PRECORSO DI MATEMATICA

III Lezione

"CALCOLO LETTERALE"

E. Modica
matematica@blogscuola.it
www.matematica.blogscuola.it

MONOMI

In una formula si dicono ***variabili*** le lettere alle quali può essere sostituito qualsiasi valore numerico; i numeri prendono, invece, il nome di ***costanti***.

Esempio:

Nella formula per il calcolo della lunghezza della circonferenza $C = 2\pi \cdot r$ le costanti sono i numeri 2 e π, r è detta ***variabile indipendente*** perché può assumere un valore numerico mentre *C* è una ***variabile dipendente*** perché il suo valore numerico dipende da quello assunto da *R*.

Definizione: Dicesi ***monomio*** un'espressione che possa essere rappresentata come moltiplicazione tra numeri e lettere.

Ogni monomio è costituito da un ***coefficiente numerico*** e da una ***parte letterale***.

Esempio:

Nel monomio $-5x^2y$ il numero -5 rappresenta il coefficiente numerico, mentre x^2y è la parte letterale.

Definizione: Due monomi si dicono ***simili*** se hanno la stessa parte letterale.

Esempio: I monomi $-5x^2y$ e $-\frac{3}{4}x^2y$ sono simili.

Definizione: Si dice ***grado complessivo*** di un monomio la somma degli esponenti di tutte le variabili che compaiono nella parte letterale.

Esempio: Il grado del monomio $-5x^2y$ è 3.

ATTENZIONE!!! **Non sono monomi le espressioni:**	**MOTIVAZIONE**
$\sqrt{ab^2},\ 3cb^{\frac{2}{3}}, \dots$	I monomi si costruiscono con un numero finito di moltiplicazioni: *gli esponenti della parte letterale di un monomio sono numeri naturali*
$\frac{2a^2b}{b^2}, 3cb^{-3}, \dots$	Come sopra. Infatti l'esponente è negativo (non è un numero naturale) ***Oss:*** Ciò implica che *nell'insieme dei monomi* ***non*** *è definita la divisione*.
$2a^2b + 3ab^2, \dots$	Perché le parti letterali non sono identiche, quando lo sono si dice, appunto, che i **monomi** sono **simili** e la loro somma (somma dei coefficienti) è un monomio. ***Es***: $2a^2b + 3a^2b = 5a^2b$ è ancora un monomio.

<u>Definizione</u>: Due monomi si dicono ***opposti*** se hanno le parti letterali uguali e i coefficienti numerici opposti.

Esempio:

I monomi $-5x^2y$ e $5x^2y$ sono opposti.

OPERAZIONI CON I MONOMI

SOMMA DI MONOMI

<u>Definizione</u>: La ***somma*** di due monomi simili è un monomio simile a quelli dati che ha per coefficiente numerico la somma algebrica dei coefficienti numerici e per parte letterale la parte letterale degli addendi.

La somma tra monomi gode delle proprietà:
- commutativa;
- associativa;
- 0 è l'elemento neutro rispetto alla somma;
- ogni monomio ammette opposto.

Esempio:

Il monomio somma dei monomi $\frac{1}{2}x^2z$ e $-\frac{1}{3}x^2z$ è il monomio $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x^2z = \frac{1}{6}x^2z$.

PRODOTTO DI MONOMI

A differenza della somma, è sempre possibile moltiplicare due monomi.

<u>Definizione</u>: Il ***prodotto*** di due monomi è un monomio che ha per coefficiente numerico il prodotto dei coefficienti numerici e per parte letterale il prodotto delle parti letterali.

Esempio:

Il monomio prodotto dei monomi $\frac{5}{2}x^2z$ e $-\frac{2}{3}x^2z^2y$ è il monomio $-\frac{5}{3}x^4z^3y$.

La moltiplicazione tra monomi gode delle proprietà:

- commutativa;
- associativa;
- 1 è l'elemento neutro rispetto al prodotto.

"Perché nell'insieme dei monomi non è possibile definire una divisione?"

Per rispondere alla precedente domanda basta osservare che, quando trattiamo con i numeri reali, definiamo la divisione tra due numeri a e b (con $b \neq 0$), come il prodotto del primo per l'inverso del secondo, cioè:

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}$$

L'inverso di un monomio non sempre è un monomio, in quanto si possono presentare, nella parte letterale, dei termini ad esponente negativo.

POTENZA DI MONOMI

Nell'insieme dei monomi è possibile effettuare l'elevazione a potenza con esponente naturale.

Definizione: La ***potenza***, con esponente naturale, di un monomio è un monomio che ha come coefficiente numerico la potenza del coefficiente numerico e come parte letterale la potenza della parte letterale.

Esempio: La terza potenza del monomio $\frac{3}{2}x^3y^2z^2$ è il monomio $\left(\frac{3}{2}x^3y^2z^2\right)^3 = \frac{27}{8}x^9y^6z^6$.

M.C.D. E m.c.m. DI MONOMI

Nell'insieme dei monomi è possibile definire il concetto di multiplo.

Definizione: Dati due monomi A e B diremo che A è ***multiplo*** di B se esiste un monomio C tale che $A = B \cdot C$. Il monomio B prende il nome di ***divisore*** di A.

Osservazione: Per stabilire se il monomio A è multiplo del monomio B basta stabilire se il coefficiente numerico di A è multiplo di quello di B e se gli esponenti delle lettere che compaiono nella parte letterale di A sono maggiori o uguali a quelli delle corrispondenti lettere che compaiono nella parte letterale del monomio B.

Definizione: Il ***massimo comun divisore*** (***M.C.D.***) di due o più monomi è il massimo tra tutti i divisori comuni dei monomi considerati e si ottiene moltiplicando tra loro i fattori comuni a tutti i monomi, ciascuno preso una sola volta, col minore esponente.

Esempio: *Determinare il M.C.D. dei monomi* $12x^2yz^2t; 4x^3y^2z; 2xy^4z^3t^2$.

Il massimo comun divisore dei coefficienti numerici è 2, mentre la parte letterale del monomio cercato è xyz.

Definizione: Due monomi sono ***primi tra loro*** se il loro massimo comun divisore è 1.

Esempio: I monomi $7x^3y$ e $5zt^2$ sono primi tra loro.

Osservazione: Due monomi primi tra loro sono tali che i loro coefficienti numerici siano primi tra loro e non abbiano alcuna lettera in comune.

Definizione: Il ***minimo comune multiplo*** (**m.c.m.**) di due o più monomi è il minimo tra tutti i multipli comuni dei monomi considerati e si ottiene moltiplicando tra loro i fattori comuni e non comuni a tutti i monomi, ciascuno preso una sola volta, col maggiore esponente.

Esempio: *Determinare il m.c.m. dei monomi* $12x^2yz^2t; 4x^3y^2z; 2xy^4z^3t^2$.

Il minimo comune multiplo dei coefficienti numerici è 12, mentre la parte letterale del monomio cercato è $x^3y^4z^3t^2$.

POLINOMI

Definizione: Dicesi ***polinomio*** un'espressione algebrica formata dalla somma algebrica di due o più monomi, detti *termini* del polinomio.

Esempi:

Le espressioni

$$2\sqrt{3}ab^2 - \frac{5}{7}b^2c + e^{-1}ab \quad \text{e} \quad -\sqrt{\pi}a^2 + \frac{3}{e}b^2$$

sono tutti polinomi (si ricordi che le lettere e e π indicano dei numeri irrazionali e quindi sono costanti e non variabili).

Definizione: Dicesi ***grado di un polinomio*** il massimo tra i gradi dei singoli monomi che lo compongono.

Esempio:

Il polinomio $\frac{1}{2}x^2z^3 + 5xz^2 + \frac{3}{4}xt$ ha grado 5.

Definizione: Un polinomio si dice ***omogeneo*** se tutti i suoi monomi hanno lo stesso grado.

Esempio:

Il polinomio $\frac{1}{2}x^2z^3+5x^3z^2+\frac{3}{4}xt^4$ è omogeneo di grado 5.

<u>Principio d'identità dei polinomi</u>: *Dati due polinomi $p(x)$ e $q(x)$ essi sono uguali se, e solo se, sono uguali i coefficienti dei termini simili.*

Le operazioni possibili nell'insieme dei polinomi sono:

- l'addizione,
- la sottrazione,
- la moltiplicazione,
- l'elevazione a potenza con esponente naturale.

OPERAZIONI CON I POLINOMI

SOMMA DI POLINOMI

<u>Definizione</u>: La ***somma*** di due polinomi è il polinomio che si ottiene scrivendo, dopo i termini del primo polinomio, i termini del secondo, ciascuno con il proprio segno.

Esempio: Sommare i polinomi $p(x)=2x^3+4x^2-3$ e $q(x)=-\frac{1}{2}x^3+x^2-4$.
Il polinomio somma è dato da:

$$p(x)+q(x)=\frac{3}{2}x^3+5x^2-7$$

La somma tra polinomi gode delle proprietà:

- commutativa;
- associativa;
- 0 è l'elemento neutro rispetto alla somma;
- ogni polinomio ammette opposto.

PRODOTTO DI UN MONOMIO PER UN POLINOMIO

<u>Definizione</u>: Il ***prodotto di un monomio per un polinomio*** è il polinomio che si ottiene moltiplicando tutti i termini del polinomio per il monomio.

Esempio:

Il prodotto del monomio $\frac{5}{2}x^2z$ per il polinomio $-\frac{2}{3}x^2z^2y-\frac{5}{3}x^4z^3y$ è dato da:

$$\frac{5}{2}x^2z\cdot\left(-\frac{2}{3}x^2z^2y-\frac{5}{3}x^4z^3y\right)=-\frac{5}{3}x^4z^3y-\frac{25}{6}x^6z^4y$$

PRODOTTO DI DUE POLINOMI

<u>Definizione</u>: Il ***prodotto di due polinomi*** è il polinomio che si ottiene moltiplicando tutti i termini del primo polinomio per ogni termine del secondo.

Esempio:

Il prodotto del polinomio $\frac{5}{2}x^2z+\frac{1}{2}x$ per il polinomio $-\frac{2}{3}x^2z^2y-\frac{5}{3}x^4z^3y$ è dato da:

$$\left(\frac{5}{2}x^2z+\frac{1}{2}x\right)\cdot\left(-\frac{2}{3}x^2z^2y-\frac{5}{3}x^4z^3y\right)=-\frac{5}{3}x^4z^3y-\frac{25}{6}x^6z^4y-\frac{1}{3}x^3z^2y-\frac{5}{6}x^5z^3y$$

PRODOTTI NOTEVOLI

Sono moltiplicazioni di polinomi che danno luogo a risultati ottenibili in modo semplice e rapido e facilmente ricordabili.

1° QUADRATO DI UN BINOMIO

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\mathbf{2}}=(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}+\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ba}+\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}=\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}+\mathbf{2}\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}$$

Il quadrato di un binomio è uguale alla somma tra il quadrato del primo monomio, il quadrato del secondo e il doppio prodotto del primo per il secondo.

Esempio: $(2x+3y)^2=(2x)^2+2\cdot(2x)\cdot(3y)+(3y)^2=4x^2+12xy+9y^2$

2° DIFFERENZA DI DUE QUADRATI

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})=\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{ab}+\boldsymbol{ba}-\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}=\boldsymbol{a}^{\mathbf{2}}-\boldsymbol{b}^{\mathbf{2}}$$

Il prodotto della somma di due monomi per la loro differenza è uguale alla differenza tra il quadrato del primo monomio e il quadrato del secondo monomio.

Esempi:

1. $(3a^2+5ab)\cdot(3a^2-5ab)=9a^4-25a^2b^2$
2. $(a+b+2c)\cdot(a+b-2c)=[(a+b)+2c]\cdot[(a+b)-2c]=(a+b)^2-(2c)^2=a^2+2ab+b^2-4c^2$

3° Cubo di un Binomio

$$\boldsymbol{(a+b)^3 = (a+b)^2 \cdot (a+b) = (a^2+2ab+b^2)\cdot(a+b)}$$
$$\boldsymbol{= a^3 + a^2b + 2a^2b + 2ab^2 + ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

Il cubo di un binomio è uguale alla somma tra il cubo del primo monomio che costituisce il binomio, il triplo prodotto del quadrato del primo monomio per il secondo, il triplo prodotto del quadrato del secondo monomio per il primo e il cubo del secondo monomio.

Esempio: $(2a+b^2)^3 = (2a)^3 + 3\cdot(2a)^2\cdot b^2 + 3\cdot(2a)\cdot(b^2)^2 + (b^2)^3 = 8a^3 + 12a^2b^2 + 6ab^4 + b^6$

4° Somma e differenza di cubi

$$\boldsymbol{a^3 + b^3 = (a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2)}$$
$$\boldsymbol{a^3 - b^3 = (a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2)}$$

La somma di due cubi è uguale al prodotto della somma delle basi per il trinomio formato dal quadrato della prima base, dall'opposto del prodotto delle basi e dal quadrato della seconda base.

La differenza di due cubi è uguale al prodotto della differenza delle basi per il trinomio formato dal quadrato della prima base, dal prodotto delle basi e dal quadrato della seconda base.

Esempi:

1. $8x^3 + 27y^3 = (2x+3y)\cdot(4y^2 - 6xy + 9y^2)$
2. $27x^6 - y^3 = (3x^2 - y)\cdot(9x^4 + 3x^2y + y^2)$

5° TRIANGOLO DI TARTAGLIA O DI PASCAL

I coefficienti delle successive potenze del binomio $\boldsymbol{a+b}$ si possono trovare mediante il cosiddetto *triangolo di Tartaglia*:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

La legge di formazione del triangolo è semplice: i numeri di ciascuna riga (tranne il primo e l'ultimo che sono uguali a uno) sono la somma di quelli soprastanti della riga precedente.

DIVISIONE DI POLINOMI

La divisione tra polinomi in generale è una frazione algebrica e quindi non è un polinomio. Tuttavia è possibile definire la ***divisione intera*** ossia la divisione tra due polinomi $A(x)$ e $B(x)$ in cui si ottiene un quoziente $Q(x)$ e un resto $R(x)$. Se il resto è nullo, $R = 0$, si dice che il polinomio $A(x)$ è ***divisibile*** per il polinomio $B(x)$.

DIVISIONE TRA POLINOMI IN UNA VARIABILE

L'algoritmo della divisione tra polinomi è analogo a quello della divisione ordinaria tra numeri: le cifre di un numero intero, nella forma decimale, rappresentano i coefficienti, di potenze di 10 (base della numerazione), ad esempio il numero 7345 può essere scritto come:

$$7345 = 7 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$$

Allo stesso modo dati due polinomi $A(x)$, dividendo, e $B(x)$, divisore, ci proponiamo di determinare altri due polinomi $Q(x)$, ***quoziente***, e $R(x)$, ***resto***, tali che:

$$A(x) = Q(x) \cdot B(x) + R(x)$$

ALGORITMO DELLA DIVISIONE TRA $A(x)$ **e** $B(x)$	ESEMPIO: Siano $A(x) = -7 + 6x^3 + 14x^2$ e $B(x) = -5 + 2x^2$
1. Si ordinano $A(x)$ e $B(x)$ rispetto alle potenze decrescenti della lettera x, e tali che il grado del secondo polinomio sia minore o uguale a quello del primo, inoltre, si completano $A(x)$ e $B(x)$ dei termini eventualmente mancanti come nella configurazione a fianco.	$\begin{array}{l\|l} 6x^3+14x^2+0x-7 & 2x^2-5 \\ \hline & \end{array}$
2. Si divide il primo termine di $A(x)$, ossia $6x^3$ per il primo monomio di $B(x)$, cioè $2x^2$, e si ripone il **primo termine del quoziente** ottenuto, $3x$, nel posto consueto.	$\begin{array}{l\|l} 6x^3+14x^2+0x-7 & 2x^2-5 \\ \hline & 3x \end{array}$
3. Si moltiplica $3x$ per ciascun termine del divisore e si scrivono i risultati ottenuti, con il segno cambiato, ben incolonnati sotto i monomi simili del dividendo poi si esegue l'addizione algebrica così come a fianco.	$\begin{array}{l\|l} 6x^3+14x^2+0x-7 & 2x^2-5 \\ \hline -6x^3 \qquad +15x & 3x \\ \hline // \quad +14x^2+15x-7 & \end{array}$

4. Il polinomio ottenuto, detto **resto parziale** è il nuovo polinomio dividendo. Ripetendo il procedimento appena descritto fino al momento in cui il grado del resto diventi minore di quello del divisore, si porta a completamento la divisione proposta.	$\begin{array}{r\|l} 6x^3+14x^2+0x-7 & 2x^2-5 \\ \cline{2-2} -6x^3 \qquad +15x \quad & 3x+7 \\ \hline // \; +14x^2+15x-7 & \\ -14x^2 \qquad +35 & \\ \hline // \qquad 15x+28 & \end{array}$
5. La divisione tra polinomi ha dato i polinomi $Q(x)$, quoziente, e $R(x)$, resto.	$Q(x)=3x+7$ e $R(x)=15x+28$
6. La verifica che essi soddisfano alla **proprietà fondamentale della divisione** ci consente di affermare che l'operazione di divisione è stata svolta correttamente.	$A(x)=Q(x)\cdot B(x)+R(x)$ $6x^3+14x^2-7=(3x+7)\cdot(2x^2-5)+15x+28$

REGOLA DI RUFFINI

Si tratta di un algoritmo semplificato che si può usare se il divisore è un polinomio di primo grado del tipo $\boldsymbol{x-b}$. Se il divisore è un polinomio del tipo $\boldsymbol{ax-b}$, basta dividere sia il dividendo che il divisore per *a* (proprietà invariantiva della divisione), in tal caso anche il resto della divisione risulterà diviso per *a*.

Divisione tra $A(x)$ e $B(x)=x-b$ **secondo la regola di Ruffini**	Esempio: **Siano $A(x)=1+5x^3-3x$ e $B(x)=x-2$**
1. Si dispongono i coefficienti del dividendo $A(x)$, ordinati rispetto alle potenze decrescenti della lettera x (i termini eventualmente mancanti hanno coefficiente uguale a 0) come nella configurazione a fianco;	$\begin{array}{r\|ccc\|c} & +5 & 0 & -3 & +1 \\ b\mapsto +2 & & & & \\ \hline & & & & \end{array}$ ← Termine noto del dividendo
2. Si abbassa il 1° termine di $A(x)$, ossia $+5$, al di sotto della linea orizzontale;	$\begin{array}{r\|ccc\|c} & +5 & 0 & -3 & +1 \\ +2 & \downarrow & & & \\ \hline & +5 & & & \end{array}$
3. Si moltiplica $b=+2$ per questo 1° coefficiente $+5$, e il prodotto ottenuto (+10) si scrive sotto il 2° coefficiente del dividendo (0) al di sopra della linea orizzontale;	$\begin{array}{r\|ccc\|c} & +5 & 0 & -3 & +1 \\ +2 & & +10 & & \\ \hline & +5 & & & \end{array}$
4. poi si esegue l'addizione tra il 2° coefficiente (0) con il prodotto appena calcolato (+10) e si scrive la somma ottenuta al di sotto della linea orizzontale così come a fianco;	$\begin{array}{r\|ccc\|c} & +5 & 0 & -3 & +1 \\ +2 & & +10 & & \\ \hline & +5 & +10 & & \end{array}$

5. Si moltiplica nuovamente tale somma per $b=+2$ e si ripetono ciclicamente le istruzioni precedenti fino a completare il prospetto numerico di Ruffini.	$\begin{array}{c\|ccc\|l} & +5 & 0 & -3 & +1 \\ +2 & & +10 & +20 & +34 \\ \hline & \boxed{+5 \quad +10 \quad +17} & & & +35 \leftarrow \text{resto} \end{array}$ ↑ Coefficienti del quoziente
6. La divisione tra polinomi ha dato i polinomi $Q(x)$, quoziente, e R.	$Q(x)=5x^2+10x+17$ e $R=+35$
7. La verifica che essi soddisfano alla **proprietà fondamentale della divisione** ci consente di affermare che l'operazione di divisione è stata svolta correttamente.	$A(x)=Q(x)\cdot(x-b)+R$ $5x^3-3x+1=(5x^2+10x+17)(x-2)+35$

È possibile calcolare il resto R della divisione $\boldsymbol{A(x)=Q(x)\cdot(x-b)+R}$, senza eseguire la divisione:

<u>Teorema del resto</u>: *Il resto* $\boldsymbol{R}$ *della divisione del polinomio* $\boldsymbol{A(x)}$ *per il binomio* $\boldsymbol{x-b}$ *è uguale al valore che il polinomio* $\boldsymbol{A(x)}$ *assume quando al posto della variabile x si sostituisce il numero b, cioè:*

$$R=A(b)$$

Dimostrazione:

Effettuando la divisione tra i polinomi $A(x)$ e $x-b$ si ottiene:

$$\boldsymbol{A(x)=Q(x)\cdot(x-b)+R}$$

con $\partial R(x)<\partial(x-b)$[1].
Essendo il grado di $x-b$ pari a 1, allora $\partial R(x)=0$, cioè $R(x)$ è una costante e la possiamo indicare semplicemente con R.
Sostituendo al posto della variabile il valore b si ottiene:

$$A(b)=\underbrace{(b-b)}_{=0}\cdot Q(b)+R \qquad \Longrightarrow \qquad A(b)=R$$

□

Esempio:

Per la divisione effettuata in precedenza si ha:

$$R=A(2)=5\cdot 2^3-3\cdot 2+1=40-6+1=35$$

[1] Il simbolo $\partial p(x)$ indica il grado del polinomio $p(x)$.

LA SCOMPOSIZIONE DI UN POLINOMIO IN FATTORI IRRIDUCIBILI

METODO DI SCOMPOSIZIONE	ESEMPIO
Raccoglimento a fattor comune o totale $\boldsymbol{ka + kb = k(a+b)}$	Dato il polinomio: $7x(x+y) - x(x+y)^2$ Si ha: $k = x(x+y)$, $a = 7$ e $b = -(a+b)$ e di conseguenza il polinomio si scompone come: $7x(x+y) - x(x+y)^2 = x(x+y) \cdot [7-(x+y)]$ $= x(x+y) \cdot (7-x-y)$
Raccoglimento parziale può accadere che raccogliendo fattori comuni solo ad alcuni monomi si riesca in un secondo tempo a raccogliere totalmente scomponendo il polinomio dato. **N.B.** Nell'esempio a fianco si poteva fare un raccoglimento totale iniziale e poi un raccoglimento parziale il risultato è lo stesso fai la prova per esercizio.	Dato il polinomio $15x^4 + 10x^3y - 60x^2y - 40xy^2$, si ha: $\underline{15x^4} + \underline{10x^3y} - \underline{\underline{60x^2y}} - \underline{\underline{40xy^2}}$ $= 5x^3 \cdot (3x+2y) - 20xy \cdot (3x+2y)$ $= (3x+2y) \cdot \left(\underline{5x^3} - \underline{20xy}\right)$ $= 5x(3x+2y) \cdot \left(x^2 - 4y\right)$
Il binomio differenza tra due quadrati $\boldsymbol{a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)}$	Dato il polinomio $(x-3)^2 - 25y^4$ possiamo individuare i termini: $a^2 = (x-3)^2 \quad \rightarrow \quad a = x-3$ $b^2 = (5y^2)^2 \quad \rightarrow \quad b = 5y^2$ e scriverlo come prodotto: $(x-3)^2 - 25y^4 = [(x-3)+5y^2] \cdot [(x-3)-5y^2]$ $= (x-3+5y^2) \cdot (x-3-5y^2)$
Il trinomio quadrato di un binomio $\boldsymbol{a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2}$	Dato il polinomio $x^2 - 10xy^2 + 25y^4$, si nota facilmente che esso si può scrivere come: $x^2 - 10xy^2 + 25y^4 = (x-5y^2)^2$
Il polinomio quadrato di un trinomio $\boldsymbol{a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc}$ $\boldsymbol{= (a+b+c)^2}$	Dato il polinomio $x^2 - 4x + 4 - xy + 2y + y^2$, si nota facilmente che esso si può scrivere come: $x^2 - 4x + 4 - xy + 2y + y^2 = (-x+2+y)^2$
Il binomio somma e differenza di due cubi $\boldsymbol{a^3 \pm b^3 = (a \pm b) \cdot \left(a^2 \mp ab + b^2\right)}$	Dato il polinomio $(x-2)^3 + y^3$ possiamo individuare i termini: $a = x-2 \quad \text{e} \quad b = y$ e scriverlo come prodotto: $(x-2)^3 + y^3 = [(x-2)+y] \cdot [(x-2)^2 - y(x-2) + y^2]$ $= (x-2+y)$ $\cdot \left(x^2 - 4x + 4 - xy + 2y + y^2\right)$ $= (x-2+y) \cdot (-x+2+y)^2$
Il trinomio di 2° grado $\boldsymbol{x^2 + sx + p = (x+h)(x+k)}$ ***con***	Dato il polinomio $x^2 + 4ax - 45a^2$, cerchiamo le coppie di numeri reali (h,k) tali che: $\begin{cases} h + k = 4a \\ h \cdot k = -45a^2 \end{cases}$ Dopo qualche tentativo si perviene alla coppia

<table>
<tr>
<td>

$$\begin{cases} \boldsymbol{h+k=s} \\ \boldsymbol{h \cdot k = p} \end{cases}$$

</td>
<td>

$$\begin{cases} h=-5a \\ k=9a \end{cases}$$

e quindi il polinomio risulta scomposto nel seguente prodotto:

$$x^2+4ax-45a^2=(x-5a)\cdot(x+9a)$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Il quadrinomio cubo di un binomio

$$\boldsymbol{a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3}$$

</td>
<td>

Dato il polinomio $8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3$ si individuano le basi dei cubi :

$$\begin{cases} a=2x \\ b=-3y \end{cases}$$

cosicché il polinomio può essere scritto nel prodotto:

$$8x^3-36x^2y+54xy^2-27y^3=(2x-3y)^3$$

</td>
</tr>
<tr>
<td>

La regola di Ruffini

Dato un polinomio $A(x)$ per poterlo scrivere nella forma:

$$A(x)=Q(x)\cdot(x-\lambda)$$

deve esistere un opportuno numero $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che il polinomio $A(x)$ sia effettivamente divisibile per il binomio $(x-\lambda)$ ovvero:

$$R=A(\lambda)=0$$

Non è detto che λ esista; tuttavia se esiste ed è intero, allora sarà un divisore del termine noto di *A(x)*

</td>
<td>

Dato il polinomio $A(x)=x^3+3x^2-4$ questi non è scomponibile con i metodi precedenti. Vogliamo di scomporlo con la regola di Ruffini e cerchiamo il numero λ tra i divisori di –4 , cioè nell'insieme:

$$D(-4)=\{\pm1,\pm2,\pm4\}$$

e si trova che:

$$R=A(1)=1^3+3\cdot1^2-4=0$$

$$\begin{array}{c|ccc|c} & +1 & +3 & 0 & -4 \\ +1 & \downarrow & +1 & +4 & -4 \\ \hline & +1 & +4 & +4 & 0 \end{array}$$

Risulta così che:

$$Q(x)=x^2+4x+4$$

e quindi il polinomio si scompone nel prodotto:

$$x^3+3x^2-4=\left(x^2+4x+4\right)\cdot(x-1)$$
$$=(x+2)^2\cdot(x-1)$$

</td>
</tr>
</table>

M.C.D. E m.c.m. DI DUE POLINOMI

<u>**Definizione**</u>: Il ***M.C.D. di due o più polinomi*** si ottiene moltiplicando tutti i fattori comuni ai polinomi, ciascuno preso una sola volta, col minore esponente.

Esempio: *Determinare il M.C.D. dei polinomi* $2x^3-4x^2$, $12+3x^2-12x$ *e* $3x^3-12x$.

Scomponiamo i polinomi in fattori:

- $2x^3-4x^2=2x^2(x-2)$;
- $12+3x^2-12x=3(4+x^2-4x)=3(x-2)^2$;
- $3x^3-12x=3x(x^2-4)=3x(x-2)(x+2)$.

Il M.C.D. è dato dal polinomio $3(x-2)$.

<u>**Definizione**</u>: Il ***m.c.m. di due o più polinomi*** si ottiene moltiplicando tutti i fattori comuni e non comuni ai polinomi, ciascuno preso una sola volta, col maggiore esponente.

Esempio: *Determinare il m.c.m. dei polinomi* $2x^3-4x^2$, $12+3x^2-12x$ *e* $3x^3-12x$.

Scomponiamo i polinomi in fattori:

- $2x^3 - 4x^2 = 2x^2(x-2)$;
- $12 + 3x^2 - 12x = 3(4 + x^2 - 4x) = 3(x-2)^2$;
- $3x^3 - 12x = 3x(x^2 - 4) = 3x(x-2)(x+2)$.

Il m.c.m. è dato dal polinomio $6x^2(x-2)^2(x+2)$.