PRECORSO DI MATEMATICA

I Lezione

"INSIEMI ED INSIEMI NUMERICI"

E. Modica

matematica@blogscuola.it

www.matematica.blogscuola.it

SIMBOLI MATEMATICI

Poiché in queste pagine verranno utilizzati differenti simboli matematici, è bene elencarne subito i principali.

SIMBOLO	SIGNIFICATO
$\in$	"appartiene"
$\notin$	"non appartiene"
$\mid$	"tale che"
$\wedge$	"e"
$\vee$	"o"
$\neg$	"non"
$\Rightarrow$	"implica" ovvero "allora"
$\Leftrightarrow$	"implica ed è implicato" ovvero "se e solo se"
$\forall$	"per ogni" ovvero "comunque scelgo"
$\exists$	"esiste"
$\exists!$	"esiste ed è unico"
$\nexists$	"non esiste"
$\mathbb{N}$	"insieme dei numeri naturali"
$\mathbb{Z}$	"insieme dei numeri interi"
$\mathbb{Q}$	"insieme dei numeri razionali"
$\mathbb{R}$	"insieme dei numeri reali"

GLI INSIEMI, I LORO ELEMENTI E LE RAPPRESENTAZIONI

Quello di **insieme** è un concetto primitivo, cioè un concetto semplice noto a priori e definibile solo mediante dei suoi sinonimi. In matematica sta ad indicare una collettività di oggetti di qualunque natura.
La definizione intuitiva di insieme risale a *Georg Cantor* (1845-1918), fondatore della teoria degli insiemi, il quale scriveva: "un insieme `e una collezione di oggetti, determinati e distinti, della nostra percezione o del nostro pensiero, concepiti come un tutto unico; tali oggetti si dicono elementi dell'insieme".
Pertanto un insieme è individuato dai suoi elementi (**principio di estensione**).

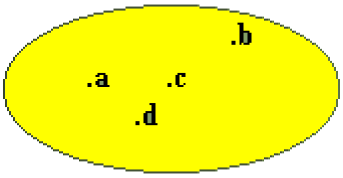
Notazione:

Gli insiemi vengono indicati con le lettere maiuscole dell'alfabeto, mentre gli ***elementi*** di un insieme con le lettere minuscole.
Per indicare che un elemento a appartiene ad un insieme A si utilizza il simbolo di appartenenza $\in$ e si scrive $a \in A$, in caso contrario si scrive $a \notin A$.

Gli insiemi possono essere rappresentati in diversi modi, le rappresentazioni più usate sono:

1. la rappresentazione tabulare o estensiva;
2. la rappresentazione grafica;
3. la rappresentazione per caratteristica o intensiva.

La **rappresentazione tabulare**, consiste nell'elencare, se possibile, tutti gli elementi di un insieme. Per esempio l'insieme *V* delle vocali è $V = \{a, e, i, o, u\}$.
La **rappresentazione grafica** consiste nell'indicare gli elementi di un insieme con punti interni a una linea piana chiusa e non intrecciata. Tale rappresentazione si deve al logico inglese *Venn* (1834-1923) che ideò il metodo più originale, anche se altri come *Eulero* (1707-1783) e *Leibniz* (1646-1716) avevano utilizzato questa tecnica da cui deriva la denominazione di *diagrammi di Eulero-Venn* .



La **rappresentazione caratteristica** consiste nello specificare un certo numero di proprietà atte a stabilire, in modo inequivocabile, quali elementi fanno parte dell'insieme considerato e quali non vi appartengono. L'insieme dei numeri naturali compresi strettamente tra 1 e 5 ha la seguente rappresentazione caratteristica:

$$A = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 5\}$$

Esempi:

1. L'insieme degli animali: $A = \{cane, gatto, elefante, \dots\}$
2. L'insieme delle materie del primo anno del corso di laurea in fisica: $B = \{analisi, fisica, chimica, \dots\}$

Definizione: Si dice ***insieme vuoto*** l'insieme che non contiene nessun oggetto e si indica con il simbolo $\emptyset$.

Definizione: Diremo che l'insieme *B* è un ***sottoinsieme*** dell'insieme *A* se tutti gli elementi di *B* sono anche elementi di *A* e si scrive $B \subseteq A$. Diremo che *B* è un ***sottoinsieme proprio*** di *A* se $B \subseteq A$ ed esiste almeno un elemento di *A* che non sta in *B*, in tal caso si scrive $B \subset A$.

Definizione: Due insiemi A e B si dicono ***uguali*** se contengono gli stessi identici elementi e si scrive $A = B$.

Osservazione: Per verificare che gli insiemi A e B sono uguali basta dimostrare che valgono le seguenti relazioni:

$$A \subseteq B \quad \wedge \quad B \subseteq A \qquad (\textit{\textbf{principio di doppia inclusione}})$$

Osservazione: L'insieme vuoto è contenuto propriamente in ogni insieme, cioè $\emptyset \subset A$, per tale ragione prende il nome di sottoinsieme **banale** di *A*. Lo stesso vale per l'insieme *A*.

Osservazione: Anche se non viene sempre precisato, ogni insieme va considerato come il sottoinsieme di un insieme più generale: un insieme **universo**.

Definizione: Dato un insieme $A \subseteq B$, l'***insieme complementare di A rispetto a B*** è l'insieme formato da tutti gli elementi di *B* che non appartengono ad *A* e si indica con $\bar{A}$, cioè:

$$\bar{A} = \{x : x \in B \wedge x \notin A\}$$

Esempi:

- Dati l'insieme $\mathbb{N}$ dei numeri naturali e l'insieme *P* dei numeri pari, il complementare di *P* rispetto ad $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri dispari.
- Dato un insieme *A*, il complementare di *A* rispetto ad *A* è l'insieme vuoto; mentre il complementare dell'insieme vuoto rispetto ad *A* è *A* stesso:

$$\bar{A} = \emptyset \qquad \text{e} \qquad \bar{\emptyset} = A$$

Definizione: Un insieme di dice ***finito*** quando è formato da un numero limitato di elementi.

Definizione: Un insieme di dice ***infinito*** quando è formato da un numero illimitato di elementi.

Esempi:

- L'insieme $A = \{x \in \mathbb{N} : 1 < x < 5\}$ è finito.
- L'insieme $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è } un\ numero\ pari\}$ è infinito.

CARDINALITÀ DI UN INSIEME

Definizione: Si definisce ***cardinalità*** o ***potenza*** di un insieme A, il numero di elementi contenuti in A e viene indicata con la notazione $|A|$.

Definizione: Due insiemi A e B si dicono ***equipotenti*** quando possiedono lo stesso numero di elementi, ovvero quando $|A| = |B|$.

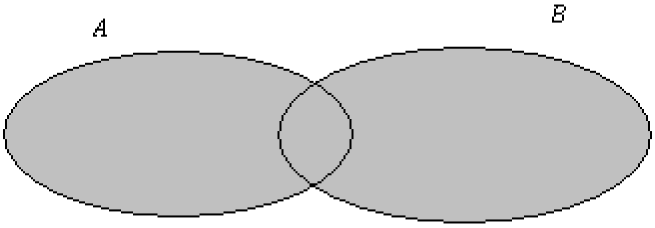
Osservazioni:
- L'insieme vuoto ha cardinalità zero, cioè $|\emptyset| = 0$.
- Gli insiemi finiti hanno come cardinalità un numero naturale.
- Gli insiemi infiniti hanno cardinalità infinita, cioè $|I| = \infty$.

OPERAZIONI TRA INSIEMI

UNIONE

L'insieme ***unione*** di due insiemi A e B è l'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono ad A o a B o ad entrambi e si indica con:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$



L'unione di due insiemi, da un punto di vista logico, è formata dagli elementi che verificano la proprietà di un insieme *oppure* dell'altro, di conseguenza è definita dalla *disgiunzione*.

Proprietà dell'unione

- $A \cup A = A$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cup B = B \cup A$
- $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$

Esercizio: *Dimostrare, mediante il principio di doppia inclusione, che* $A \cup B = B \cup A$.

I inclusione: $A \cup B \subseteq B \cup A$

$$\forall x \in A \cup B \;\rightarrow\; x \in A \vee x \in B \;\rightarrow\; x \in B \vee x \in A \;\rightarrow\; x \in B \cup A$$

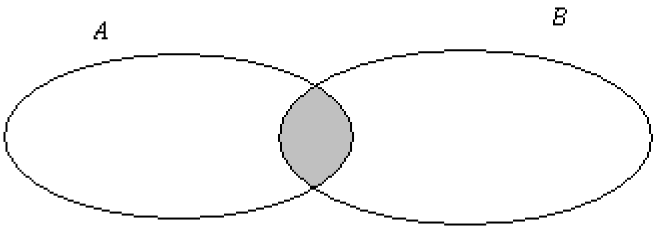
II inclusione: $B \cup A \subseteq A \cup B$

$$\forall x \in B \cup A \;\rightarrow\; x \in B \vee x \in A \;\rightarrow\; x \in A \vee x \in B \;\rightarrow\; x \in A \cup B$$

INTERSEZIONE

L'insieme ***intersezione*** di due insiemi A e B è l'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono sia ad A che a B e si indica con:

$$A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$



L'intersezione di due insiemi, da un punto di vista logico, è formato dagli elementi che verificano sia la proprietà di un insieme che quella dell'altro, di conseguenza è definita dalla *congiunzione*.

Definizione: Due insiemi si dicono ***disgiunti*** se la loro intersezione coincide con l'insieme vuoto, cioè:

$$A \cap B = \emptyset$$

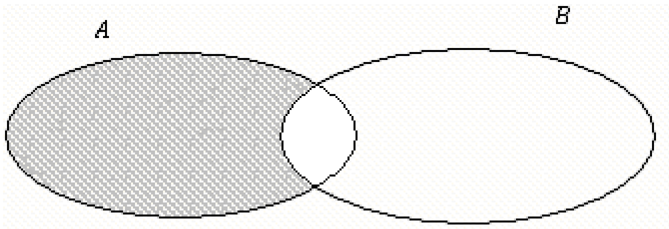
Proprietà dell'intersezione

- $A \cap A = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \cap B = B \cap A$
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$

DIFFERENZA

L'insieme ***differenza*** di due insiemi A e B è l'insieme formato da tutti gli elementi che appartengono ad A e che non appartengono a B e si indica con:

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$



Proprietà della differenza

- $A - A = \emptyset$
- $A - \emptyset = A$

Esempio:

Dati gli insiemi $A = \{1, 2, 3, 6, 9, 18\}$ e $B = \{1, 2, 4, 5, 10, 20\}$, l'insieme differenza è dato da $A - B = \{3, 6, 9, 18\}$.

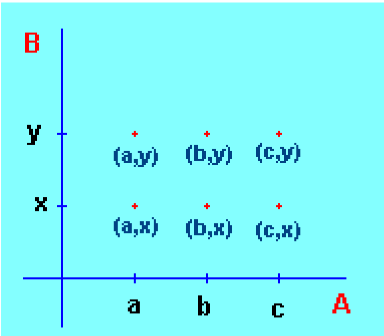
Osservazione: È bene notare che la differenza di due insiemi non gode della proprietà commutativa, ovvero $A - B \neq B - A$.

PRODOTTO CARTESIANO

Definizione: Dati due insiemi A e B (distinti o coincidenti) nell'ordine scritto, e fissati due elementi $x \in A$ e $y \in B$, si definisce ***coppia ordinata*** (x, y) una coppia avente come primo elemento $x \in A$ e come secondo elemento $y \in B$.

Definizione Si definisce ***prodotto cartesiano*** di A e B e si denota con $A \times B$, l'insieme costituito da tutte le coppie ordinate (x, y) e si scrive:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \ \wedge \ y \in B\}$$



Se $A = B$ il prodotto cartesiano $A \times A$ si può anche indicare con A^2. Questa definizione si può estendere a un numero finito qualsiasi di insiemi.

Esempio:

Siano date due rette ortogonali in un piano tali che $A = \mathbb{R}$ è l'insieme dei punti della prima retta e $B = \mathbb{R}$ è l'insieme dei punti della seconda, allora $A \times B = \mathbb{R}^2$ è rappresentato dall'insieme dei punti (x, y) con $x, y \in \mathbb{R}$, del piano considerato.

Osservazione: È bene notare che il prodotto cartesiano di due insiemi non gode della proprietà commutativa, ovvero $A \times B \neq B \times A$.

Proprietà del prodotto cartesiano

- $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$
- $\emptyset \times \emptyset = \emptyset$
- $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
- $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

INSIEME DELLE PARTI

Definizione: Si definisce ***insieme delle parti*** dell'insieme *A* l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi, banali e non, dell'insieme *A*:

$$\mathcal{P}(A) = \{B : B \subseteq A\}$$

È bene osservare che gli elementi dell'insieme delle parti sono tutti sottoinsiemi di *A*, compresi quelli banali.

Esempio:

Sia $A = \{a, b, c\}$, l'insieme delle parti di A è dato dall'insieme:

$$\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\big\}$$

Si dimostra che se la cardinalità dell'insieme *A* è *n*, allora il suo insieme delle parti ha cardinalità pari a 2^n, cioè:

$$|A| = n \quad \Longrightarrow \quad |\mathcal{P}(A)| = 2^n$$

PARTIZIONE DI UN INSIEME

Definizione: Si definisce ***partizione*** dell'insieme *A* l'insieme costituito da tutti i sottoinsiemi di *A* che soddisfano le tre condizioni:

- sono tutti insiemi non vuoti;
- sono a due a due disgiunti, cioè ogni elemento di *A* appartiene ad uno solo dei sottoinsiemi;
- l'unioni di tutti i sottoinsiemi è uguale ad *A*.

In simboli avremo che $A_1, A_2, \dots, A_n$ è una partizione dell'insieme A se:

- $A_i \neq \emptyset, \forall i \in \{1,2, \dots, n\}$;
- $A_i \cap A_j = \emptyset, \forall i, j \in \{1,2, \dots, n\}, i \neq j$;
- $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$

Esempio:

Dato l'insieme dei numeri naturali, i sottoinsiemi $\mathbb{P}$ (numeri pari) e $\mathbb{D}$ (numeri dispari), formano una partizione di $\mathbb{N}$.

INSIEMI NUMERICI

NUMERI NATURALI

L'insieme ℕ dei ***numeri naturali*** è dato da:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$$

Ogni numero naturale si costruisce a partire dal primo, lo zero, al quale si aggiunge via via 1. Di conseguenza ogni numero costruito è sempre maggiore di tutti i suoi precedenti e quindi i numeri naturali sono ***ordinati*** tramite una relazione d'ordine, che si rappresenta tramite il simbolo di disuguaglianza $\leq$, o disuguaglianza stretta <.
Il numero naturale $n + 1$, costruito a partire da *n*, si chiama ***successivo*** di *n*, mentre il numero naturale $n - 1$ si chiama ***precedente*** di *n*.
Per i numeri naturali è sempre possibile effettuare il confronto tra due qualsiasi *n*, *m* di essi cioè si verifica uno solo dei seguenti tre casi:

$$n > m, \qquad n < m, \qquad n = m \qquad (\boldsymbol{legge\ di\ tricotomia})$$

L'ordinamento dei numeri naturali ha la caratteristica che ogni numero possiede un immediato successivo: 2 è il successivo di 1, 3 è il successivo di 2, etc. Ciò significa che l'insieme ℕ è ***ordinato in maniera discreta***.

Riassumendo: ℕ è un insieme ***infinito***, ***totalmente ordinato*** e ***discreto***.

Esempi:

$5 \leq 6 \quad ovvero \quad 5 < 6$
$3 \leq 3 \quad ovvero \quad 3 = 3$

LEGGI DI MONOTONIA O DI SEMPLIFICAZIONE

1. $a + c = b + c \quad \Leftrightarrow \quad a = b$
2. $a \cdot c = b \cdot c \ \ e \ \ c \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = b$
3. $a + c < b + c \quad \Leftrightarrow \quad a < b$
4. $a \cdot c < b \cdot c \ \ e \ \ c \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a < b$

ASSIOMI DI PEANO[1]

Sono degli assiomi che riassumono le proprietà che caratterizzano l'insieme dei numeri naturali e furono introdotti da ***Giuseppe Peano*** (*1858-1932*).

1. Esiste un numero $0 \in \mathbb{N}$;
2. Ogni numero naturale ammette un successore;
3. 0 non è successore di nessun numero naturale;
4. Numeri diversi ammettono successori diversi;
5. Ogni insieme di numeri naturali contenente lo zero e il successore di ogni suo elemento coincide con tutto l'insieme dei numeri naturali (principio d'induzione matematica).

In maniera formale scriveremo:

(P1) Esiste un numero $0 \in \mathbb{N}$;
(P2) Esiste una funzione $S\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, detta "*successore*";
(P3) Per ogni $x \in \mathbb{N}$, $S(x) \neq 0$;
(P4) Se $x \neq y$ allora $S(x) \neq S(y)$;
(P5) Se X è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ tale che:
- $0 \in X$
- $x \in X \quad \Longrightarrow \quad S(x) \in X$

allora $X = \mathbb{N}$.

OPERAZIONI IN $\mathbb{N}$

Nell'insieme dei numeri naturali si introducono le seguenti operazioni numeriche:

- Somma: $+\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$;
- Prodotto: $\cdot\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Dalla loro scrittura, si può osservare che le operazioni di somma e prodotto sono operazioni interne all'insieme dei numeri naturali, nel senso che sommando o moltiplicando due qualsiasi numeri di $\mathbb{N}$, si ottiene ancora un elemento di $\mathbb{N}$. Sono operazioni sempre possibili ed a risultato unico, cioè hanno come risultato un ben determinato numero naturale.
Lo stesso non vale per la sottrazione e per la divisione: infatti la sottrazione è interna solamente quando il minuendo è maggiore o uguale al sottraendo, mentre la divisione è interna solo quando il dividendo è un multiplo del divisore.

Per le operazioni di somma e prodotto tra numeri naturali valgono le seguente proprietà:

$$\begin{array}{lll} \textit{commutativa} & a+b=b+a & a\cdot b=b\cdot a \\ \textit{associativa} & a+(b+c)=(a+b)+c & a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c \\ \textit{distributiva}^{2} & a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c & \end{array}$$

[1] Per maggiori informazioni si può consultare l'URL: http://it.wikipedia.org/wiki/Assiomi_di_Peano
[2] della moltiplicazione rispetto all'addizione

La proprietà commutativa permette di scambiare l'ordine degli addendi e dei fattori (non è universalmente valida, infatti se si considera l'insieme delle matrici il prodotto non è commutativo).
La proprietà associativa permette di associare i termini a piacere (e perciò si possono, addirittura, omettere le parentesi e scrivere $a + b + c$ e abc).

La proprietà distributiva consente di mettere in evidenza un fattore comune a più termini di una somma.
Per la moltiplicazione vale, inoltre, la **legge di annullamento del prodotto:**

$$\boldsymbol{a \cdot b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = 0 \quad \vee \quad b = 0}$$

il prodotto è nullo se è nullo almeno uno dei due fattori.

MULTIPLI, SOTTOMULTIPLI, DIVISORI

Consideriamo due numeri naturali m ed n tali che il resto della loro divisione sia zero. Possiamo asserire indistintamente che:

1. m è ***multiplo*** di n;
2. m è ***divisibile*** per n;
3. n è ***divisore*** di m;
4. n ***divide*** m;
5. n è ***sottomultiplo*** di m.

in simboli si scrive che $n|m$.

PROPRIETÀ DELLA DIVISIBILITÀ

1. Se $b|a$ e $a|c$ allora $b|c$ (proprietà transitiva)
2. Se $b|a$ allora $b \leq a$
3. Se $b|a$ e $b|c$ allora $b|(ax + cy)$, per ogni $x, y \in \mathbb{N}$.
4. Se $b|a$ e $b|c$ allora $b|(ax - cy)$, per ogni $x, y \in \mathbb{N}$.

CRITERI DI DIVISIBILITÀ

1. Un numero è divisibile per **2** se termina con una cifra pari
2. Un numero è divisibile per **3** se la somma delle sue cifre è divisibile per 3.
3. Un numero è divisibile per **9** se la somma delle sue cifre è divisibile per 9.
4. Un numero è divisibile per **5** se termina con lo 0 o con il 5.
5. Un numero è divisibile per **25** se termina con 00 o 25 o 50 o 75.
6. Un numero è divisibile per **4** se le ultime due cifre a destra sono due zeri o formano un numero divisibile per 4.
7. Un numero è divisibile per **10**, **100**, **1000**, … se termina con uno, due, tre, … zeri.
8. Un numero è divisibile per **11** quando è divisibile per 11 la differenza tra la somma delle cifre di posto dispari e la somma delle cifre di posto pari.

Definizione: Un numero $p > 1$ si dice ***primo*** se è divisibile solo per se stesso e per l'unità.

TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ARITMETICA: *Ogni numero naturale $n > 1$ si può scrivere in modo unico come prodotto di numeri primi, cioè:*

$$n = p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{k_r}$$

Dimostrazione:

Per dimostrare il teorema è necessario dimostrare che la fattorizzazione del numero n esiste e che essa è unica.

I – Esistenza di una fattorizzazione

Se n è un numero primo, allora la fattorizzazione di esso è data dal numero stesso; se n non è primo, supponiamo che sia fattorizzabile come $n = m_1 \cdot m_2$, con $1 < m_1 < n$ e $1 < m_2 < n$. Se m_1 ed m_2 sono primi, allora il numero n risulta fattorizzato. Se non sono primi (uno di essi o entrambi), allora sono esprimibili come prodotto di fattori maggiori di 1 e minori del numero che fattorizzano. Tale procedimento deve fermarsi dopo un numero finito di passi. Abbiamo quindi dimostrato che esiste una fattorizzazione del numero n.

II – Unicità della fattorizzazione

Supponiamo per assurdo che esistano due fattorizzazioni distinte del numero n e sia p un numero primo che compare nella prima fattorizzazione di n: esso dovrà dividere almeno uno dei fattori della seconda. Ma essi sono fattori primi e quindi l'unica possibilità è quella di trovare p anche nella seconda fattorizzazione. Di conseguenza i fattori primi che sono presenti nella prima fattorizzazione devono comparire anche nella seconda con lo stesso esponente. Infatti, se figurassero con esponente diverso, cioè se nella prima fattorizzazione vi fosse p^t e nella seconda p^s, con $t > s$, semplificando membro a membro per p^s, si otterrebbe un'uguaglianza tra due numeri di cui uno non è divisibile per p mentre l'altro è divisibile per p^{t-s} e ciò è assurdo.

□

TEOREMA DI EUCLIDE: *I numeri primi sono infiniti.*

Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo che esistano un numero finito di numeri primi:

$$p_1, p_2, \ldots, p_n$$

Allora, per il teorema fondamentale dell'aritmetica, il numero

$$m = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$$

si può scrivere come prodotto di numeri primi. Il numero m non è divisibile per nessuno dei numeri primi $p_1, p_2, \ldots, p_n$, in quanto la divisione di m per ciascuno di essi darebbe come resto 1. Di conseguenza il numero m stesso è primo. Possiamo quindi concludere che i numeri primi sono infiniti.

Definizione: Siano a e b due numeri naturali. Un numero $c \in \mathbb{N}$ è un ***divisore comune*** di a e di b se

$$c|a \quad \text{e} \quad c|b$$

Definizione: Il numero naturale D prende il nome di ***massimo comun divisore*** dei numeri naturali a e b, e si indica con $MCD(a,b)$, se:
1. $D|a$ e $D|b$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ tale che $n|a$ e $n|b$, allora $n|D$

ovvero D è un divisore sia di a che di b e qualsiasi divisore comune di a e di b è divisore anche di D.

Massimo Comun Divisore (**M.C.D.**): il più grande tra tutti i divisori comuni ai numeri considerati;

Regola per il calcolo del M.C.D. : Per calcolare il M.C.D. di due o più numeri naturali si scompongono questi ultimi in fattori primi e si moltiplicano tra loro i fattori comuni, considerati una sola volta, con il minore esponente.

Osservazione: Volendo esprimere in maniera formale tale regola, possiamo dire che per calcolare il $MCD(a,b)$, si fattorizzano a e b in fattori primi

$$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots p_r^{n_r} \qquad \text{con } n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$$
$$b = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots p_r^{m_r} \qquad \text{con } m_1, m_2, \dots, m_r \in \mathbb{N}$$

(con l'accortezza che se un fattore primo di un fattore primo di a non compare nella fattorizzazione di b esso viene inserito in tale fattorizzazione con esponente zero, e viceversa), allora:

$$MCD(a,b) = p_1^{s_1} \cdot p_2^{s_2} \cdot \dots p_r^{s_r} \qquad \text{con } s_i = min\{n_i, m_i\}$$

Definizione: Due numeri $a, b \in \mathbb{N}$ si dicono ***primi tra loro o coprimi*** se $MCD(a,b) = 1$.

Definizione: Il numero naturale m prende il nome di ***minimo comune multiplo*** dei numeri naturali a e b, e si indica con $mcm(a,b)$, se:
1. $a|m$ e $b|m$;
2. $\forall n \in \mathbb{N}$ tale che $a|n$ e $b|n$, allora $m|n$

ovvero m è un multiplo sia di a che di b e qualsiasi multiplo comune di a e di b è multiplo anche di m.

Minimo Comune Multiplo (**m.c.m.**): il più piccolo tra i multipli comuni ai numeri considerati.

Regola per il calcolo del m.c.m. : Per calcolare il m.c.m. di due o più numeri naturali si scompongono questi ultimi in fattori primi e si moltiplicano tra loro i fattori comuni e non comuni, considerati una sola volta, con il maggiore esponente.

Osservazione: Volendo esprimere in maniera formale tale regola, possiamo dire che per calcolare il $mcm(a,b)$, si fattorizzano a e b in fattori primi

$a = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot \dots p_r^{n_r}$ con $n_1, n_2, \dots, n_r \in \mathbb{N}$
$b = p_1^{m_1} \cdot p_2^{m_2} \cdot \dots p_r^{m_r}$ con $m_1, m_2, \dots, m_r \in \mathbb{N}$

(con l'accortezza che se un fattore primo di un fattore primo di a non compare nella fattorizzazione di b esso viene inserito in tale fattorizzazione con esponente zero, e viceversa), allora:

$mcm(a, b) = p_1^{t_1} \cdot p_2^{t_2} \cdot \dots p_r^{t_r}$ con $t_i = max\{n_i, m_i\}$

ALGORITMO EUCLIDEO DELLA DIVISIONE

Teorema: *Siano $a, b \in \mathbb{N}$, con $a \geq b$. Esistono e sono unici due numeri naturali q, detto quoziente, ed r, detto resto, tali che:*

$$a = b \cdot q + r$$

con $q \geq 0$ e $0 \leq r < b$. Il procedimento che permette di determinare tali numeri q ed r prende il nome di ***algoritmo euclideo della divisione***.

Teorema: *Siano dati i numeri $a, b \in \mathbb{N}$, con $a \geq b$. Se b è divisore di a, allora b è anche il $M.C.D.(a, b)$; in caso contrario il massimo comun divisore è il minore dei resti non nulli che si ottengono mediante l'algoritmo euclideo delle divisioni successive applicato ai numeri a e b.*

IDENTITÀ DI BÉZOUT

Se $MCD(a, b) = d$ dall'algoritmo euclideo delle divisioni successive si ricava che esistono due numeri $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}$ tali che:

$$d = \lambda a + \mu b \qquad \textbf{(identità di Bézout)}$$

Esempio: Calcolare $MCD(1134, 525)$ e determinare λ e μ nell'identità di Bézout.

Tramite l'algoritmo euclideo otteniamo:

$$1134 = 2 \cdot 525 + 84$$
$$525 = 6 \cdot 84 + 21$$
$$84 = 4 \cdot 21$$

da cui segue che:

$$21 = 525 - 6 \cdot 84 = 525 - 6 \cdot (1134 - 2 \cdot 525) = 13 \cdot 525 - 6 \cdot 1134$$

quindi $\lambda = 13$ e $\mu = -6$.

Osservazione: Di siffatte coppie ne esistono infinite.

NUMERI INTERI $\mathbb{Z}$

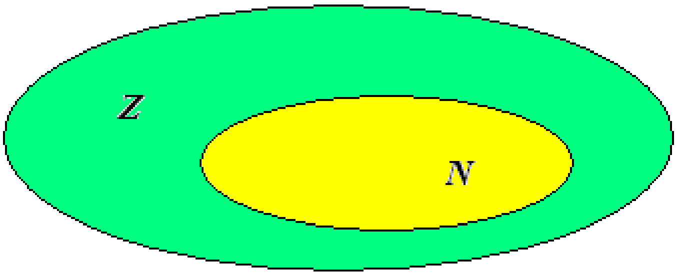
L'insieme $\mathbb{Z}$ dei ***numeri interi*** è dato da:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -z, \dots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, \dots, +z, \dots\}$$

È possibile che tale insieme risulta ripartito nei tre sottoinsiemi:

- $\{0\}$ formato dal solo 0;
- $\mathbb{Z}^- = \{-1, -2, -3, -4, \dots, -z, \dots\}$ formato dai numeri interi negativi;
- $\mathbb{Z}^+ = \{+1, +2, +\ 3+, 4, \dots, +z, \dots\}$ formato dai numeri interi positivi.

In questo modo possiamo vedere i numeri naturali come un sottoinsieme dei numeri interi[3].



Anche l'insieme dei numeri interi è ***infinito*** e ***totalmente ordinato***; inoltre è ***ordinato in modo discreto***. A differenza di $\mathbb{N}$, l'insieme $\mathbb{Z}$ non possiede un ***primo elemento***.

Definizione: Si definisce ***valore assoluto*** di un numero intero relativo z il numero privo di segno e si indica con il simbolo $|z|$.

Nota: Tale definizione è molto grossolana e si preciserà meglio il concetto di valore assoluto in seguito.

OPERAZIONI IN $\mathbb{Z}$

Nell'insieme dei numeri interi si introducono le seguenti operazioni numeriche:

- Somma: $+ : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$;
- Differenza: $- : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$;
- Prodotto: : $\cdot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Dalla loro scrittura, si può osservare che le operazioni di somma, differenza e prodotto sono interne all'insieme dei numeri interi, nel senso che sommando, sottraendo o moltiplicando due qualsiasi numeri relativi, si ottiene ancora un elemento di $\mathbb{Z}$.
Lo stesso non vale per la divisione, che risulta essere interna solo quando il dividendo è un multiplo del divisore.

[3] A meno di isomorfismo.

NUMERI RAZIONALI $\mathbb{Q}$

L'insieme $\mathbb{Q}$ dei ***numeri razionali*** è costituito da:

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0\right\}$$

La scrittura $\frac{m}{n}$ prende il nome di ***frazione***, il termine m si chiama ***numeratore***, mentre il termine n prende il nome di ***denominatore***. Ogni frazione indica la divisione tra i numeri m e n.

Osservazione: Una frazione è nulla se, e soltanto se, il suo numeratore è nullo:

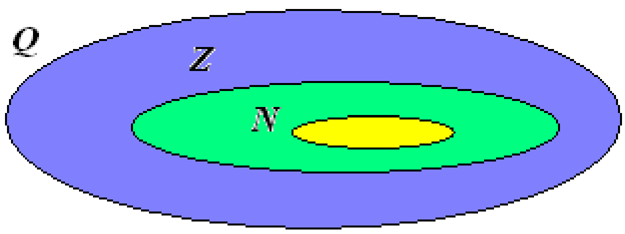
$$0 = \frac{0}{1} = \frac{0}{2} = \cdots$$

<u>Non ha senso parlare di frazioni aventi il denominatore uguale a zero</u>!

<u>**Definizione**</u>: Si definisce ***inversa*** o ***reciproca*** di una frazione non nulla $\frac{a}{b}$ la frazione $\frac{b}{a}$, tale che:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

"L'insieme dei numeri interi è contenuto nell'insieme dei numeri razionali?"



La risposta a tale domanda è molto semplice se si considera che è possibile identificare, a meno di isomorfismo, ogni numero intero m con un numero razionale del tipo $\frac{m}{1}$.

NUMERI DECIMALI

Per *trasformare una frazione in un numero decimale* basta dividere il numeratore per il denominatore. In seguito a questa divisione ci si può trovare di fronte a tre tipologie di numeri:

- un numero *intero*;
- un numero *decimale limitato*;
- un numero *decimale illimitato*.

Esempi:

- $\frac{24}{2} = 12$
- $\frac{1}{2} = 0{,}5$
- $\frac{1}{3} = 0{,}333333\ldots = 0,\overline{3}$

<u>Definizioni</u>: Dato un numero decimale illimitato si definisce ***periodo*** la cifra o l'insieme di cifre che si ripetono regolarmente, si definisce ***antiperiodo*** l'insieme delle cifre che seguono la virgola e precedono il periodo.

Esempio:

Dato il numero periodico $3{,}21\overline{56}$, le cifre 5 e 6 costituiscono il periodo, mentre le cifre 2 e 1 costituiscono l'antiperiodo.

A volte è necessario effettuare l'operazione inversa della precedente, cioè è necessario *trasformare un numero decimale in una frazione*. Tale operazione è differente in base al fatto che ci si trovi davanti un numero decimale limitato o un numero decimale illimitato.

<u>1° caso</u>: *Numero decimale limitato*

In questo caso la trasformazione si effettua scrivendo il numero come somma di frazioni aventi come denominatore delle potenze di dieci, ad esempio:

$$3{,}25 = 3 + \frac{2}{10} + \frac{5}{100} = \frac{300 + 20 + 5}{100} = \frac{325}{100}$$

In generale: al numeratore si riscrive il numero senza la virgola, mentre al denominatore si scrive l'unità seguita da tanti zeri quanti sono le cifre dopo la virgola.

<u>2° caso</u>: *Numero decimale illimitato*

In questo caso la trasformazione avviene seguendo un procedimento diverso, ovvero si avrà una frazione così costituita:

- al *numeratore* si pone la differenza tra tutto il numero scritto senza la virgola e il numero che precede il periodo;
- al *denominatore* si pongono tanti nove quante sono le cifre del periodo e tanti zeri quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Esempio:

$$3{,}21\overline{56} = \frac{32156 - 321}{9900} = \frac{31835}{9900} = \frac{6367}{1980}$$

LE FRAZIONI

Definizione: Due frazioni $\frac{a}{b}$ e $\frac{c}{d}$ si dicono ***equivalenti*** quando esprimono lo stesso rapporto, cioè quando:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

ovvero quando sono uguali i prodotti incrociati, cioè: $ad = cb$.

Esempio:

Le frazioni $\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}$ esprimono tutte lo stesso rapporto, cioè 2.

Definizioni: Una frazione si dice ***propria*** quando il numeratore è minore del denominatore, ***impropria*** quando il numeratore è maggiore del denominatore, ***apparente*** quando il numeratore è uguale al denominatore o è un suo multiplo.

Esempi:

La frazione $\frac{1}{2}$ è una frazione propria; la frazione $\frac{3}{2}$ è una frazione impropria; la frazione $\frac{14}{7}$ è invece apparente.

RIDUZIONE AI MINIMI TERMINI

Per ridurre una frazione $\frac{m}{n}$ ai minimi termini basta dividere sia il numeratore che il denominatore per il $M.C.D.(m,n)$, ottenendo così la nuova frazione irriducibile:

$$\frac{m'}{n'} = \frac{m: M.C.D.(m,n)}{n: M.C.D.(m,n)}$$

SOMMA DI DUE FRAZIONI

Per poter effettuare la somma di due frazioni è necessario *ridurle allo stesso denominatore*. Per fare ciò si calcola il minimo comune multiplo dei denominatori, si divide tale m.c.m. per i vari denominatori e si moltiplicano tali risultati per i numeratori. La somma di quest'ultimo ci dà il numeratore della frazione somma, mentre il m.c.m. è il denominatore della frazione somma.

Esempio:

Vogliamo effettuare la somma: $\frac{1}{2} + \frac{3}{7}$. Schematizziamo di seguito i passi sopra descritti:

- $m.c.m.(2,7) = 14$;
- $12:2 = 7 \qquad 14:7 = 2$;

- $7 \cdot 1 = 7 \qquad 2 \cdot 3 = 6$;
- $\frac{7+6}{14} = \frac{13}{14}$.

CONFRONTO TRA FRAZIONI

Per confrontare due o più frazioni è necessario *ridurle allo stesso denominatore* e confrontare tra loro i numeratori.

Esempio:

Si vogliono confrontare le frazioni $\frac{3}{4}$ e $\frac{1}{7}$. Riducendole allo stesso denominatore otteniamo le frazioni ad esse equivalenti: $\frac{21}{28}$ e $\frac{4}{28}$ ed è semplice stabilire che la prima frazione è maggiore della seconda.

ORDINAMENTO DENSO DI $\mathbb{Q}$

L'insieme dei numeri razionali, così come $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Z}$, è infinito e totalmente ordinato, ma non è discreto, cioè non si può determinare il successivo di un numero razionale.
Ciò si formalizza dicendo che: *dati due numeri razionali è sempre possibile trovare un numero razionale che segue il primo e precede il secondo, ovvero esiste sempre un numero razionale intermedio*.

Tale fatto si esprime dicendo che l'insieme $\mathbb{Q}$ è ***ordinato in maniera densa***.

Esempio:

Date le frazioni $\frac{1}{7}$ e $\frac{3}{4}$ è possibile trovare infinite frazioni fra esse. Una di queste è la loro media aritmetica[4], cioè:

$$\left(\frac{1}{7} + \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{28} \cdot \frac{1}{2} = \frac{25}{56}$$

e quindi si ha che:

$$\frac{1}{7} < \frac{25}{56} < \frac{3}{4}$$

POTENZA CON ESPONENTE NATURALE

Definizione: Si definisce ***potenza*** di base a ed esponente $n \in \mathbb{N}$, la moltiplicazione di a per se stesso n – *volte*, cioè:

$$a^0 = 1$$

[4] Si ricordi che la *media aritmetica* di due numeri x_1 e x_2 è il valore $m = \frac{x_1+x_2}{2}$.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n-volte}$$

Esempi:

a) $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
b) $0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0$
c) $1^2 = 1 \cdot 1 = 1$

Osservazione: In base alla definizione di potenza è semplice capire che se l'esponente è un numero pari, allora la potenza è un numero positivo a prescindere dalla base, in quanto se si moltiplicano un numero pari di fattori negativi si ottiene un prodotto positivo; se l'esponente è dispari, allora la potenza è un numero positivo se la base è positiva, un numero negativo se la base è negativa.

esponente / base	pari	dispari
positiva	+	+
0	0	0
negativa	+	-

PROPRIETÀ DELLE POTENZE

1. ***Il prodotto di due potenze aventi la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la somma degli esponenti***:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

2. ***Il rapporto di due potenze aventi la stessa base è una potenza che ha per base la stessa base e per esponente la differenza degli esponenti***:

$$a^n : a^m = a^{n-m}, \;\; con \;\; a \neq 0$$

3. ***La potenza di una potenza è una potenza avente la stessa base e per esponente il prodotto degli esponenti***:

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

4. ***Il prodotto di due potenze aventi lo stesso esponente e basi diverse è una potenza avente per base il prodotto delle basi e per esponente lo stesso esponente***:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

5. ***Il rapporto di due potenze aventi lo stesso esponente e basi diverse è una potenza avente per base il rapporto delle basi e per esponente lo stesso esponente***:

$$a^n : b^n = (a : b)^n, \;\; con \;\; b \neq 0$$

POTENZA CON ESPONENTE INTERO

Dalle precedenti proprietà delle potenze segue, per esempio, che:

$$5^4 : 5^4 = 5^{4-4} = 5^0 = 1$$

e, generalizzando, si ha:

$$a^0 = 1 \qquad \forall a \in \mathbb{R} - \{0\}.$$

Ci poniamo adesso la seguente domanda:

"Ha senso l'espressione 0^0?"

Per rispondere facciamo riferimento alla proprietà appena utilizzata:

$$0^0 = 0^{m-m} = 0^m : 0^m = 0 : 0$$

e sappiamo bene che non è possibile dividere per zero. Di conseguenza l'espressione è <u>priva di senso</u>.

Effettuiamo adesso la divisione delle potenze 3^2 e 3^4 nei due modi seguenti:

- $3^2 : 3^4 = 3^{2-4} = 3^{-2}$;
- $3^2 : 3^4 = \dfrac{\cancel{3} \cdot \cancel{3}}{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3 \cdot 3} = \dfrac{1}{3^2}$;

dall'uguaglianza otteniamo che:

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2}$$

In generale si ha:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Osservazione: Non è ridondante evidenziare che la scrittura 0^{-n} è priva di significato.

Nel caso di una potenza avente come base una frazione ed esponente negativo si avrà:

$$\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n} = \frac{b^n}{a^n}}$$

<u>Le proprietà delle potenze ad esponente naturale si possono estendere al caso delle potenze ad esponente intero con i dovuti accorgimenti!</u>

RAPPORTI E PROPORZIONI

Definizione: Dicesi ***rapporto*** fra due numeri, preso in un certo ordine, il quoziente della divisione fra il primo di essi e il secondo.

Il rapporto tra i numeri 1 e 2 può essere espresso mediante una delle tre scritture:

$$\frac{1}{2} \qquad 1:2 \qquad 0,5$$

Definizione: Due rapporti si dicono ***uguali*** se hanno lo stesso valore.

Esempio:

I rapporti $14:7$ e $28:14$ sono uguali.

Definizione: Si definisce ***proporzione*** l'uguaglianza di due rapporti, cioè:

$$a:b = c:d$$

Per indicare i termini di una proporzione si indica la seguente terminologia:
- i termini a e c prendono il nome di ***antecedenti***;
- i termini b e d prendono il nome di ***conseguenti***;
- i termini a e d prendono il nome di ***estremi***;
- i termini b e c prendono il nome di ***medi***.

Definizione: Una proporzione si dice ***continua*** se ha i medi uguali e ciascuno dei due medi uguali prende il nome di ***medio proporzionale***.

Esempio: La proporzione $4:6 = 6:9$ è continua e il numero 6 è il medio proporzionale.

PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI

1. **Proprietà fondamentale delle proporzioni**: *in ogni proporzione il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi.*

   Esempio: Nella proporzione $5:10 = 15:30$, il prodotto dei medi è $10 \cdot 15 = 150$, mentre il prodotto degli estremi è $5 \cdot 30 = 150$.

2. **Proprietà dell'invertire**: *in ogni proporzione, se si scambia ogni antecedente con il proprio conseguente, si ottiene ancora una proporzione.*

   Esempio: Nella proporzione $5:10=15:30$ se si applica la proprietà dell'invertire si ottiene l'uguaglianza tra rapporti $10:5=30:15$, che è ancora una proporzione.

3. **Proprietà del permutare**: *in ogni proporzione, se si scambiano fra loro i medi oppure gli estremi, si ottiene ancora una proporzione.*

   Esempio: Nella proporzione $5:10=15:30$ se si applica la proprietà del permutare si ottiene l'uguaglianza tra rapporti $30:10=15:5$, che è ancora una proporzione.

4. **Proprietà del comporre**: *in ogni proporzione la somma del primo e del secondo termine sta al primo (o al secondo) come la somma del terzo e del quarto sta al terzo (o al quarto).*

   Esempio: Nella proporzione $5:10=15:30$ se si applica la proprietà del comporre si ottiene l'uguaglianza tra rapporti $(30+10):10=(15+5):5 \quad \rightarrow \quad 40:10=20:5$, che è ancora una proporzione.

5. **Proprietà dello scomporre**: *in ogni proporzione che ha gli antecedenti maggiori dei conseguenti, la differenza fra il primo e il secondo termine sta al primo (o al secondo) come la differenza fra il terzo e il quarto sta al terzo (o al quarto).*

   Esempio: Nella proporzione $5:10=15:30$ se si applica la proprietà dello scomporre si ottiene l'uguaglianza tra rapporti $(30-10):10=(15-5):5 \quad \rightarrow \quad 20:10=10:5$, che è ancora una proporzione.

ULTERIORI PROPRIETÀ DELLE PROPORZIONI

Proprietà 1: *In una proporzione la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti come ogni antecedente sta al suo conseguente.*

Esempio: Nella proporzione $5:10=15:30$ se si applica la proprietà suddetta si ottiene la nuova proporzione $(5+15):(10+30)=15:30 \quad \rightarrow \quad 20:40=15:30$.

Proprietà 2: *In una proporzione la differenza tra il maggiore e il minore degli antecedenti sta alla differenza tra il maggiore e il minore dei conseguenti come ogni antecedente sta al suo conseguente.*

Esempio: Nella proporzione $5:10=15:30$ se si applica la proprietà suddetta si ottiene la nuova proporzione $(15-5):(30-10)=15:30 \quad \rightarrow \quad 10:20=15:30$.

Proprietà 3: *Moltiplicando due o più proporzioni termine a termine, si ottiene una nuova proporzione.*

Esempio: Date le proporzioni $5:10=15:30$ e $14:2=21:3$ se si applica la proprietà suddetta si ottiene la nuova proporzione $(5\cdot 14):(10\cdot 2)=(15\cdot 21):(30\cdot 3) \quad \rightarrow \quad 70:20=315:90$.

Esercizio: *Scomporre il numero 120 in parti che stiano fra loro come i numeri 3, 4, 5.*

Indichiamo con *x*, *y* e *z* le tre parti da determinare, si ha:

$$x:3=y:4=z:5$$

Applicando la proprietà:

"*in una serie di rapporti uguali la somma degli antecedenti sta alla somma dei conseguenti, come un antecedente qualunque sta al proprio conseguente*",

si ottengono le proporzioni:

$$(x+y+z):(3+4+5) = x:3$$
$$(x+y+z):(3+4+5) = y:4$$
$$(x+y+z):(3+4+5) = z:5$$

Essendo $x+y+z=120$, si avrà:

$$120:12 = x:3 \quad \rightarrow \quad x = \frac{120 \cdot 3}{12} = 30$$

$$120:12 = y:4 \quad \rightarrow \quad y = \frac{120 \cdot 4}{12} = 40$$

$$120:12 = z:5 \quad \rightarrow \quad z = \frac{120 \cdot 5}{12} = 50$$

CALCOLO DEL TERMINE INCOGNITO

Data una proporzione contenente un termine incognito è possibile calcolarlo mediante la proprietà fondamentale delle proporzioni. Infatti:

- se **il termine incognito è un medio** basta dividere il prodotto degli estremi per il medio noto, cioè:

$$a:b = x:c \quad \rightarrow \quad x = \frac{ac}{b}$$

- se **il termine incognito è un estremo** basta dividere il prodotto dei medi per l'estremo noto, cioè:

$$a:b = c:x \quad \rightarrow \quad x = \frac{bc}{a}$$

- se **il termine incognito è il medio proporzionale** basta calcolare la radice quadrata del prodotto degli estremi, cioè:

$$a:x = x:b \quad \rightarrow \quad x = \sqrt{ab}$$

NUMERI PERCENTUALI

<u>**Definizione**</u>: Si dice ***numero percentuale*** un numero che viene riferito al valore fisso 100 ed in genere si indica facendolo seguire dal simbolo %, che si legge «*percento*».

Per *trasformare un numero percentuale in un numero decimale* basta dividere il numero per 100, per esempio:

$$12{,}3\% = \frac{12{,}3}{100} = 0{,}123$$

Se invece si vuole trasformare un *numero decimale in un numero percentuale* basta riscrivere la frazione con 100 a denominatore. Ad esempio:

$$0{,}12 = 0{,}12\frac{100}{100} = \frac{12}{100} = 12\%$$

Esempio: Il prezzo di un maglione è di 125€ e in periodo di saldi viene applicato uno sconto del 30%. Qual è il prezzo scontato del maglione?

Calcoliamo lo sconto applicato sul prezzo del maglione mediante la proporzione:

$$30:100 = x:125$$

da cui ricaviamo:

$$x = \frac{125 \cdot 30}{100} = 37{,}5€$$

Di conseguenza il prezzo scontato è 87,5€.

GRANDEZZE DIRETTAMENTE PROPORZIONALI E INVERSAMENTE PROPORZIONALI

Si consideri il perimetro di un triangolo equilatero e sappiamo che esso varia al variare della lunghezza del suo lato. Se si indica con l la lunghezza del lato del triangolo, allora il perimetro è dato dalla relazione:

$$P = 3l$$

È possibile notare che se raddoppia il lato, raddoppia anche il perimetro; se si triplica il lato, allora triplica anche il perimetro; etc.

Lato (l)	0,5	1	1,5	2,4	3,1	4,4
Perimetro (P)	1,5	3	4,5	7,2	9,3	13,2
Rapporto (P/l)	3	3	3	3	3	3

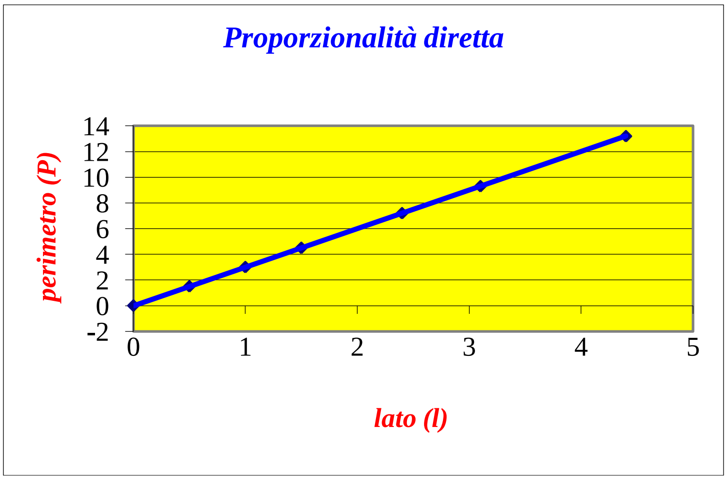
Definizione: Due grandezze x e y si dicono ***direttamente proporzionali*** se il loro rapporto è costante, cioè:

$$\frac{y}{x} = k\,, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo:

$$y = kx\,, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da una retta che passa per l'origine di un sistema di assi cartesiani ortogonali.



Consideriamo adesso un gas ideale e siano p e V la sua pressione e il suo volume. L'esperienza mette in evidenza il fatto che all'aumentare del volume diminuisce la pressione. Ciò significa che se il volume raddoppia la pressione dimezza, mentre se il volume dimezza la pressione raddoppia.

Volume (V)	0,5	1	1,5	2,4	3,1	4,4
Pressione (P)	4	2	1,333333	0,833333	0,645161	0,454545
Prodotto (P·V)	2	2	2	2	2	2

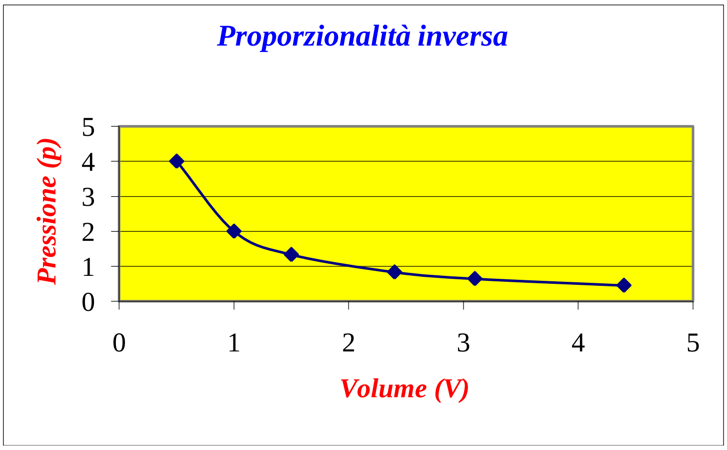
Definizione: Due grandezze x e y si dicono ***inversamente proporzionali*** se il loro prodotto è costante, cioè:

$$x \cdot y = k\,, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

In generale, da quest'ultima scrittura, possiamo dedurre che una proporzionalità diretta è espressa da una formula del tipo:

$$y = \frac{k}{x}\,, \quad \text{con } k \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Graficamente un tale tipo di proporzionalità è rappresentato da un ramo d'iperbole in un sistema di assi cartesiani ortogonali.



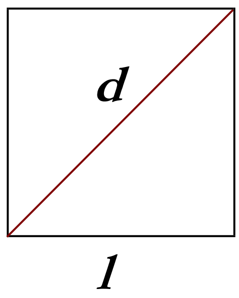
NUMERI REALI

La necessità di introdurre i numeri reali nasce dall'esigenza di poter risolvere equazioni del tipo:

$$x^2 = 2$$

Anticamente si pensava che tutti i segmenti fossero *commensurabili*, cioè che il rapporto tra le lunghezze di due segmenti qualsiasi fosse esprimibile mediante un numero razionale. Tale concezione entrò in crisi quando i Greci si accorsero del fatto che il rapporto tra la lunghezza della diagonale di un quadrato e la lunghezza del suo lato non è esprimibile mediante un numero razionale, bensì:

$$\frac{d}{l} = \sqrt{2}$$



I *Pitagorici* dimostrarono che il numero $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$, cioè che non esiste alcun numero il cui quadrato è pari a 2.

Proposizione: *Il numero $\sqrt{2}$ non è razionale.*

Dimostrazione:

Per dimostrare la proposizione si procederà per assurdo. Si supponga infatti che $\sqrt{2}$ sia un numero razionale, di conseguenza si potrà esprimere mediante una frazione:

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

in cui $n \neq 1$ e $M.C.D.(m, n) = 1$, ovvero si suppone che la frazione sia ridotta ai minimi termini. Eleviamo al quadrato ambo i membri della precedente relazione:

$$2 = \frac{m^2}{n^2}$$

e si avrà che i fattori che compaiono in n^2 e in m^2 sono gli stessi di quelli che compaiono in m e in n, ma hanno esponente due. Di conseguenza la frazione non si può semplificare, perché non vi sono fattori comuni fra m ed n e di conseguenza non può essere equivalente ad un numero intero (nel nostro caso 2). Di conseguenza sarà:

$$\sqrt{2} \neq \frac{m}{n}$$

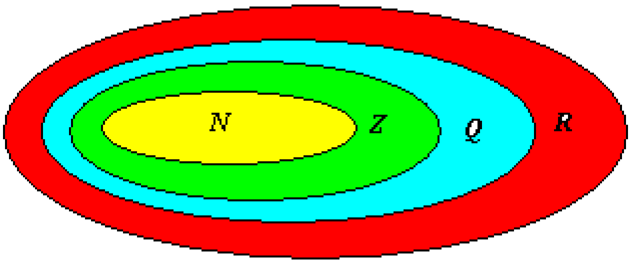
<u>Definizione</u>: L'insieme dei numeri che non sono razionali prende il nome di insieme dei ***numeri irrazionali*** e si indica con il simbolo $\mathbb{Q}^c$.

Nell'insieme dei numeri irrazionali si opera la distinzione tra numeri ***algebrici*** e numeri ***trascendenti***. In generale i primi sono quelli che si ottengono tramite una combinazione di operazioni algebriche, tra le quali l'estrazione di radice, mentre i secondi non si possono ottenere come appena detto, quindi trascendono (cioè "vanno oltre") l'algebra.

Esempi:

Sono irrazionali i seguenti numeri: $\log 2,\ \pi,\ e$.

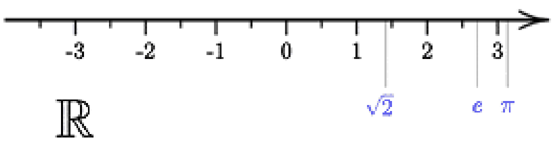
<u>Definizione</u>: L'unione dell'insieme dei numeri razionali e dell'insieme dei numeri irrazionali prende il nome di insieme dei ***numeri reali*** e si indica con il simbolo $\mathbb{R}$.



CARATTERISTICHE DI $\mathbb{R}$

L'insieme dei numeri reali risulta essere un'estensione dell'insieme dei numeri razionali. È anch'esso un insieme ***infinito*** e ***totalmente ordinato***; inoltre è ***denso*** come $\mathbb{Q}$, ma rispetto a quest'ultimo completa la retta. Per tale ragione quando si rappresentano i numeri reali si parla spesso di "*retta reale*".

Tale identificazione è lecita in quanto esiste una corrispondenza biunivoca tra l'insieme dei numeri reali e l'insieme dei punti appartenenti ad una retta orientata, intendendo per retta orientata quella retta in cui è stato fissato un verso di percorrenza.



VALORE ASSOLUTO E PROPRIETÀ

Definizione: Si dice ***valore assoluto*** del numero reale a, e si indica con $|a|$, il numero stesso se a è positivo o nullo, il suo opposto se a è negativo:

$$|a| = \begin{cases} a & se\ a \geq 0 \\ -a & se\ a < 0 \end{cases}$$

Il valore assoluto di un numero gode delle seguenti proprietà:

1. $|x| \geq 0 \ \ e \ \ |x| = 0$ se, e solo se $x = 0$
2. $|x| = |-x| \qquad \forall x \in \mathbb{R}$
3. $|x + y| \leq |x| + |y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
4. $\big||x| - |y|\big| \leq |x - y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
5. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y| \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
6. $\left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} \qquad \forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$

Esempio:

Calcolare il valore assoluto del numero $2 - \sqrt{5}$.

Poiché $\sqrt{5} > 2$, allora $2 - \sqrt{5} < 0$, di conseguenza $\left|2 - \sqrt{5}\right| = -\left(2 - \sqrt{5}\right) = -2 + \sqrt{5}$.

Osservazione: Un classico errore è quello di scrivere $|-x| = x$. Ma x può assumere il valore di qualunque numero, positivo o negativo. Per questo motivo non è vero, in generale, che $|-x| = x$. In effetti risulta:

$$|-x| = \begin{cases} -x & se\ -x \geq 0 \ \rightarrow \ x \leq 0 \\ -(-x) & se\ -x < 0 \ \rightarrow \ x > 0 \end{cases}$$

Esempio: *Calcolare* $\sqrt{(1-x)^2}$.

$$\sqrt{(1-x)^2} = |1 - x| = \begin{cases} 1 - x & se\ \ 1 - x \geq 0, cioè\ \ x \leq 1 \\ -(1 - x) & se\ \ 1 - x < 0, cioè\ \ x \geq 1 \end{cases}$$

Osservazione: **Attenzione**! Se si chiede si "*Calcolare* $\sqrt{4^2}$ *oppure* $\sqrt{(-2)^2}$" non è corretto semplificare la radice quadrata con il quadrato del radicando, perché mentre nel primo caso $\sqrt{4^2} = 4$ nel secondo caso, seguendo la stessa logica, si giunge all'errore $\sqrt{(-2)^2} = -2$.
Il risultato ottenuto è sbagliato, perché sappiamo che la radice quadrata di un numero positivo è sempre positiva (o nulla).
Seguendo l'espressione esatta $\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & se\ a \geq 0 \\ -a & se\ a < 0 \end{cases}$ è corretto scrivere:

$$\sqrt{4^2} = |4| = +(+2) = 2 \ \text{ e } \ \sqrt{(-2)^2} = |-2| = -(-2) = 2.$$