}$.
  6. $a^x \cdot d^x \ = \ (a \cdot d)^x$.
  7. $\frac{a^x}{d^x} \ = \ (\frac{a}{d})^x$.
  8. $1^a = 1, \forall a$.
  9. Sia $\ a > 1,\ x < y \Rightarrow a^x < a^y$.
  10. Sia $\ 0 < a < 1,\ x < y \Rightarrow a^x > a^y$.
  11. Sia $n \in \mathbf{N}$ dispari, $a, b \in \mathbf{R}$. Allora $a < b \Leftrightarrow a^n < b^n \Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}$.
  12. Sia $n \in \mathbf{N}$ pari, $a, b \in \mathbf{R}, a > 0, b > 0$. Allora
  $$a < b \Leftrightarrow a^n < b^n \Leftrightarrow a^{\frac{1}{n}} < b^{\frac{1}{n}}.$$
  13. Sia $n \in \mathbf{N}$ pari, $a < 0, b < 0, a, b \in \mathbf{R}$. $a < b \Leftrightarrow 0 < -b < -a$. Quindi
  $$(-b)^n < (-a)^n \Leftrightarrow (-b)^{\frac{1}{n}} < (-a)^{\frac{1}{n}}.$$

## 6 Polinomi e loro fattorizzazione

**Definizione 15** *Si chiama polinomio di grado $n \in \mathbf{N}$ a coefficienti reali una espressione del tipo*

$$p(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n, \quad a_0 \neq 0$$

*i coefficienti $a_0, \ldots, a_n$ e la variabile $x$ sono numeri reali. Un polinomio di grado 0 é una costante, il polinomio nullo é il polinomio avente tutti i coefficienti nulli.*

I polinomi che verranno considerati nel seguito saranno tutti a coefficienti reali.

**Definizione 16** *Si dice che $\alpha \in \mathbf{R}$ é una radice (o uno zero) del polinomio $p(x)$, se vale la identitá $p(\alpha) = 0$.*

Per i polinomi son definite in modo naturale le operazioni di somma e differenza e la operazione di prodotto. In modo analogo a $\mathbf{Z}$ é definita la operazione di divisione con resto. Vale il seguente fatto.

**Osservazione 6.1** *Sia $p(x)$ un polinomio di grado $n$ e $q(x)$ di grado $m \leq n$ (diverso dal polinomio nullo). Allora si possono costruire univocamente due polinomi $d(x)$ di grado $n - m$ ed $r(x)$ di grado $< m$, per cui*

$$p(x) = q(x) \cdot d(x) + r(x).$$

*Questa uguaglianza si scrive anche*

$$\frac{p(x)}{q(x)} = d(x) + \frac{r(x)}{q(x)}.$$

La operazione di divisione tra polinomi é stata insegnata nelle medie superiori e verrá richiamata nel precorso.

Si svolge un esempio.

$$\begin{array}{cccccc|l}
12x^5 & +5x^4 & -18x^3 & +8x^2 & +10x & -6 & \underline{4x^3 - x^2 + 1} \\
\underline{-12x^5} & \underline{+3x^4} & & \underline{-3x^2} & & & 3x^2 + 2x - 4 \\
0 & 8x^4 & & +5x^2 & & & \\
 & \underline{-8x^4} & \underline{+2x^3} & & \underline{-2x} & & \\
 & 0 & -16x^3 & & +8x & -6 & \\
 & & \underline{+16x^3} & \underline{-4x^2} & & \underline{+4} & \\
 & & 0 & -x^2 & +8x & -2 &
\end{array}$$

Si puó provare il seguente teorema (detto teorema fondamentale dell'algebra).

**Teorema 1** *Ogni polinomio di grado $n$ a coefficienti reali si puó fattorizzare come prodotto di polinomi di primo e/o di secondo grado.*

Vale il seguente fatto che permette in casi particolari la fattorizzazione di un polinomio o la determinazione di uno zero del polinomio.

**Osservazione 6.2** *$\alpha \in \mathbf{R}$ é una radice del polinomio $p(x)$ di grado $n \in \mathbf{N}$ se e solo se si puó costruire un polinomio $q(x)$ di grado $n - 1$ per cui vale la fattorizzazione*

$$p(x) = q(x)(x - \alpha).$$

## 7 Richiami su semplici equazioni, disequazioni e sistemi

In questo paragrafo verranno considerati polinomi e funzioni razionali (quoziente di polinomi) reali di variabile reale.

**le non equazioni** Le non equazioni sono relazioni del tipo $f(x) \neq 0$; il loro studio é assai semplice: si trova l'insieme $U$ soluzione di $f(x) = 0$; la soluzione di $f(x) \neq 0$ é $\mathbf{R} \setminus U$.

**disequazioni di primo grado ( o di grado zero).** Siano $a, b$ numeri reali assegnati ($a$ viene detto coefficiente della disequazione, $b$ termine noto); $a, b$ vengono anche chiamati parametri . Si chiama disequazione di primo grado (o di grado zero) ad una incognita la disuguaglianza:

$$ax + b \geq 0. \tag{1}$$

oppure

$$ax + b > 0. \tag{2}$$

Si chiama soluzione della (1), o della (2) ogni numero reale $x$ che renda (1) (2) una disuguaglianza valida.

Soluzione della (1).

- Se $a > 0$ : $ax \geq -b, \Rightarrow x \geq \frac{-b}{a}$. soluzione $[\frac{-b}{a}, +\infty)$.
- Se $a < 0$ : $ax \geq -b, \Rightarrow x \leq \frac{-b}{a}$. soluzione $(-\infty, \frac{-b}{a}]$.
- Se $a = 0,\ b \geq 0,$ ogni $x \in \mathbf{R}$ é soluzione.
- Se $a = 0,\ b < 0,$ nessuna soluzione.

Soluzione della (2).

- Se $a > 0$ : $ax + b > 0, \Rightarrow x > \frac{-b}{a}$. soluzione $(\frac{-b}{a}, +\infty)$.
- Se $a < 0$ : $ax + b > 0, \Rightarrow x < \frac{-b}{a}$. soluzione $(-\infty, \frac{-b}{a})$.
- Se $a = 0,\ b > 0,$ ogni $x \in \mathbf{R}$ é soluzione.
- Se $a = 0,\ b \leq 0,$ nessuna soluzione.

Quindi le soluzioni sono degli intervalli illimitati oppure $\emptyset$.

Sia $p(x) := ax + b$ un polinomio di primo grado con $a \neq 0$. Si ha, se $a > 0$ :

$$p(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{-b}{a}, +\infty),$$

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$$

$$p(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{-b}{a});$$

se $a < 0$ :

$$p(x) < 0 \Leftrightarrow x \in (\frac{-b}{a}, +\infty),$$

$$p(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b}{a}$$

$$p(x) > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, \frac{-b}{a});$$

Si osservi che negli esercizi proposti, per ridursi alla forma suindicata di disequazione di grado non superiore ad uno c'é da fare un buon uso di regole dell'algebra.

**esercizio 3** *Risolvere*

$$3x + 5 \leq 4x - 7,$$

$$1 - 2x > (2/3)(-x - 1) - x,$$

$$\frac{2x - 1}{3} < \frac{x}{2} + 1,$$

$$4 - \frac{3x + 1}{3} \geq 2x + \frac{1}{5},$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} \leq \sqrt{2}\,(x - \frac{1}{\sqrt{5}}),$$

$$\frac{x}{\sqrt{3}} - 1 \geq \frac{x}{\sqrt{2}} + 1,$$

$$(x - 2)^2 - x(x + 1) \geq 0,$$

$$1,\overline{3}x + 0,\overline{6} > 0,\overline{7}x - 1,$$

$$\pi x - \frac{1}{\pi} > x,$$

$$3(x - 3)^2 + 10\pi x \geq 3x^2,$$

$$(x - 3)^3 - (x - 2)^3 \geq -3x^2,$$

*Risolvere al variare del parametro* $k \in \mathbf{R}$ :

$$kx - 4 \geq k^2 - x$$

$$\frac{x+1}{k-1} + 1 \leq x - 1,$$

$$2x + 4 > k^2 + kx,$$

**sistemi di disequazioni di primo grado** Un sistema di disequazioni di primo grado é una famiglia di disequazioni di primo grado racchiuse a sinistra da una graffa. La soluzione é la intersezione degli intervalli soluzione delle singole disequazioni.

**esercizio 4** *Risolvere*

$$\begin{cases} \frac{x+3}{3} + 2 > 0 \\ 3x - \frac{1}{2} \leq \frac{x}{3} - 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} - 1 > 2x + 1 \\ \frac{x}{10} > 1 - x \\ 6x - 4 > 3x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 17x - 1/3 - 4(x + 1/2) < 0 \\ \frac{x-3}{4} > x/3 - 7 \\ 3 + (x-4)/2 < x/4 = (x-2)/3, \end{cases}$$

*Risolvere, al variare di* $k \in \mathbf{R}$ :

$$\begin{cases} (x-k)^2 \geq x^2 \\ (x-3)/2 \geq (x-2)/3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx > x + 5 \\ k^2x - 2 > 2, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -k + x < 3x - 2 \\ kx > 5, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-2k + x)/3 < 2x - 1 \\ x/k < 4, \end{cases}$$

**Equazioni e disequazioni di secondo grado.** Siano $a \neq 0, b, c$ numeri reali assegnati . Fattorizzare, se possibile, il trinomio

$$p(x) := ax^2 + bx + c \tag{3}$$

in fattori polinomi di primo grado. Questo problema é stato affrontato e risolto (quando possibile) dal matematico arabo Mohammed ibn Mûsâ al-Khowârizmî (dal suo nome deriva la parola moderna algoritmo).

Si scrive
$$p(x) = ax^2 + bx + c = a\Big(x^2 + x\frac{b}{a} + \frac{c}{a}\Big) =$$
$$= a\Big(x^2 + 2x\frac{b}{2a} + (\frac{b}{2a})^2 - (\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a}\Big).$$
I primi tre termini a secondo membro dell'ultima uguaglianza sono il quadrato del binomio: $(x + \frac{b}{2a})^2$; mettendo gli ultimi due termini a comun denominatore, si ha
$$-(\frac{b}{2a})^2 + \frac{c}{a} = -\frac{b^2 - 4ac}{4a^2};$$
se si pone $\Delta := b^2 - 4ac$ (discriminante) si ha:
$$p(x) = a\Big((x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\Big) \tag{4}$$
Dalla ultima equazione segue che la fattorizzazione é possibile se e solo se $\Delta \geq 0$. Infatti, se $\Delta < 0$, il secondo membro della (4) é il prodotto di $a$ per la somma di due numeri non negativi ( di cui il secondo é positivo), non si annulla mai, ha il segno di $a$, e non puó essere fattorizzato in fattori polinomi di primo grado.

Se $\Delta = 0$, si ha la fattorizzazione
$$p(x) = a(x + \frac{b}{2a})^2$$
Se $\Delta \geq 0$, il secondo membro della (4) é il prodotto di $a$ per la differenza di due quadrati e si ha la fattorizzazione
$$p(x) = a\Big[(x + \frac{b}{2a}) + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\Big]\Big[(x + \frac{b}{2a}) - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\Big].$$
Da quanto osservato si ottiene lo studio completo della equazione
$$ax^2 + bx + c = 0 \quad a \neq 0. \tag{5}$$
Soluzione della (5). Usando la (4)

- Se $\Delta < 0$, nessuna soluzione (p(x) non si annulla mai).

- Se $\Delta = 0$, una sola soluzione (meglio: due soluzioni coincidenti ) $x_1 = x_2 := -\frac{b}{2a}$.
- Se $\Delta > 0$, due soluzioni distinte:

$$x_1 := -\frac{b}{2a} - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}, \quad < \quad x_2 := -\frac{b}{2a} + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}.$$

Proprietá delle soluzioni di (5).

- Se $ac < 0$, allora $\Delta > 0$, e la (3) ha due soluzioni distinte.
- Se $\Delta \geq 0$, le soluzioni di (3) verificano:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

- Se $\Delta \geq 0$, ed $a, b, c$, sono numeri interi, allora, se una delle due soluzioni di (3) é un numero intero, essa é un fattore di $c$.
- (regola dei segni ) Sia $\Delta > 0$, e sia $a \cdot b \cdot c \neq 0$. Si considerino i coefficienti ordinati nella sequenza: $a$ $b$ $c$; si dice che una coppia di coefficienti contigui nella sequenza ( $ab$ oppure $bc$) presenta una permanenza, se i due coefficienti hanno lo stesso segno; si dice che una coppia di coefficienti contigui nella sequenza presenta una variazione, se i due coefficienti hanno segno opposto; vale la seguente regola dei segni: ad ogni permanenza corrisponde una soluzione negativa, ad ogni variazione corrisponde una soluzione positiva; infine, se la equazione ha radici di segno opposto, quella corrispondente alla coppia $ab$ é la piú distante dall'origine (ossia quella che ha valore assoluto piú grande).

Sia dato un polinomio di secondo grado $p(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ e sia $\Delta := b^2 - 4ac$. Dalla analisi precedente segue lo studio del segno di $p(x)$.

- Se $\Delta < 0$, $p(x)$ non si annulla mai ed ha il segno di $a$. Piú precisamente, se $a > 0$

  $$\{x : p(x) > 0\} = \mathbf{R}, \quad \{x : p(x) = 0\} = \emptyset, \quad \{x : p(x) < 0\} = \emptyset;$$

  se $a < 0$

  $$\{x : p(x) < 0\} = \mathbf{R}, \quad \{x : p(x) = 0\} = \emptyset, \quad \{x : p(x) > 0\} = \emptyset;$$

- se $\Delta = 0$, $p(x)$ si annulla una sola volta e non cambia mai segno; piú precisamente se $a > 0$

$$\{x : p(x) > 0\} = \mathbf{R}\backslash\{\frac{-b}{2a}\}, \quad \{x : p(x) = 0\} = \{\frac{-b}{2a}\}, \quad \{x : p(x) < 0\} = \emptyset;$$

se $a < 0$

$$\{x : p(x) < 0\} = \mathbf{R}\backslash\{\frac{-b}{2a}\}, \quad \{x : p(x) = 0\} = \{\frac{-b}{2a}\}, \quad \{x : p(x) > 0\} = \emptyset;$$

se $\Delta > 0$, $p(x)$ si annulla per i due valori distinti $x_1, x_2$ sopra introdotti;
se $a > 0$

$$\{x : p(x) > 0\} = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty), \quad \{x : p(x) = 0\} = \{x_1, x_2\},$$
$$\{x : p(x) < 0\} = (x_1, x_2);$$

se $a < 0$

$$\{x : p(x) < 0\} = (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty), \quad \{x : p(x) = 0\} = \{x_1, x_2\},$$
$$\{x : p(x) > 0\} = (x_1, x_2).$$

Quanto esposto sopra permette di risolvere equazioni e disequazioni di secondo grado.

Si osservi che negli esercizi proposti, per ridursi alla forma suindicata di disequazione di secondo grado c'é da fare un buon uso di regole dell'algebra.

**esercizio 5** *Risolvere*

$$x^2 - 21x - 100 > 0,$$
$$x^2 - 40x + 39 < 0,$$
$$6x^2 - 11x - 35 < 0,$$
$$9x^2 + 32x - 16 > 0,$$
$$(x-2)(x-3) < 1,$$
$$2x^2 + x > (x+3)(x-2),$$
$$(x+1)(x-2)(x+3) \leq (x-1)^3,$$
$$(x+1)(x+2)(x+3) \leq (x+3)^3 - 1,$$

*Discutere e se possibile risolvere, al variare di* $k \in \mathbf{R}$ :

$$(k-3)x^2 - 2kx + k + 3 < 0,$$

$$(k-1)x^2 - 2kx \geq 0,$$

$$(k-2)x^2 + 4kx - k \leq 0.$$

*Data la equazione* $x^2 - (k+1)x + k(1-k) = 0$, *per quali* $k \in \mathbf{R}$ *la radice minore della equazione sta in* $[-1, 1]$?

Si possono studiare sistemi di disequazioni di primo e secondo grado risolvendo le singole disequazioni e facendo l'intersezione degli insiemi soluzione.

**esercizio 6** *Risolvere*

$$\begin{cases} (x-5)^2 \geq x \\ (x-3)/2 \geq (x-2)/3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 3x + 2 \geq 0 \\ (x-3)/2 \geq (x^2-2)/3. \end{cases}$$

*Risolvere al variare di* $k \in \mathbf{R}$.

$$\begin{cases} x^2 - 3kx + 2 \geq 0 \\ (x+3)/2 \geq (x+2)/3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} kx^2 + 2x + -4 \geq 0 \\ -1 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

**Equazioni e disequazioni polinomiali di grado superiore al secondo.**

Una equazione $p(x) = 0$, o una disequazione $p(x) > 0$, dove $p(x)$ é un polinomio di grado superiore al secondo, possono essere studiate se si possiede esplicitamente la fattorizzazione in polinomi di primo e/o di secondo grado, di cui nel teorema fondamentale dell'algebra.

Si svolge un esempio.

$$2x^5 - 5x^4 + 5x^2 - 2x \geq 0.$$

Si ha: $2x^5 - 5x^4 + 5x^2 - 2x = x(2x^4 - 5x^3 + 5x - 2)$. Il polinomio di quarto grado a secondo membro ha radici 1 e $-1$, quindi é divisibile per $(x+1) \cdot (x-1) = x^2 - 1$. Effettuando la divisione tra polinomi, si ha

$2x^4-5x^3+5x-2=(x^2-1)(2x^2-5x+2)$. Si ha inoltre $2x^2-5x+2=2(x-\frac{1}{2})(x-2)$. Quindi il polinomio assegnato si fattorizza:

$$2x^5-5x^4+5x^2-2x=2x(x+1)\cdot(x-1)(x-\frac{1}{2})(x-2).$$

Usando le regole dei segni, si vede che la soluzione é

$$[-1,0]\cup[\frac{1}{2},1]\cup[2,+\infty).$$

Talvolta una sostituzione risolve il problema.

Data una disequazione nella variabile $x$, talvolta ponendo $t:=\Phi(x)$ con $\Phi(x)$ scelta opportunamente, si ottiene una disequazione nella variabile $t$ assai piú semplice. Risolta questa, resta una ulteriore disequazione per $t:=\Phi(x)$ che, risolta dá la soluzione della disequazione iniziale.

**Esempio 7.1** *Risolvere*

$$4x^{10}-6x^5+2>0.$$

*Se si pone* $t:=x^5$ *la disequazione assegnata diventa*

$$4t^2-6t+2>0, \quad t=x^5.$$

*il coefficiente di grado massimo della disequazione di secondo grado é positivo ed il trinomio ha due radici reali* $1$ *ed* $1/2$, *quindi la soluzione della disequazione in* $t$ *é* $(-\infty,1/2)\cup(1,+\infty)$. *Rimane da risolvere* $x^5\in(-\infty,1/2)\cup x^5\in(1,+\infty)$. *Attenzione questo non é un sistema, abbiamo una unione, non una intersezione. Occorre risolvere* $x^5<1/2 \cup x^5>1$. *Usando le proprietá delle potenze si ha* $x<(1/2)^{1/5}\cup x>1$. *La soluzione é* $x\in(-\infty,(1/2)^{1/5})\cup(1,+\infty)$.

**esercizio 7** *Risolvere*

$$x(9x^2+6x+1)<0,$$
$$27x^3+27x^2+9x+1\leq 0,$$
$$3x+2\sqrt{3}x^2+x^3<0,$$
$$x^3+2>0,$$
$$1+x^2-2x-2x^3\geq 0,$$
$$2x^4-8<0,$$
$$(-2x^3+x^2-2x)(-2x+3)\leq 0,$$
$$x(x-\sqrt{5})(x+\frac{1}{2})^2(x-2)^3\geq 0$$

**Disequazioni razionali e con valore assoluto.** Si chiama funzione razionale il quoziente di due polinomi. Siano $p(x)$ e $q(x)$ due polinomi, con $q$ diverso dal polinomio nullo e sia $r(x)$ la funzione razionale

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)}.$$

La equazione $r(x) = 0$, equivale al sistema

$$\begin{cases} p(x) = 0 \\ q(x) \neq 0. \end{cases}$$

La disequazione $r(x) > 0$, equivale a

$$\begin{cases} p(x) > 0 \\ q(x) > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} p(x) < 0 \\ q(x) < 0 \end{cases}$$

La disequazione $r(x) \geq 0$, equivale a

$$\begin{cases} p(x) \geq 0 \\ q(x) > 0 \end{cases} \bigcup \begin{cases} p(x) \leq 0 \\ q(x) < 0 \end{cases}$$

Attenzione alle semplificazioni.

**Osservazione 7.1** *Come si é visto da ora in poi, data una equazione o una disequazione, prima di affontarla bisogna imporre che tutto ció che compare abbia senso. Ció puó comportare che, perché la disequazione data abbia senso occorra risolvere un sistema, in cui, oltre alla disequazione data, siano presenti altre equazioni e/o disequazioni.*

**Esempio 7.2** *la disequazione*

$$\frac{(x-1)^2}{x^2-1} \geq 0 \quad \textit{equivale a} \quad \frac{(x-1)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)} \geq 0.$$

*Tuttavia la disequazione sopra* <u>*non*</u> *equivale a*

$$\frac{(x-1)}{(x+1)} \geq 0.$$

*Ottenuta dalla precedente semplificando il fattore $x-1$. Ció é dovuto al fatto che $x-1$ é nullo se $x = 1$.* <u>*Non si puó semplificare zero*</u> *in una frazione. La semplificazione corretta comporta che la disequazione iniziale equivalga a*

$$\begin{cases} \frac{(x-1)}{(x+1)} \geq 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

**esercizio 8** *Risolvere*

$$\frac{x^2-3x+2}{x^2-4x-1} \geq 0;$$

$$x^2 \geq \frac{x^3}{x^3+x+2};$$

$$\frac{2x^2-x-3}{x+1} \leq 0;$$

$$\frac{x^3-2x-3}{x+4} \leq 0;$$

$$\begin{cases} \frac{(x-2)}{(x-1)} \geq \frac{(x-3)}{(x+3)} \\ \frac{(4x^2-1)}{(x+3)} < 0. \end{cases}$$

Le disequazioni in cui é presente il valore assoluto di una espressione si risolvono con sistemi in cui il $|\ |$ viene risolto ricorrendo alla definizione. In vari casi é opportuno ricorrere alle proprietá del $|\ |$.

**Esempio** Sia $a \geq 0$; e sia $A(x)$ una espressione; la disequazione $|A(x)| < a$ geometricamente dice che la distanza di $A(x)$ dall'origine é minore di $a$; ció equivale al sistema

$$\begin{cases} A(x) < a \\ A(x) > -a; \end{cases}$$

Sia $a \geq 0$; e sia $A(x)$ una espressione; la disequazione $|A(x)| > a$ geometricamente dice che la distanza di $A(x)$ dall'origine é maggiore di $a$; ció equivale a

$$A(x) > a \quad \cup \quad A(x) < -a.$$

**esercizio 9**

$$|x-1| - |x+2| + 2|x+3| > 1 \ ;$$

$$|x^2-3x+2| \leq |x^2-9| \ ;$$

$$|\,|x|-3| < |x+1| \ ;$$

$$x^2+2|x|-3 > 0 \ ;$$

$$\frac{x^2-2\sqrt{x^2}-10}{|x|-2} \leq \frac{2|x|+1}{3} \ .$$

*Risolvere al variare di* $a \in \mathbf{R}$ :

$$ax^2 + 3|x| + 1 > 0 \ ;$$

$$\frac{1}{a - x - x^2} > -1 \ .$$

*Risolvere, al variare di* $0 < \epsilon < 2$ :

$$|x^2 - x - 2| < \epsilon$$

*Risolvere al variare di* $n \in \mathbf{N}$ :

$$\left(\frac{|x| + |x-1|}{|x| + |x+1|}\right)^n \geq (-1)^n \ ;$$

$$(x^2 + |x| - 2)^{2n+1} \geq 2^n \ .$$

Esercizi di ricapitolazione

**esercizio 10** *Risolvere:*

$$x^4 - 12x^2 + 35 > 0 \ ; \qquad x^3(3x-2)(8+7x-x^2) > 0 \ ;$$

$$x^3 + 3x^2 + 2x \geq 0 \ ; \qquad \frac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 9x + 20} < 0 \ ;$$

$$\left(\frac{x-1}{-8+6x-x^2}\right) \cdot \left(\frac{3x - x^2 - 2}{4-x}\right) > 0 \ ;$$

$$|x+1| - x \geq 0 \ ; \qquad |x^2 - 1| + 3x + 2 < 0 \ ;$$

$$|x^2 - 3x + 2| - |x^2 - x - 5| \leq 0 \ ; \qquad |x^2 - 1| + 2 < 3x| \ ;$$

$$\frac{|x-1| \cdot |x^2 + 2x - 7|}{3x^2 + 5x + 2} \geq 0 \ ; \qquad \frac{x^2 - 6|x| - 7}{9 - x^2} \geq 0 \ ;$$

$$\begin{cases} 5x^2 - 4x - 1 \leq 0 \\ 3x - 1 < 0 \ ; \\ x^2 - x < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} |x| + 2x - |x^2 - 2| > 0 \\ 3x^2 - 7x + \ x62 - 3x + 2| \geq 0 \ . \end{cases}$$

**Equazioni e disequazioni irrazionali.** Siano $P(x)$ e $Q(x)$ espressioni reali dipendenti da $x$. Data la uguaglianza:

$$Q(x) = \sqrt{P(x)}$$

trasformarla in un' altra in cui non compaia il radicale.

Risp. Per prima cosa bisogna assicurarsi che la uguaglianza abbia senso in $\mathbf{R}$. Occorre allora che $P(x) \geq 0$ e quindi $Q(x) \geq 0$. Se queste condizioni sono verificate, allora la eguaglianza data equivale a quella che si ottiene quadrando ambo i membri. Quindi la uguaglianza data equivale al sistema

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ (Q(x))^2 = P(x) \end{cases}$$

in cui il radicale non é piú presente.

Trasformare la disuguaglianza

$$Q(x) < \sqrt{P(x)}$$

in un' altra in cui non compaia il radicale.

Risp. Per prima cosa bisogna assicurarsi che la disuguaglianza abbia senso in $\mathbf{R}$. Occorre allora che $P(x) \geq 0$ A questo punto ci sono due alternative (i) $Q(x) < 0$ ed in tal caso la disuguaglianza é verificata perché ogni numero negativo é minore di ogni numero $\geq 0$. (ii) $Q(x) \geq 0$ ed in tal caso si eleva al quadrato la disuguaglianza iniziale. Si ha allora che le soluzioni della la disuguaglianza iniziale sono la unione delle soluzioni di due sistemi

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) < 0 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) \geq 0 \\ (Q(x))^2 < P(x) \end{cases}$$

in cui il radicale non compare piú.

Trasformare la disuguaglianza

$$Q(x) > \sqrt{P(x)}$$

in un' altra in cui non compaia il radicale.

Risp. Per prima cosa bisogna assicurarsi che la disuguaglianza abbia senso in $\mathbf{R}$. Occorre allora che $P(x) \geq 0$ e quindi $Q(x) > 0$. Se queste condizioni sono verificate, allora la disuguaglianza data equivale a quella che si ottiene quadrando ambo i membri. Quindi la disuguaglianza data equivale al sistema

$$\begin{cases} P(x) \geq 0 \\ Q(x) > 0 \\ (Q(x))^2 \geq P(x) \end{cases}$$

in cui il radicale non é piú presente.

Il procedimento é simile quando si abbiano radicali di ordine superiore pari.

Se si ha a che fare con radicali dispari la loro eliminazione é assai piú semplice perché le elevazioni a potenza dispari sono sempre possibili e conservano le disuguaglianze.

**esercizio 11** *Risolvere*

$$2x+5 \leq \sqrt{x^2+5x-50}\ ; \quad \sqrt{x-4}+\sqrt{x+4} < 2\ ;$$

$$\sqrt{\frac{x}{x^2-2}} < 1\ ; \quad |x-2| < \sqrt{x+1}\ ;$$

$$x < \sqrt{(x^2-1)\cdot(x^2-4)}\ ; \quad \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}} + \sqrt{x} + \sqrt{x-1} > 4\ ;$$

$$\sqrt{x^2-x+1} + 3\sqrt[4]{x^2-x+1} > 4.$$

**Sistemi di due equazioni lineari in due incognite.** La seguente definizione risulta utile in seguito.

Dati quattro numeri $a, b, c, d$, si chiama determinante ad essi associato, il numero reale:

$$\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} := ad - bc.$$

Siano $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, b_1, b_2$ numeri reali assegnati ($a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ vengono detti coefficienti del sistema, $b_1, b_2$ la coppia termine noto). Si chiama sistema lineare di due equazioni in due incognite la coppia di uguaglianze:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

Si chiama soluzione del sistema ogni coppia di numeri reali $x_1, x_2$ che rendano le due equazioni del sistema una identitá.

Vale il seguente teorema.

**Teorema 2** *(Cramer) Il sistema lineare ha una ed una sola soluzione* $(x_1, x_2)$ *se e solo se il determinante dei coefficienti:*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

*é non nullo. Nel caso che il determinante dei coefficienti sia diverso da zero, la soluzione del sistema é data dalla coppia:*

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

Nel caso che il sistema lineare abbia determinante dei coefficienti nullo si puó usare il seguente teorema.

**Teorema 3** *(Rouché-Capelli) Se in un sistema lineare il determinante dei coefficienti é nullo, si hanno vari sottocasi.*

**(i)** *Tutti i coefficienti sono nulli* ($a_{11} = a_{12} = a_{21} = a_{22} = 0$).

- **(a)** *Se* $b_1$ *e* $b_2$ *sono entrambi nulli ogni coppia di numeri reali é soluzione.*
- **(b)** *Se* $b_1$ *oppure* $b_2$ *é non nullo, il sistema non ha soluzione.*

**(ii)** *Almeno uno dei quattro coefficienti* $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ *é non nullo. Si hanno due sottocasi.*

- **(c)** *Sia*

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = 0.$$

*In questo sottocaso si risolve la equazione in due variabili che contiene il coefficiente non nullo; l'altra equazione viene automaticamente ad essere risolta. Quindi il sistema lineare viene ad avere infinite soluzioni, in cui uno dei due elementi della coppia soluzione é arbitrario.*

**(d)** *Se almeno uno dei due determinanti*

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

*é non nullo, il sistema non ha soluzione.*

**Esempio 7.3**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}.$$

*Il determinante di questo sistema é dato da*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0;$$

*per il teorema di Cramer la soluzione é:*

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{1}{2} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-1}{2}.$$

**Esempio 7.4**

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 = 2 \end{cases}.$$

*Il determinante di questo sistema é dato da*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

*non si puó applicare il teorema di Cramer; va applicato il teorema di Rouché-Capelli. Poiché almeno un coefficiente del sistema non é nullo siamo nel caso (ii). Si calcolano i due determinanti:*

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0,$$

*quindi siamo nel caso (c). Si puó allora risolvere una sola equazione, per esempio la prima; si ottiene $x_1$ arbitrario, $x_2 = 1 - x_1$. É immediato verificare che la coppia ora scritta é soluzione anche della seconda equazione.*

**Esempio 7.5**

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ -2x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases} .$$

*Il determinante di questo sistema é dato da:*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0;$$

*non si puó applicare il teorema di Cramer; va applicato il teorema di Rouché-Capelli. Poiché almeno un coefficiente del sistema non é nullo siamo nel caso (ii). Si calcolano i due determinanti:*

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

*quindi siamo nel caso (d) ed il sistema non ha soluzione.*

É bene notare che i risultati dei due ultimi esempi, si vedevano direttamente dal sistema, per semplice ispezione.

## 8 Richiami su logaritmi, equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.

**Definizione 17** *(logaritmi ) Sia $a \in \mathbf{R}, a > 0, a \neq 1$. Per ogni $y \in \mathbf{R}, y > 0$, si puó provare che l'equazione $a^x = y$ (nella incognita $x$), ha una ed una sola soluzione $x$ reale; tale soluzione si chiama il logaritmo in base $a$ di $y$ che si indica con il simbolo $x = \log_a y$.*

Si ha quindi

$$y = a^{\log_a y} \qquad \forall y > 0, \quad a > 0, a \neq 1;$$

a parole: il logaritmo in base $a$ di $y$ é l'esponente da dare ad $a$ per ottenere $y$; in altre parole, data una base $a \in \mathbf{R},\ a > 0,\ a \neq 1$ ed un numero positivo $y$ quest'ultimo si puó scrivere come una potenza reale di base $a$ ed esponente $\log_a y$

Siano $a, b, x, y$ numeri reali positivi; siano inoltre $a \neq 1, b \neq 1$; sia $\alpha \in \mathbf{R}$. Dalle proprietá sopra elencate delle potenze e dalla definizione di logaritmo, si ottengono le seguenti formule.

- $\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1.$
- $\log_a(x \cdot y) \; = \; \log_a x + \log_a y.$
- $\log_a(\frac{x}{y}) \; = \; \log_a x - \log_a y.$
- $\log_a x^\alpha \; = \; \alpha \cdot \log_a x.$
- $\log_a x \; = \; \frac{\log_b x}{\log_b a}.$
- $\log_a x = \log_a y \Longleftrightarrow x = y.$
- Siano $0 < P(x) \leq Q(x)$ espressioni e sia $a > 1$; allora
$$\log_a P(x) \leq \log_a Q(x).$$
- Siano $0 < P(x) \leq Q(x)$ espressioni e sia $0 < a < 1$; allora
$$\log_a P(x) \geq \log_a Q(x).$$
- Siano $0 < P(x)$ una espressione e sia $b \in \mathbf{R},\ a > 1$; allora
$$\log_a P(x) \leq b \Rightarrow P(x) \leq a^b, \quad \log_a P(x) \geq b \Rightarrow P(x) \geq a^b,$$

**esercizio 12** *Per semplicitá in questo esercizio* $\log$ *vuol dire* $\log_a$, *con* $a > 0, a \neq 1$, *reale. Per quali* $x \in \mathbf{R}$ *valgono le identitá:*

$$\log x^4 = 2 \log x^2 \ ; \quad \log[(x-1)x] = \log x + \log(x-1) \ ; \quad \log \sqrt{x^2} = \frac{1}{2} \log x^2 \ ?$$

*Completare, indicando inoltre per quali* $x$ *la identitá é valida:*

$$\log x^2 = 2 \log ? \ ; \quad \log(xy) = \log ? + \log ? \ ; \quad \log x^2 = \log_? x \ ;$$
$$\log x = \log(\log_? ?) \ .$$

**Esempio 8.1** *Risolvere*

$$2^{\frac{x-1}{x}} > \frac{1}{2}.$$

<u>*Risoluzione*</u> *Si effettua il logaritmo di ambo i membri, in base* $2 > 1$; *per quanto detto sopra la disuguaglianza si conserva e si ha*

$$\log_2(2^{\frac{x-1}{x}}) > \log(\frac{1}{2}),$$

*ossia, usando le proprietá dei logaritmi:*

$$\frac{x-1}{x} > -1.$$

*La soluzione é* $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$.

**Esempio 8.2** *Risolvere*

$$\frac{2^x - \sqrt{3-2^x}}{2^x} < \frac{1}{2}.$$

*Risoluzione* *Se si effettua la sostituzione* $t = 2^x$ *si ha*

$$\begin{cases} t = 2^x \\ t > 0 \\ \frac{t-\sqrt{3-t}}{t} < \frac{1}{2} \end{cases}$$

*Siccome* $3 > t > 0$, *si ha*

$$\begin{cases} t = 2^x \\ 0 < t < 3 \\ t - \sqrt{3-t} < t \cdot \frac{1}{2} \end{cases}$$

*ossia*

$$\begin{cases} t = 2^x \\ 0 < t < 3 \\ \frac{t}{2} < \sqrt{3-t} \end{cases}$$

*ossia*

$$\begin{cases} t = 2^x \\ 0 < t < 3 \\ \frac{t^2}{4} < 3 - t \end{cases}$$

*Ne segue* $0 < t < 2, t = 2^x$ *e quindi* $x \in (-\infty, 1)$.

**Esempio 8.3** *Sia* $A(x)$ *una espressione positiva,* $a > 1, b \in \mathbf{R}$. *Una disequazione logaritmica del tipo* $log_a(A(x)) > b$ *si puó come scrivere come* $a^{log_a(A(x))} > a^b$ *ossia* $A(x) > a^b$ *in cui il logaritmo é scomparso.*

**esercizio 13** *Risolvere*

$$\frac{2^x - 2^{-x}}{2} \geq 4 \ ; \quad \frac{2^x - 2^{-x}}{2^x + 2^{-x}} \leq 2 \ ; \quad (1+x^2)^x > 1 \ ;$$

$$2^{1+x} + 2^{-x} > 3 \ ; \quad \frac{2^{x/2}}{2^x - 1} \geq 0 \ ; \quad 2^{2x} - 3^x \leq 0 \ ;$$

$$|3^x - 2| > 5 \ ; \quad x^{2^x - 1} > 1 \ ; \quad \left(\frac{2^{x^3} - 2}{x|x|}\right) > 0 \ ;$$

$$\frac{1}{\log_x 2} < 1 \ ; \quad 1 < 3 \log_{x^2-1} 4 \ ; \quad \log_{\frac{1}{2}}(x^2 + x) \geq 2 \ ;$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3) \geq \log_{\frac{1}{2}}(-2x) \ ; \quad \log_{\frac{1}{2}} \frac{x-2}{\sqrt{2x-8}} \leq -1 \ ;$$

$$\frac{1-\log_2(x^2)}{\log_2(1-x)} \leq -3 \ ; \quad \log_x(x+1) \geq 0 \ ; \quad log_{\log(x+1)} x^2 > 0.$$

## 9 Piano Euclideo.

Si assume come noto il concetto di piano euclideo e dei suoi sottoinsiemi retta, semiretta, segmento, semipiano, il concetto di distanza tra due punti, i concetti di coppie di rette coincidenti, incidenti, parallele e le proprietá di parallelismo tra rette. La distanza di $P$ da $Q$ verrá indicata con $\overline{PQ}$.

Si assumono come noto il concetto di uguaglianza tra segmenti e note le operazioni di somma e differenza tra segmenti.

Si assumono come noti i concetti di cerchio e circonferenza, ed il loro centro, raggio, diametro.

Dato un semipiano, la retta che lo limita verrá chiamata il <u>lato</u> del semipiano.

**Definizione 18** *<u>Angolo</u>: parte di piano racchiusa tra due semirette ( dette lati dell'angolo) aventi origine comune (detta vertice).*

Si assumono come noto il concetto di uguaglianza tra angoli e note le operazioni di somma e differenza tra angoli.

Si assume come noto il concetto di perpendicolaritá (sinonimo: ortogonalitá).

**Angolo retto** : angolo con lati perpendicolari.

**Angolo piatto** : angolo con lati che giacciono su una stessa retta, da parti opposte rispetto al vertice; l'angolo piatto delimita un semipiano.

**Angolo giro** : angolo con lati coincidenti: racchiude tutto il piano.

**Angolo acuto** : angolo strettamente contenuto in un angolo retto avente lo stesso vertice.

**Angolo ottuso** : Angolo contenuto strettamente in un angolo piatto e che contiene strettamente un angolo retto; i tre angoli hanno lo stesso vertice.

**Angoli adiacenti** coppia di angoli aventi il vertice ed un lato comune, da parti opposte rispetto al lato comune, aventi il secondo lato sulla stessa retta.

**Angoli complementari** angoli la cui somma é un angolo retto.

**Angoli supplementari** angoli la cui somma é un angolo piatto. Ovviamente angoli adiacenti sono supplementari.

**Angoli opposti al vertice** angoli aventi il vertice comune e con i lati dell'uno sul prolungamento rettilineo dei lati dell'altro.

**Misure degli angoli** : Si considera un angolo unitá di misura.
Dato un angolo si confronta con la unitá di misura esattamente come si fa per i segmenti. Il numero reale non negativo risultato é la misura dell'angolo dato rispetto alla unitá di misura.

**Misure sessadecimali** : Si assume come unitá di misura il grado, che é un angolo che é la 360-esima parte dell'angolo giro. Allora la misura di un angolo é un allineamento decimale non negativo che si indica con $\alpha°$. Un angolo retto misura 90°, un angolo piatto misura 180°, un angolo giro misura 360°.

**Misure sessagesimali** Si assume come unitá di misura il grado, come sopra, tuttavia gli angoli di misura inferiore ad un grado vengono misurati con la 60-esima parte del grado, detto primo; gli angoli di misura inferiore ad un primo vengono misurati con la 60-esima parte del primo, detto secondo; si ottiene, per le misure in secondi un allineamento decimale. La misura in gradi é quindi della forma:

$$x^\circ y' z''$$

**Misure centesimali .** Si assume come unitá di misura un angolo che é la 400-esima parte dell'angolo giro. Si indicherá con $\alpha_{\text{cent}}$ la misura centesimale dell'angolo $\alpha$. Allora un angolo retto misura $100_{\text{cent}}$, un angolo piatto misura $200_{\text{cent}}$, un angolo giro misura $400_{\text{cent}}$.

**Concetti e risultati di Geometria Euclidea**

**Postulato delle parallele** Data una retta ed un punto fuori di essa, esiste una ed una sola retta passante per il punto e parallela alla retta precedente.

**Rette tagliate da una trasversale** Date due rette ed una terza retta che le taglia, detta trasversale, si assumono noti i concetti di coppie di angoli alterni (interni ed esterni), corrispondenti, coniugati (interni ed esterni). Se le due rette sono parallele, le coppie di angoli alterni e corrispondenti sono uguali e quelle di angoli coniugati sono supplementari.

**Trasformazioni del piano euclideo in sé** Si chiamano **movimenti** le trasformazioni che conservano le distanze e gli angoli. I movimenti fondamentali sono: la trasformazione identica che lasci fisso ogni punto; le traslazioni che godono della proprietá di trasformare ogni retta in una retta parallela; le rotazioni, che lasciano uno ed un solo punto fisso; le riflessioni che lasciano fissa una retta; ogni altro movimento é una applicazione successiva di movimenti fondamentali.

**Insiemi convessi** Un sottoinsieme del piano euclideo si dice convesso se dati comunque due suoi punti, il segmento che li congiunge appartiene al sottoinsieme.

**Poligonale** Siano $P_1$, $P_2$, ... $P_n$ punti del piano; i punti $P_1$, $P_2$, ... $P_{n-1}$ e $P_2$, ... $P_n$ siano distinti. L'insieme unione dei segmenti $P_1P_2$, $P_2P_3$, ..., $P_{n-1}P_n$ (detti lati ) si chiama **poligonale**; i punti $P_1$, $P_2$, ... $P_n$ si chiamano i vertici della poligonale; i punti $P_1, P_n$ si chiamano gli estremi della poligonale.Una poligonale si dice **aperta** (**chiusa**) se $P_1 \neq P_n$ ($P_1 = P_n$). Una poligonale si dice **semplice** se non esiste alcun punto appartenente a due lati distinti ( tranne i vertici di lati consecutivi o gli estremi in una poligonale chiusa).

**Poligoni** Si chiama poligono la parte di piano racchiusa da una poligonale semplice e chiusa. Un poligono con tre lati si chiama triangolo.

Si assumono note le proprietá dei **triangoli** (somma degli angoli interni, definizione e proprietá dei triangoli acutangoli, ottusangoli, rettangoli (ipotenusa e cateti), equilateri, isoscele, scaleni ; i criteri di uguaglianza tra triangoli; la definizione di ortocentro, baricentro, incentro, circocentro e loro proprietá; i criteri di similitudine).

Si assumono note le proprietá dei **quadrilateri** (parallelogramma, rettangolo, quadrato, rombo, trapezio), dei **poligoni**(somma degli angoli interni, somma degli angoli esterni).

Si assumono noti i concetti di equiscomponibilitá di poligoni, di area di un poligono e di lunghezza di una poligonale; si assumono note le principali proprietá delle aree dei poligoni e delle lunghezze delle poligonali.

Si assumono noti i teoremi di Euclide e di Pitagora per il triangolo rettangolo.

Si assumono note le proprietá della circonferenza e degli angoli al centro ed alla circonferenza.

Si ricorda che un settore (di cerchio) é la intersezione di un cerchio con un angolo avente vertice il centro del cerchio.

Si ricorda che un arco di circonferenza é la intersezione di una circonferenza con un angolo avente vertice il centro della circonferenza.

Durante il corso verranno definite rigorosamente l'area del settore e la lunghezza di un arco di circonferenza.

<u>Teorema</u> (Archimede) Sia $\pi$ la lunghezza della semicirconferenza (intersezione di una circonferenza con un semipiano con lato contenente il centro della

circonferenza) di raggio $R = 1$. Allora l'area del cerchio di raggio $R$ é $\pi R^2$. La lunghezza della circonferenza di raggio $R$ é: $2\pi R$.
Si puó provare che $\pi$ é un numero reale che non é razionale e un suo valore approssimato, é circa 3.1415926 . Archimede usava come valore approssimato per eccesso $3+\frac{1}{7} = 3.\overline{142857}$ e per difetto $3+\frac{10}{71} = 3.1\overline{40845070}$. Nel medioevo si pensava erroneamente che $\pi$ valesse esattamente $3 + \frac{1}{7}$.

**Misure degli angoli in radianti**. Dato un angolo, la circonferenza di centro il vertice dell'angolo e raggio $R = 1$ interseca l'angolo in un arco. La misura di tale arco é la misura in radianti dell'angolo.

In radianti: L'angolo giro misura $2\pi$.
L'angolo piatto misura $\pi$.
L'angolo retto misura $\frac{\pi}{2}$.
L'angolo di un triangolo equilatero misura $\frac{\pi}{3}$.
L'angolo acuto di un triangolo rettangolo ed isoscele misura $\frac{\pi}{4}$.

Teorema (Archimede) Sia $S$ il settore intersezione di un cerchio di raggio $R$ e di un angolo di vertice nel centro del cerchio e misura $\alpha$ in radianti. Allora (i) l'arco di circonferenza che delimita il settore ha lunghezza $\alpha R$ ; (ii) il settore ha area $\alpha\frac{R^2}{2}$. In particolare, l'area del cerchio é $\pi R^2$.

Per un angolo si hanno varie misure. Sia $\alpha_{\mathrm{rad}}$ la misura in radianti dell'angolo, $\alpha^o$ la misura in gradi sessadecimali, $\alpha_{\mathrm{cent}}$ la misura in gradi centesimali. Si ha:

$$\frac{\alpha_{\mathrm{rad}}}{2\pi} = \frac{\alpha^o}{360} = \frac{\alpha_{\mathrm{cent}}}{400}.$$

## 10 Piano cartesiano. Trigonometria. Richiami di geometria analitica. Equazioni e disequazioni trigonometriche.

Dato un piano euclideo, si considerino su di esso due rette perpendicolari che si incontrano in un punto $O$ detto origine. Su ciascuna delle due rette (che verranno indicate convenzionalmente con asse $x$ ed asse $y$) si introducono un punto unitá $U_x, U_y$, dando alle due rette una struttura di rette cartesiane. Si assumerá, salvo avviso, che $\overline{OU_x} = \overline{OU_y}$ . L'asse $x$ verrá di solito disposto orizzontalmente e l'asse $y$ verticalmente, con $U_x$ a destra di $O$ ed $U_y$ sopra $O$. Ad ogni punto $P$ del piano vengono associate le proiezioni $X$ sull'asse $x$ ed $Y$ sull'asse $y$. L'ascissa $x$ di $X$ (sull'asse $x$) viene detta ascissa di $P$ e l'ascissa $y$ di $Y$ (sull'asse $y$) viene detta ordinata di $P$.

Quindi al punto $P$ viene associata una coppia ordinata $(x, y)$ di numeri reali. Viceversa ad ogni coppia di numeri reali viene associato uno ed un solo punto del piano. Con questa struttura il piano viene detto piano cartesiano.
Come giá fatto per la retta cartesiana, da ora in poi verranno identificati i punti del piano con le coppie ordinate di numeri reali.
Quindi il piano cartesiano verrá identificato con $\mathbf{R}^2$.

Distanza nel piano cartesiano. Dati due punti $P = (x, y),\ Q = (a, b)$, la loro distanza puó essere calcolata con il teorema di Pitagora, applicato al triangolo rettangolo di vertici $P, Q, R = (x, b)$ e cateti $\overline{PR} = |y - b|, \quad \overline{QR} = |x - a|$ :

$$\overline{PQ} = \sqrt{|x-a|^2 + |y-b|^2} = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \tag{6}$$

Quadranti. Il piano cartesiano é suddiviso dagli assi in quattro quadranti. Nella convenzione indicata sopra, il primo é quello in alto a destra. Nella convenzione matematica si ruota in senso antiorario. Quindi il secondo é quello in alto a sinistra, il terzo é quello in basso a sinistra, il quarto quello in basso a destra. Nella convenzione topografica invece si ruota in senso orario. Quindi il secondo é quello in basso a destra, il terzo é quello in basso a sinistra, il quarto quello in alto a sinistra.

Richiami di trigonometria I richiami di trigonometria che seguono verranno fatti con la convenzione matematica, usando i radianti.

La circonferenza trigonometrica $\mathfrak{C}$ é la circonferenza di centro l'origine $(0, 0)$ e raggio $R = 1$. I punti $(x, y)$ che stanno sulla circonferenza trigonometrica $\mathfrak{C}$

distano 1 dall'origine, quindi verificano la condizione $\sqrt{x^2+y^2}=1$, oppure, piú semplicemente: $x^2+y^2=1$.

Si puó costruire una corrispondenza $\mathbf{R} \Rightarrow \mathfrak{C}$ come segue. Ad ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ si puó far corrispondere un solo punto sulla circonferenza trigonometrica $\mathfrak{C}$. Al numero zero si associa il punto $U=(1,0)$. Ad ogni numero $\alpha > 0$ si associa un punto $P$ su $\mathfrak{C}$ costruito considerando un filo di spessore trascurabile lungo $\alpha$; si fissi il filo con primo estremo in $U$ e si arrotoli sulla circonferenza trigonometrica girando in senso antiorario ( anche piú volte, se il filo é piú lungo di $2\pi$). Il punto $P \in \mathfrak{C}$ in cui cade il secondo estremo del filo é il punto corrispondente ad $\alpha$.

Ad ogni numero $\alpha < 0$ si associa un punto $P$ su $\mathfrak{C}$ costruito considerando un filo di spessore trascurabile lungo $|\alpha|$; si fissi il filo con primo estremo in $U$ e si arrotoli sulla circonferenza trigonometrica girando in senso orario ( anche piú volte, se il filo é piú lungo di $2\pi$). Il punto $P \in \mathfrak{C}$ in cui cade il secondo estremo del filo é il punto corrispondente ad $\alpha$.

Si osservi che ad ogni numero reale $\alpha$ corrisponde uno ed un solo punto $P \in \mathfrak{C}$; invece ogni $P \in \mathfrak{C}$ proviene da infiniti $\alpha \in \mathbf{R}$ che differiscono tra di loro per multipli di $2\pi$.

Si osservi che se $\mathbf{R} \ni \alpha_1 \Rightarrow P_1 \in \mathfrak{C}$, allora ad $\alpha_1+\pi \Rightarrow$ il punto simmetrico a $P_1$ rispetto all'origine; ad $-\alpha_1 \Rightarrow$ il punto simmetrico a $P_1$ rispetto all' asse $x$; quindi ad $\pi-\alpha_1 \Rightarrow$ il punto simmetrico a $P_1$ rispetto all' asse $y$.

<u>Definizione di seno e coseno</u>: $\sin\alpha,\ \cos\alpha$ (per $0 \le \alpha \le 2\pi$).
Siano, $O=(0,0),\ U=(1,0)$. A partire dal punto $U$, procedendo in senso antiorario sulla circonferenza trigonometrica, si determini un punto $P$, tale che l'arco di circonferenza $\widehat{UP}$ misuri $\alpha$.
L'ordinata di $P$ é per definizione $\sin\alpha$; l'ascissa di $P$ é per definizione $\cos\alpha$ con $\alpha \in \mathbf{R}$.
<u>Definizione di seno e coseno</u>: $\sin\alpha,\ \cos\alpha$ (per $\alpha \in \mathbf{R}$.)
Sia $\alpha \in \mathbf{R}$ qualsiasi. Esiste $\beta,\ 0 \le \beta < 2\pi,$ e $k \in \mathbf{Z}$ tali che: $\alpha = \beta + 2k\pi$;

si pone allora per definizione $\sin\alpha := \sin\beta,\ \cos\alpha := \cos\beta$. Si é cosí definito $\cos\alpha,\ \sin\alpha$ per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$.

In tal modo, dato un qualsiasi numero reale $\alpha \in \mathbf{R}$, ad esso si puó associare un punto sulla circonferenza trigonometrica, di coordinate $(\cos\alpha, \sin\alpha)$.

Si puó anche procedere come segue: fissato $\alpha \in \mathbf{R}$ sia $\alpha \Rightarrow P \in \mathfrak{C}$ il punto sulla circonferenza trigonometrica ottenuto con la corrispondenza considerata sopra: allora $\cos\alpha$ é l'ascissa di $P$ e $\sin\alpha$ é l'ordinata di $P$.

Proprietá di $\sin\alpha,\ \cos\alpha$. Per ogni $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$, valgono le seguenti proprietá.

- $(\cos\alpha)^2 + (\sin\alpha)^2 = 1$ ovvero $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$
  (spesso si scrive $\sin^2\alpha := (\sin\alpha)^2,\ \cos^2\alpha := (\cos\alpha)^2$).
- $-1 \le \sin\alpha \le 1, \quad -1 \le \cos\alpha \le 1:$
- $\cos(-\alpha) = \cos\alpha,\ \sin(-\alpha) = -\sin\alpha$.
- $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha,\ \sin(\alpha + 2\pi) = \sin\alpha$.
- Piú in generale: $\quad \cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha,\ k \in \mathbf{Z}$;
  $\sin(\alpha + 2h\pi) = \sin\alpha,\ h \in \mathbf{Z}$.
- (formule di addizione)
  $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\ \cos\beta \pm \sin\beta\ \cos\alpha$.
  $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\ \cos\beta \mp \sin\alpha\ \sin\beta$.
- (formule di prostaferesi)
  $\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2}$
  $\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\ \sin\frac{\alpha+\beta}{2}$.
- (formule di bisezione)
  $1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}, \qquad 1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$
- (formule di duplicazione)
  $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha, \qquad \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$
- (archi notevoli)

| $\alpha$ | $0,\ 2\pi$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{3}{2}\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\sin\alpha$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $0$ | $-1$ |
| $\cos\alpha$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $-1$ | $0$ |

Definizione e proprietá di $\tan\alpha$.

Sia $\cos\alpha \neq 0$ ossia ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$); si definisce:

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

Proprietá:
$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha; \quad \tan(\alpha+\pi) = \tan\alpha,$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha}, \quad \sin^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}. \quad \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+\tan^2\alpha.$$

Significato geometrico della tangente.
Sia, per semplicitá $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Sia $\alpha$ la misura dell'arco $\widehat{UP}$ (percorso in senso antiorario se $\alpha > 0$, percorso in senso orario se $\alpha < 0$);la semiretta di origine $O$ passante per $P$ incontrerá la parallela all'asse $y$ passante per $U$ in un punto $T$. Allora $\tan\alpha =$ ordinata di $T$.

Proprietá trigonometriche dei triangoli.

Triangoli rettangoli:
Sia $ABC$ un triangolo rettangolo con angolo retto in $C$. Siano:

$$b := \overline{AC},\ c := \overline{AB},\ a := \overline{BC},\ \alpha := \widehat{BAC},\ \beta := \widehat{ABC},\ \gamma := \widehat{BCA} = \frac{\pi}{2}.$$

Valgono le seguenti formule:
$b = c\sin\beta,\ a = c\cos\beta,\ b = c\cos\alpha,\ a = c\sin\alpha,\ b = a\tan\beta,\ a = b\tan\alpha.$

Triangoli qualsiasi.

Sia $ABC$ un triangolo . Siano:

$$b := \overline{AC},\ c := \overline{AB},\ a := \overline{BC},\ \alpha := \widehat{BAC},\ \beta := \widehat{ABC},\ \gamma := \widehat{BCA}.$$

Valgono le seguenti formule:

- Teorema dei seni

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

$R$ é il raggio della circonferenza circoscritta al triangolo (ossia la circonferenza passante per $A, B, C$).

- Teorema di Carnot.

  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$
  $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$
  $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

  Area del triangolo

- Formula di Erone.

  Sia $p := \frac{a+b+c}{2}$; allora l'area $\mathcal{A}$ del triangolo é data da:

$$\mathcal{A} = \Big(p(p-a)(p-b)(p-c)\Big)^{\frac{1}{2}}$$

  Si ha anche:

- 
$$\mathcal{A} = \frac{(ab\sin\gamma)}{2} = \frac{(bc\sin\alpha)}{2} = \frac{(ac\sin\beta)}{2} \tag{7}$$

Disuguaglianza tra seno, arco, tangente:

Sia $\frac{-\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; si ha:

$$(*) \quad |\sin\alpha| \leq |\alpha| \leq |\tan\alpha|.$$

N.B. Questa catena di disuguaglianze é valida solo se $\alpha$ é misurato in radianti.

Trigonometria in gradi sessagesimali o sessadecimali.

Dato un angolo, sia $\alpha_r$ la sua misura in radianti e sia $\alpha^0$ la sua misura in gradi. Si ha:

$$\frac{\alpha^o}{360^o} = \frac{\alpha_r}{2\pi}$$

Si definisce

$$\sin \alpha^o := \sin \alpha_r$$
$$\cos \alpha^o := \cos \alpha_r$$
$$\tan \alpha^o := \tan \alpha_r$$

l'ultima formula vale solo se $\alpha_r \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ed $\alpha^o \neq 90^o + k180^o,\ k \in \mathbf{Z}$.
Tutte le formule sopra indicate, ad eccezione di (*), valgono sostituendo $\alpha_r$ con $\alpha^o$.

Domanda. Come va scritta (*) in gradi?

Trigonometria in gradi centesimali.
Dato un angolo, sia $\alpha_r$ la sua misura in radianti e sia $\alpha_d$ la sua misura in gradi centesimali. Si ha:

$$\frac{\alpha_d}{400} = \frac{\alpha_r}{2\pi}. \tag{8}$$

Si definisce:

$$\sin \alpha_d := \sin \alpha_r$$
$$\cos \alpha_d := \cos \alpha_r$$
$$\tan \alpha_d := \tan \alpha_r$$

l'ultima formula vale solo se $\alpha_r \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ ed $\alpha_d \neq 100_d + k400_d,\ k \in \mathbf{Z}$.

Tutte le formule sopra indicate, ad eccezione di (*), valgono sostituendo $\alpha_r$ con $\alpha_d$.

Domanda. Come va scritta (*) in gradi centesimali?

Rette. Si ricorda che nel piano cartesiano le rette sono identificate come l'insieme di punti verificanti opportune equazioni. Nel corso vedremo che ogni retta é della forma

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : ax + by + c = 0 \quad a, b, c, \in \mathbf{R}, \quad a^2 + b^2 > 0\}.$$

Attualmente verranno usate le nozioni impartite nelle medie superiori.

Rette parallele all' asse y. Tali rette sono determinate da equazioni del tipo

$$x = b \quad b \in \mathbf{R};$$

l'asse $y$ viene ad avere equazione $x = 0$.

Rette parallele all' asse x. Tali rette sono determinate da equazioni del tipo

$$y = n \quad n \in \mathbf{R}.$$

l'asse $x$ viene ad avere equazione $y = 0$.

Rette non parallele agli assi coordinati. Tali rette sono l'insieme dei punti verificanti equazioni del tipo

$$y = px + n.$$

(piú rigorosamente si dovrebbe scrivere $\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : \quad y = px + n\}$. Il numero $n$ é la ordinata del punto $(0, n)$ in cui la retta taglia l'asse $y$ ($n$ viene detta talvolta intercetta; il numero $p$ viene chiamato la pendenza della retta e misura il modo in cui le ordinate dei punti della retta aumentano ( se $p > 0$ ) o diminuiscono ( se $p < 0$ ) al crescere delle ascisse.

Ad esempio, La retta bisettrice del primo terzo quadrante ha equazione $y = x$; la retta bisettrice del secondo quarto quadrante ha equazione $y = -x$.

Totalitá delle rette passanti per il punto $(x_0, y_0)$ La totalitá delle rette passanti per un punto é costituita da infinite rette. Una é parallela all'asse $y$ ed ha equazione $x = x_0$; tutte le altre sono della forma

$$y - y_0 = p(x - x_0) \quad \forall p \in \mathbf{R}.$$

Rette parallele ad una retta data. Sia data una retta $r$ di equazione

$$y = px + n.$$

La totalita' delle rette parallele ad r hanno equazione:

$$y = px + l$$

per ogni $l \neq n$.

Le rette parallele alla retta $x = b$ hanno equazione $x = B$, con $B \neq b$.

Le rette parallele alla retta $y = a$ hanno equazione $y = A$, con $A \neq a$.

Rette perpendicolari ad una retta data. Sia data una retta $r$ di equazione

$$y = px + n$$

con $p \neq 0$. Tutte le rette perpendicolari ad r hanno equazione:

$$y = -p^{-1}\,x + n' \qquad n' \in \mathbf{R}.$$

Se $r$ é una retta parallela all'asse $y$, le rette perpendicolari ad r sono tutte le rette parallele all'asse $x$ e viceversa.

Significato geometrico della pendenza.
Data una retta $r$ nel piano cartesiano, non parallela all'asse $y$, per essa é stata definita la pendenza: se la retta é del tipo $y = n = 0 \cdot x + n$, (retta parallela all'asse $x$), la sua pendenza é zero; se la retta é del tipo $y = px + n$, la sua pendenza é $p$.

Sia $\alpha$ l'angolo definito come segue: se $p = 0$, allora $\alpha = 0$; se $p \neq 0$, allora la retta $r: \; y = px + n$, incontra l'asse $x$ in $x_0 = \frac{-n}{p}$; allora la semiretta $s_x : x \geq \frac{-n}{p}, y = 0$, forma con la retta $r$ l' angolo acuto $\alpha$, orientato dalla semiretta $s_x$ alla retta $r$. Dalle proprietá trigonometriche dei triangoli segue che $p = \tan\alpha$.

Applicazioni

Retta per due punti distinti (i) Se due punti hanno la stessa ascissa $a$ (e diversa ordinata) la retta che li congiunge é parallela all'asse $y$ ed ha equazione $x = a$. (ii) Se due punti $(a_1, b_1), (a_2, b_2)$ hanno diversa ascissa la retta che li congiunge é della forma $y = mx + n$ e si ottiene risolvendo il sistema, nelle incognite $m, n$

$$\begin{cases} ma_1 + n = b_1 \\ ma_2 + n = b_2. \end{cases}$$

Distanza di un punto da una retta Durante il corso verrá data una formula per il calcolo della distanza di un punto $(x_0, y_0)$ da una retta $r$. Attualmente: (i) Si determina la retta $s$ passante per $(x_0, y_0)$ e perpendicolare ad $r$ (ii) si determina il punto $(x_1, y_1) := r \cap s$; (iii) la distanza cercata é data dalla distanza di $(x_0, y_0)$ da $(x_1, y_1)$.

Distanza di due rette parallele $r$ ed $s$ Tale distanza coincide con la distanza di un qualunque punto di $r$ da $s$.

Equazione della circonferenza di centro $(x_0, y_0)$ e raggio $R$. La circonferenza di centro $(x_0, y_0)$ e raggio $R$ é l'insieme dei punti di coordinate $(x, y)$ che distano $R$ da $(x_0, y_0)$. Usando la formula (6), la equazione della circonferenza é

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} = R$$

o anche

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Equazioni e disequazioni trigonometriche

- Si proverá nel corso che se $a \in [-1, 1]$ esiste uno ed un solo arco $\alpha \in [-\pi/2, \pi/2]$ che verifichi

$$\sin \alpha = a$$

  tale arco verrá chiamato $\arcsin a$.

- Si proverá nel corso che se $a \in [-1, 1]$ esiste uno ed un solo arco $\alpha \in [0, \pi]$ che verifichi

$$\cos \alpha = a$$

  tale arco verrá chiamato $\arccos a$.

- Si proverá nel corso che se $a \in \mathbf{R}$ esiste uno ed un solo arco $\alpha \in (-\pi/2, \pi/2)$ che verifichi

$$\tan \alpha = a$$

  tale arco verrá chiamato $\arctan a$.

- Sia $(a, b) \in \mathfrak{C}$ ( quindi $a^2 + b^2 = 1$ ); allora esiste $\phi \in \mathbf{R}$ per cui $a = \cos \phi, b = \sin \phi$. Se $a \geq 0, b \geq 0$, allora si puó prendere $\phi = \arcsin b = \arccos a$; se $a \leq 0, b \geq 0$, allora si pu 'o prendere $\phi = \pi - \arcsin b = \arccos a$; se $a \leq 0, b \leq 0$, allora si pu 'o prendere $\phi = \pi + \arcsin(-b) = \pi + \arccos(-a)$; se $a \geq 0, b \leq 0$, allora si pu 'o prendere $\phi = \arcsin b = -\arccos a$.

- Siano $a, b \in \mathbf{R}$ tali che $a^2 + b^2 > 0$. Determinare $K > 0$, e $\phi \in \mathbf{R}$ tali che per ogni $\alpha \in \mathbf{R}$ :

  $$a \cos \alpha + b \sin \alpha = K \cos(\alpha - \phi).$$

  Il punto $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})$ sta su $\mathfrak{C}$ essendo:

  $$(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 + (\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}})^2 = 1;$$

  quindi si puó determinare $\phi$ tale che $(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}) = (\cos \phi, \sin \phi)$. Allora, per le formule di addizione

  $$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \alpha + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \alpha = \cos \phi;$$

  quindi $K = \sqrt{a^2+b^2}$.

- Risolvere: $\sin \alpha = a \in \mathbf{R}$. ( $a$ sia dato , $\alpha$ incognito).

  Se $a \notin [-1, 1]$, la equazione non ha soluzione. Se $a \in (-1, 1)$, la retta $y = a$ incontra la circonferenza trigonometrica $\mathfrak{C}$ in due punti $\{P_1, P_2\}$ con $P_1$ nel primo o terzo quadrante e $P_2$ nel secondo o quarto quadrante rispettivamente. Allora se $\mathbf{R} \ni \alpha_0 \Rightarrow P_1$ allora $\pi - \alpha_0 \Rightarrow P_2$. Quindi la equazione assegnata ha infinite soluzioni $\alpha_0 + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, ed $\pi - \alpha_0 + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

  Se $a = \pm 1$, allora $\alpha = \pm \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

- Risolvere $\sin \alpha = -1/2$. Soluzione $\pi + \pi/6 + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ed $2\pi - \pi/6 + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Si osservi che il modo di scrivere le soluzioni non é univoco: la soluzione si puó anche scrivere $-\pi/6 + 2k'\pi, k' \in \mathbf{Z} \cup -\pi + \pi/6 + 2k'\pi, k' \in \mathbf{Z}$.

- Risolvere $\cos \alpha = b \in \mathbf{R}$. ( $b$ sia dato , $\alpha$ incognito).

  Se $b \notin [-1, 1]$, la equazione non ha soluzione. Se $b \in (-1, 1)$, la retta $y = b$ incontra la circonferenza trigonometrica $\mathfrak{C}$ in due punti $\{P_1, P_2\}$ con $P_1$ nel primo o secondo quadrante e $P_2$ nel quarto o terzo quadrante rispettivamente. Allora se $\mathbf{R} \ni \alpha_1 \Rightarrow P_1$ allora $-\alpha_1 \Rightarrow P_2$. Quindi la equazione assegnata ha infinite soluzioni $\alpha_1 + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, ed $-\alpha_1 + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

  Se $b = \pm 1$, allora $\alpha = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ed $\alpha = \pi + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$

- Risolvere: $\cos\alpha = -1/\sqrt{2}$. Soluzione $\pi - \pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$ ed $\pi + \pi/4 + 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$. Si osservi che il modo di scrivere le soluzioni non é univoco: la soluzione si puó anche scrivere $\pm(\pi + \pi/4) + 2k'\pi, k' \in \mathbf{Z}$.

- Risolvere:

$$\sin\alpha > 1/2\ ; \quad |\cos\alpha| \leq \sqrt{2}\ ; \quad |\tan\alpha| \geq 1\ ;$$

$$\sin^2 x + \sin x - 2 \leq 0\ ; \quad \sqrt{1+\sin x} \geq \sqrt{\cos x}\ ; \quad \log_{|\cos x|} \sin x;$$

$$|\sin x| < |\tan x|\ ; \quad 2|\sin x| < |\tan x|\ ; \quad \frac{\tan x}{1-\cos x} \geq \sin x;$$

$$\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\ ; \quad \sin x \geq \frac{1}{\cos x}\ ; \quad |6\tan^2 x - 1| < 1\ ;$$

## Indice