

PRECORSO DI MATEMATICA

I Lezione

“DISEQUAZIONI, EQUAZIONI E DISEQUAZIONI IRRAZIONALI”

E. Modica

matematica@blogscuola.it

www.matematica.blogscuola.it

DISEQUAZIONI CON VALORE ASSOLUTO

Nella risoluzione delle disequazioni contenenti i valori assoluti, si analizzano singolarmente i casi in cui compare un solo valore assoluto e i casi in cui vi sono più valori assoluti.

I caso: $|A(x)| < k$, con $k \in \mathbb{R}$

In questo caso si ha che:

- se $k < 0$, la disequazione è impossibile in quanto il valore assoluto è una quantità sicuramente positiva e non può quindi essere minore di un numero negativo;
- se $k > 0$, la disequazione

$$|A(x)| < k$$

è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} A(x) < k \\ A(x) > -k \end{cases} \Rightarrow -k < A(x) < k$$

Esempio: Risolvere la disequazione $|x^2 - 9x + 7| < 7$

Essa è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 9x + 7 < 7 \\ x^2 - 9x + 7 > -7 \end{cases}$$

da cui segue che:

$$\begin{cases} x^2 - 9 < 0 \\ x^2 - 9x + 14 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < x < 9 \\ x < 2 \vee x > 7 \end{cases}$$

ovvero, considerando le soluzioni comuni, si ha:

$$0 < x < 2 \vee 7 < x < 9$$

II caso: $|A(x)| > k$, con $k \in \mathbb{R}$

In questo caso si ha che:

- se $k < 0$, la disequazione è verificata per ogni valore della variabile x , in quanto il valore assoluto è una quantità sicuramente positiva e quindi è sempre maggiore di un numero negativo;
- se $k > 0$, la disequazione

$$|A(x)| > k$$

è equivalente all'unione delle due equazioni:

$$A(x) < -k \quad A(x) > k$$

e quindi se S_1 è l'insieme delle soluzioni della prima disequazione ed S_2 è l'insieme delle soluzioni della seconda, allora l'insieme delle soluzioni di $|A(x)| > k$ è dato da $S = S_1 \cup S_2$.

Esempio: Risolvere la disequazione $|3x - 2| > 1$

Essa è equivalente all'unione delle due equazioni:

$$3x - 2 < -1 \quad 3x - 2 > 1$$

da cui segue che:

$$x < \frac{1}{3} \vee x > 1$$

III caso: $|A(x)| + |B(x)| > 0$, $|A(x)| + |B(x)| \geq 0$

La prima delle due disequazioni è verificata per ogni $x \in \mathbb{R}$, esclusi i valori che annullano contemporaneamente $A(x)$ e $B(x)$. La seconda è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Esempio: Risolvere la disequazione $|x^2 - 4| + |x - 2| > 0$.

Il primo valore assoluto si annulla quando $x = \pm 2$, mentre il secondo valore assoluto si annulla quando $x = 2$, di conseguenza la disequazione è soddisfatta per ogni $x \in \mathbb{R} - \{2\}$.

IV caso: $|A(x)| + |B(x)| < 0$, $|A(x)| + |B(x)| \leq 0$

La prima delle due disequazioni non è mai verificata, mentre la seconda è verificata solo per i valori di x che annullano contemporaneamente $A(x)$ e $B(x)$.

Esempio: Risolvere la disequazione $|x^2 - 4| + |x - 2| \leq 0$.

Il primo valore assoluto si annulla quando $x = \pm 2$, mentre il secondo valore assoluto si annulla quando $x = 2$, di conseguenza la disequazione è soddisfatta per $x = 2$.

Caso Generale

Quando una disequazione presenta diversi valori assoluti, bisogna:

- studiare il segno delle espressioni contenute all'interno di essi;
- costruire un grafico in cui vengono riportati i segni di tali espressioni;
- per ciascuno degli intervalli che si vengono a creare, si riscrive la disequazione tenendo conto del grafico dei segni e si risolve;
- l'insieme delle soluzioni è dato dall'unione delle soluzioni delle varie disequazioni.

Esempio: Risolvere la disequazione $|x - 1| + |x + 2| > 1$

Studiamo i segni delle quantità all'interno del valore assoluto:

		-2		1	
$x > 1$	-----	-	-----	0	+++++
$x > -2$	-----	0	+++++	+	+++++

Si ha:

- $x < -2$ $1 - x - x - 2 > 1 \rightarrow -2x > 2 \rightarrow x < -1$
- $-2 < x < 1$ $1 - x + x + 2 > 1 \rightarrow 2 > 0 \rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$
- $x > 1$ $x - 1 + x + 2 > 1 \rightarrow 2x > 0 \rightarrow x > 0$

L'insieme delle soluzioni della disequazione è data dall'unione delle soluzioni e quindi $S = \mathbb{R}$.

EQUAZIONI IRRAZIONALI

Definizione: Dicesi *equazione irrazionale* un'equazione nella quale l'incognita compare sotto il segno di radice.

Analizziamo adesso i seguenti casi.

I CASO: $\sqrt{A(x)} = k$, con $k \in \mathbb{R}$

Tale equazione equivale allo studio del sistema seguente:

$$\begin{cases} k \geq 0 \\ A(x) \geq 0 \\ A(x) = k^2 \end{cases}$$

Infatti la prima condizione è imposta dal fatto che la radice quadrata di un'espressione è una quantità sempre non negativa e, di conseguenza, deve essere $k \geq 0$, la seconda condizione è quella di realtà del radicale, mentre la terza è l'equazione risolvente.



Esempio: Risolvere l'equazione $\sqrt{x-1} = 3$

L'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x-1 \geq 0 \\ x-1 = 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x = 8 \end{cases} \Rightarrow x = 8$$

II CASO: $\sqrt{A(x)} = B(x)$

Tale equazione equivale al seguente sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 & \text{(condizione di realtà)} \\ B(x) \geq 0 & \text{(condizione di concordanza di segno)} \\ A(x) = [B(x)]^2 & \text{(equazione risolvente)} \end{cases}$$

Osservazione: La condizione di realtà $A(x) \geq 0$ è già implicita nell'equazione risolvente, perché ogni soluzione di $A(x) = [B(x)]^2$ rende $A(x) \geq 0$. Pertanto il sistema diventa:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) = [B(x)]^2 \end{cases}$$

Esempio: Risolvere l'equazione $\sqrt{3-4x} = 2x$

L'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 2x \geq 0 \\ 3-4x = 4x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 + 4x - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x = -\frac{3}{2}, x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

L'unica soluzione accettabile è $x = \frac{1}{2}$.

III CASO: $\sqrt{A(x)} = \sqrt{B(x)}$

Tale equazione equivale allo studio del sistema seguente:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) \geq 0 \\ A(x) = B(x) \end{cases}$$

Esempio: Risolvere l'equazione $\sqrt{x^2-4x} = \sqrt{x-6}$

L'equazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} x - 6 \geq 0 \\ x^2 - 4x = x - 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ 4x^2 - 5x + 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 6 \\ x = 2, x = 3 \end{cases}$$

L'equazione è quindi impossibile in quanto nessuna delle due soluzioni è maggiore o uguale a 6.

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI

Definizione: Una disequazione si dice *irrazionale* se l'incognita compare sotto il segno di radice.

Si possono avere due casi:

1° caso: $A(x) > \sqrt{B(x)}$

Tale disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) > 0 \\ [A(x)]^2 > B(x) \end{cases}$$

Esempio: Risolvere la disequazione $2x - 3 > \sqrt{4x^2 - 13x + 3}$

La disequazione è equivalente al sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 - 13x + 3 \geq 0 \\ 2x - 3 > 0 \\ (2x - 3)^2 > 4x^2 - 13x + 3 \end{cases}$$

2° caso: $A(x) < \sqrt{B(x)}$

Si osserva che la disequazione è certamente soddisfatta dal sistema

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) < 0 \end{cases}$$

in quanto la radice quadrata di un numero reale, se esiste, è un numero non negativo quindi, se si suppone che $A(x) < 0$, un numero non negativo è sempre maggiore di un numero negativo.

Inoltre è soddisfatta dalle soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ B(x) > 0 \\ [A(x)]^2 < B(x) \end{cases}$$

Si osserva che, in quest'ultimo sistema, la seconda disequazione è contenuta nella terza e quindi il sistema si riduce al seguente:

$$\begin{cases} A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^2 < B(x) \end{cases}$$

In definitiva la disequazione $A(x) < \sqrt{B(x)}$ è equivalente all'unione dei due sistemi

$$\begin{cases} B(x) \geq 0 \\ A(x) < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} A(x) \geq 0 \\ [A(x)]^2 < B(x) \end{cases}$$

Esempio: Risolvere la disequazione $x - 8 < \sqrt{x^2 - 9x + 14}$

La disequazione è equivalente ai due sistemi:

$$\begin{cases} x - 8 < 0 \\ x^2 - 9x + 14 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x - 8 \geq 0 \\ (x - 8)^2 < x^2 - 9x + 14 \end{cases}$$