PRECORSO DI MATEMATICA

IV Lezione

"EQUAZIONI DI I E II GRADO E DISEQUAZIONI DI I GRADO"

E. Modica

matematica@blogscuola.it

www.matematica.blogscuola.it

IDENTITÀ ED EQUAZIONI

Si consideri un'uguaglianza tra due espressioni algebriche

$$A = B$$

se si sostituiscono al posto della A e della B dei numeri, si può verificare uno dei tre casi seguenti:

- l'uguaglianza $A = B$ è sempre vera;
- l'uguaglianza $A = B$ è sempre falsa;
- l'uguaglianza $A = B$ risulta vera solo per alcuni numeri e falsa per altri.

Se lo scopo è quello di determinare quali valori numerici si devono attribuire ad A e B affinché l'uguaglianza $A = B$ risulti vera, si dice che quest'ultima uguaglianza è un'equazione.

Definizione: Si dice ***equazione*** un'uguaglianza tra due espressioni algebriche per la quale si vogliono determinare i valori delle variabili che la rendono vera.
Le variabili che compaiono in un'equazione prendono il nome di ***incognite*** e si indicano con le lettere finali dell'alfabeto $x, y, z, \ldots$

La forma generale di un'equazione è:

$$A(x) = B(x)$$

l'espressione $A(x)$ si dice ***primo membro*** dell'equazione, mentre l'espressione $B(x)$ si dice ***secondo membro***.

Definizione: Si dice ***soluzione*** o ***radice*** di un'equazione quel numero che, sostituito al posto della variabile, realizza l''uguaglianza.

In base al tipo di soluzione trovata, le equazioni vengono classificate come indicato nella seguente tabella.

Classificazione	*Insieme delle soluzioni*	*Esempio*
Possibile (nell'insieme A)	$S \neq \emptyset$	$2x = 4 \ \ in \ \ \mathbb{N}$
Impossibile (nell'insieme A)	$S = \emptyset$	$x + 2 = 1 \ \ in \ \ \mathbb{N}$
Determinata (nell'insieme A)	$S \subset A, S\ finito$	$x + 3x = 24 \ \ in \ \ \mathbb{Q}$
Indeterminata (nell'insieme A)	$S \subseteq A, S\ infinito$	$x + 3x = 4x \ \ in \ \ \mathbb{R}$

<u>Definizione</u>: Due equazioni si dicono ***equivalenti*** se ammettono le stesse soluzioni.

Esempio: Le equazioni $2x = 1$ e $6x = 3$ sono equivalenti in $\mathbb{Q}$.

<u>I Principio di Equivalenza</u>: *Sommando o sottraendo ad ambo i membri di un'equazione uno stesso numero o una stessa espressione algebrica contenente l'incognita (che sia definita per ogni valore dell'incognita) si ottiene un'equazione equivalente a quella data.*

Regola 1: In ogni equazione un termine si può spostare da un membro all'altro, purché venga cambiato il segno.

Esempio: L'equazione $3x + 5 = x - 1$ è equivalente all'equazione $3x - x = -5 - 1$.

Regola 2: Se in ciascun membro di un'equazione compaiono le stesse quantità, queste si possono eliminare.

Esempio: L'equazione $3x + 5 + x = x - 1 + 3x - 7$ è equivalente all'equazione $3x - 5 + x = x - 1 + 3x - 5$.

<u>II Principio di Equivalenza</u>: *Moltiplicando o dividendo ambo i membri di un'equazione per uno stesso numero, diverso da zero, o una stessa espressione algebrica contenente l'incognita, che sia definita per ogni valore dell'incognita, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.*

Regola 1: Se si cambiano i segni di tutti i membri di un'equazione, si ottiene un'equazione equivalente a quella data.

Esempio: L'equazione $3x + 5 = x - 1$ è equivalente all'equazione $-3x - 5 = -x + 1$.

Regola 2: Un'equazione con coefficienti frazionari si può trasformare in un'equazione equivalente con i coefficienti interi moltiplicando ciascun membro per il m.c.m. dei denominatori.

Esempio:

L'equazione $\frac{x+1}{3} - \frac{x}{2} = \frac{x+1}{6}$ è equivalente all'equazione $2(x - 1) - 3x = x + 1$.

FORMA NORMALE E GRADO DI UN'EQUAZIONE

<u>Definizione</u>: Si definisce ***forma normale*** di un'equazione la scrittura:

$$P(x) = 0$$

<u>Definizione</u>: Si definisce ***grado*** di un'equazione, scritta in forma normale, il grado del polinomio $P(x)$.

RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DI PRIMO GRADO NUMERICA

Risolviamo adesso un'equazione di primo grado ad un'incognita, scritta in forma normale, nella sua espressione più generale:

$$ax + b = 0$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.
Applicando i principi d'equivalenza, si ottiene l'espressione

$$ax = -b$$

e quindi si possono presentare i tre casi:

<u>I Caso</u>: $a \neq 0 \implies \frac{ax}{a} = -\frac{b}{a} \implies x = -\frac{b}{a} \implies S = \left\{-\frac{b}{a}\right\} \implies$ ***equazione determinata***;

<u>II Caso</u>: $a = 0 \;\; e \;\; b \neq 0 \implies 0x = -b \implies S = \emptyset \implies$ ***equazione impossibile***;

<u>III Caso</u>: $a = 0 \;\; e \;\; b = 0 \implies 0x = 0 \implies S = \mathbb{R} \implies$ ***equazione indeterminata***.

Esempi:

1. $x + 3x = 24 \implies 4x = 24 \implies x = \frac{24}{4} = 6$;
2. $3x + 1 = 3x \implies 1 = 0 \implies$ equazione impossibile;
3. $4x = 3x + x \implies 0 = 0 \implies$ equazione indeterminata.

EQUAZIONI FRATTE

<u>Definizione</u>: Un'equazione si dice ***fratta*** quando l'incognita compare a denominatore di una frazione, ovvero:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0$$

I valori che annullano il denominatore dell'equazione indicano quali valori le soluzioni non possono assumere e quindi consentono di stabilire quali sono le ***condizioni di accettabilità delle soluzioni***.

Esempio: Risolvere l'equazione $\frac{5-x}{x+2} = 3$.
Le condizioni di accettabilità si stabiliscono imponendo $x + 2 \neq 0$ e si ottiene $x \neq -2$. Risolviamo adesso l'equazione:

$$\frac{5-x}{x+2} = \frac{3(x+2)}{x+2} \implies 5 - x = 3x + 6 \implies -x - 3x = 6 - 5 \implies -4x = 1 \implies x = -\frac{1}{4}$$

La soluzione è accettabile in quanto è diversa da -2.

EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Definizione: Dicesi ***equazione di secondo grado***, un'espressione del tipo:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = 0}$$

con $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$.
I valori a, b, c prendono il nome di ***coefficienti*** e, in particolare, c viene detto ***termine noto***.

Un'equazione di secondo grado si definisce:

- ***incompleta pura*** quando il secondo coefficiente è nullo e quindi si ha $ax^2 + c = 0$;
- ***incompleta spuria*** quando il terzo coefficiente è nullo e quindi si ha $ax^2 + bx = 0$;
- ***completa*** quando i tre coefficienti sono tutti diversi da zero e quindi si ha $ax^2 + bx + c = 0$.

RISOLUZIONE DI UN'EQUAZIONE DI SECONDO GRADO

1 – EQUAZIONE INCOMPLETA PURA $(\boldsymbol{b = 0})$

L'equazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + c = 0$$

e si risolve portando a secondo membro il termine noto e dividendo per il coefficiente del termine di grado massimo:

$$ax^2 = -c \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{c}{a} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$$

Esempio: *Risolvere l'equazione* $4x^2 - 9 = 0$.

Le soluzione si ottengono come segue:

$$x^2 = \frac{9}{4} \quad \Longrightarrow \quad x = \pm\frac{3}{2}$$

Esempio: *Risolvere l'equazione* $4x^2 + 9 = 0$.

L'equazione non ammette soluzioni in quanto il quadrato di un numero reale è sempre non negativo e, di conseguenza, la scrittura $x^2 = -\frac{9}{4}$ non è verificata per nessun valore dell'incognita.

Osservazione: Un'equazione incompleta pura ammette soluzioni se, e solo se, i coefficienti *a* e *c* sono discordi.

2 – EQUAZIONE INCOMPLETA SPURIA ($c = 0$)

L'equazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + bx = 0$$

e si risolve mettendo in evidenza la x e procedendo secondo la legge di annullamento del prodotto[1]. Di conseguenza una soluzione sarà sempre quella nulla.

$$ax^2 + bx = 0 \quad \Longrightarrow \quad x(ax+b) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = -\frac{b}{a}$$

Esempio: *Risolvere l'equazione* $2x^2 - 4x = 0$.

Si ha:

$$2x(x-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 2x = 0 \\ x - 2 = 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x = 0, \qquad x = 2$$

3 – EQUAZIONE COMPLETA

L'equazione si presenta nella forma:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Per risolverla si procede come segue:

$$\begin{array}{cc}
ax^2 + bx + c = 0 & (moltiplichiamo\ ambo\ i\ membri\ per\ 4a) \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0 & (aggiungiamo\ ad\ ambo\ i\ membri\ b^2) \\
4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 = b^2 & (portiamo\ 4ac\ a\ secondo\ membro) \\
4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac & \\
(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac & \\
2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac} & \\
2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac} & \\
x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} &
\end{array}$$

e si è soliti porre $\Delta = b^2 - 4ac$, che prende il nome di ***discriminante*** dell'equazione. Le soluzioni sono quindi date dalla formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

[1] Un prodotto si annulla se, e solo se, almeno uno dei suoi fattori è nullo.

Si possono quindi presentare tre casi:

1° caso: $\Delta = b^2 - 4ac > 0$

In questo caso il radicale $\sqrt{\Delta}$ è un numero reale e l'equazione ammette le ***due soluzioni reali e distinte***:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2° caso: $\Delta = b^2 - 4ac = 0$

In questo caso l'equazione ammette ***due radici reali e coincidenti*** date dall'espressione:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

3° caso: $\Delta = b^2 - 4ac < 0$

In questo caso l'equazioni ***non ammette soluzioni reali***, ma soluzioni complesse coniugate.

Esempi:

1. Risolvere l'equazione $3x^2 - 5x + 2 = 0$

$$\Delta = 25 - 24 = 1$$
$$x_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{6} \quad \Longrightarrow \quad x_1 = 1, \qquad x_2 = \frac{2}{3}$$

2. Risolvere l'equazione $4x^2 - 12x + 9 = 0$

$$\Delta = 144 - 144 = 0$$
$$x_1 = x_2 = \frac{12}{8} = \frac{3}{2}$$

3. Risolvere l'equazione $x^2 - x + 3 = 0$

$$\Delta = 1 - 12 = -11$$

L'equazione non ammette soluzioni reali.

RELAZIONI TRA SOLUZIONI E COEFFICIENTI

Consideriamo una generica equazione di secondo grado

$$ax^2+bx+c=0$$

nell'ipotesi in cui ammette soluzioni reali distinte (cioè $\Delta>0$), e sommiamo e moltiplichiamo le soluzioni:

- $x_1+x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}+\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=-\frac{2b}{2a}=-\frac{b}{a}$
- $x_1x_2=\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\cdot\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=\frac{b^2-\Delta}{4a^2}=\frac{b^2+4ac-b^2}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}$

Quindi:

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a} \qquad \textbf{Somma delle radici}$$
$$x_1x_2=\frac{c}{a} \qquad \textbf{Prodotto delle radici}$$

Esempio: *Data l'equazione* $x^2-5x+6=0$, *determinare, senza risolverla, la somma e il prodotto delle radici.*

Applicando le precedenti formule si ha:

- $x_1+x_2=\frac{5}{1}=5;$
- $x_1+x_2=\frac{6}{1}=6.$

SCOMPOSIZIONE DI UN TRINOMIO DI II GRADO IN FATTORI

Consideriamo il trinomio ax^2+bx+c ed effettuiamo i seguenti passaggi:

$$\begin{aligned} ax^2+bx+c &= a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)= && (sostituendo\ le\ relazioni\ precedenti)\\ &= a[x^2-(x_1+x_2)x+x_1\cdot x_2]= \\ &= a[x^2-x_1x-x_2x+x_1\cdot x_2]= && (raccogliendo\ parzialmente)\\ &= a[x(x-x_1)-x_2(x-x_1)]= \\ &= a(x-x_1)(x-x_2) \end{aligned}$$

Esempio: *Dato il trinomio* x^2-5x+6, *scomporlo in fattori.*

Applicando la precedente formula si ha: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$.

CENNI SUI NUMERI COMPLESSI

L'insieme dei numeri reali non è sufficiente per permettere la risoluzione di equazioni di secondo grado del tipo:

$$x^2 = -1$$

Infatti, abbiamo sempre detto che non esistono numeri il cui quadrato è negativo e ci siamo sempre fermati di fronte ad una tale equazione definendola impossibile in $\mathbb{R}$. Per renderla quindi risolubile, si introduce il nuovo simbolo i, il cui quadrato è proprio uguale a -1, cioè:

$$i^2 = -1$$

Questo nuovo ente prende il nome di **unità immaginaria** e non è associata alla classica operazione del *contare*, ma è solamente un simbolo che ci permette di estendere i numeri reali, e che è soggetto alle legge:

$$i^2 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad i = \sqrt{-1}$$

Definizione: Si definisce ***numero complesso*** ogni scrittura del tipo

$$a + ib$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.
Il numero a prende il nome di ***parte reale***, mentre il numero b prende il nome di ***coefficiente della parte immaginaria***.

L'insieme dei numeri complessi è quindi dato da:

$$\mathbb{C} = \{a + ib : a, b \in \mathbb{R}\}$$

OPERAZIONI CON I NUMERI COMPLESSI

SOMMA ALGEBRICA

Definizione: Dati due numeri complessi $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$, la loro ***somma algebrica*** è data da:

$$z_1 \pm z_2 = (a + ib) \pm (c + id) = (a \pm c) + i(b \pm d)$$

Esempio: Sommare e sottrarre i numeri complessi $z_1 = \frac{1}{2} + 2i$ e $z_2 = \frac{1}{2} - 3i$.

La somma è data da:

$$z_1 + z_2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + i(2 - 3) = 1 - i$$

La differenza è data da:

$$z_1 - z_2 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right) + i(2+3) = 5i$$

MOLTIPLICAZIONE

Definizione: Dati due numeri complessi $z_1 = a + ib$ e $z_2 = c + id$, la loro ***moltiplicazione*** è data da:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2 bd$$

ovvero:

$$z_1 \cdot z_2 = (a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$$

Esempio: Moltiplicare i numeri complessi $z_1 = \frac{1}{2} + 2i$ e $z_2 = \frac{1}{2} - 3i$.

Il prodotto è dato da:

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{4} - \frac{3}{2}i + i - 6i^2 = \left(\frac{1}{4} + 6\right) + \left(1 - \frac{3}{2}\right)i = \frac{25}{4} - \frac{1}{2}i$$

CONIUGIO

Definizione: Si definisce ***coniugato*** del numero complesso $a + ib$ il numero complesso $a - ib$.

Si osservi che un numero complesso e il suo coniugato hanno la stessa parte reale e coefficienti della parte immaginaria opposti.

Esempio: Il numero complesso coniugato di $7 - 5i$ è il numero complesso $7 + 5i$.

EQUAZIONI DI II GRADO E NUMERI COMPLESSI

Per risolvere l'equazione di secondo grado $ax^2 + bx + c = 0$, si utilizza la formula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

che coinvolge l'estrazione della radica quadrata della quantità $\Delta = b^2 - 4ac$.
Si possono quindi presentare, in merito alle radici, i seguenti casi:

- $\Delta > 0$ due radici reali e distinte;
- $\Delta = 0$ due radici reali coincidenti;
- $\Delta < 0$ due radici complesse coniugate.

Esempio: Risolvere l'equazione $x^2 - 2x + 10 = 0$

Si ha:

$$\frac{\Delta}{4} = 1 - 10 = -9$$

e quindi:

$$x_{1,2} = 1 \mp \sqrt{-9} = 1 \mp 3i \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1 - 3i, \;\; x_2 = 1 + 3i$$

DISEQUAZIONI DI PRIMO GRADO

<u>Definizione</u>: Una ***disequazione razionale intera di primo grado*** è una disuguaglianza del tipo:

$$ax + b > 0 \qquad \text{oppure} \qquad ax + b < 0$$

Per risolvere le disequazioni ci si avvale dei seguenti principi d'equivalenza:

<u>I Principio</u>: *Aggiungendo o sottraendo ad ambo i membri di una disequazione una stessa quantità, si ottiene una disequazione equivalente.*

<u>II Principio</u>: *Moltiplicando o dividendo ambo i membri di una disequazione per una stessa quantità, <u>purché diversa da zero</u>, si ottiene una disequazione equiversa se la quantità è positiva, di verso opposto se la quantità è negativa.*

Se si suppone $a > 0$, si ottiene:

$$ax > -b \qquad \underbrace{\rightarrow}_{dividendo \;\; per \;\; a} \qquad x > -\frac{b}{a}$$

$$ax < -b \qquad \underbrace{\rightarrow}_{dividendo \;\; per \;\; a} \qquad x < -\frac{b}{a}$$

Esempi:

1. Risolvere la disequazione $7x - 14 > 0$

   Si ha:

$$7x > 14 \qquad \underbrace{\Rightarrow}_{dividendo \;\; ambo \;\; i \; membri \;\; per \; -7} \qquad x > \frac{14}{7} = 2$$

2. Risolvere la disequazione $-7x + 14 > 0$

   Si ha:

$$-7x > -14 \qquad \underbrace{\Rightarrow}_{dividendo \;\; ambo \;\; i \; membri \;\; per \; -7} \qquad x < \frac{-14}{-7} = 2$$