La Forza Elastica

1 La legge della forza

1. Forze di deformazione. Delle 4 interazioni fondamentali solo due agiscono a livello macroscopico: quella gravitazionale e quella elettromagnetica. Della seconda l' effetto macroscopico che si studia anche a scuola è la forza di Coulomb, che è descritta da una legge molto simile alla legge di gravitazione universale, con la fondamentale differenza che le cariche elettriche possono essere positive e negative e quindi la forza (elettrostatica) può essere attrattiva o repulsiva. Se le cariche si muovono le cose si complicano notevolmente, nasce un campo magnetico (oltre quello elettrico), ci può essere irraggiamento, cioè onde elettromagnetiche. Tutto ciò verrà affrontato in Fisica2 (Elettromagnetismo e Ottica). La cosa è ancora più complicata se i corpi (carichi) interagiscono a livello microscopico, perché allora questi fenomeni vanno studiati con la Meccanica Quantistica. In questo modo si possono studiare le **Forze Molecolari**, le quali, in maniera qualitativa, presentano un andamento repulsivo a piccole distanze intermolecolari e attrattivo a grandi distanze; rispetto a un punto di equilibrio (stabile) che è dell'ordine di qualche unità fino a qualche centinaia di ångstrom ($10^{-10}m$). Queste forze sono, in ultima analisi, l'origine delle **forze di deformazione** e delle **forze di attrito**. Le prime si manifestano macroscopicamente come reazione ogni qualvolta si applica ad un corpo solido una forza tendente a modificarne la struttura, a modificare cioè l'assetto spaziale del reticolo molecolare, spostando le singole molecole dalle posizioni medie di equilibrio. Si parla di **regime elastico** se, una volta rimosse le forze applicate, il corpo riacquista la sua forma iniziale.

In particolare ci occuperemo della deformazione per **trazione** e per **compressione**, e sperimentalmente si verifica che, al crescere dell'intensità della forza applicata, entro un certo limite (**limite di proporzionalità**), la deformazione è proporzionale alla forza applicata; questo è detto anche **regime di Hooke**, dal nome del fisico che per primo, nel 1676, stabilì la legge di proporzionalità:

$$\Delta l = \frac{1}{E}\frac{l_0}{S}F \qquad \text{(per l'allungamento)}$$

Naturalmente, alla forza applicata, azione, corrisponde da parte del corpo una reazione, uguale ed opposta, che è la forza di deformazione e che chiameremo, nel regime di Hooke, **FORZA ELASTICA**.

2. La molla ideale e l'espressione della forza. Una schematizzazione molto utile, per trattare la forza elastica, è quella di un particolare corpo che chiameremo "molla ideale" (o semplicemente molla), che ha la forma di una molla elicoidale, ma di cui considereremo **trascurabile la massa**:

immaginate e disegnate sul vostro quaderno una classica molla in orizzontale (vedi la Figura 1), con i due estremi A e B, e immaginiamo qui, ma solo per introdurre il ragionamento e le definizioni, che ad essi siano applicate due forze di trazione qualsiasi, con i versi verso l'esterno, quindi tendenti ad allungare la molla, $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$. [Negli esercizi di cui ci occuperemo inizialmente, applicheremo una forza, che chiamiamo **vincolare** (vedi più avanti), ad uno degli estremi per mantenerlo fisso, mentre all'estremo cosiddetto libero "attaccheremo", "agganceremo" oppure "appoggeremo" un corpo materiale di massa m che eserciterà una forza, ancora di tipo vincolare, all'estremo della molla].

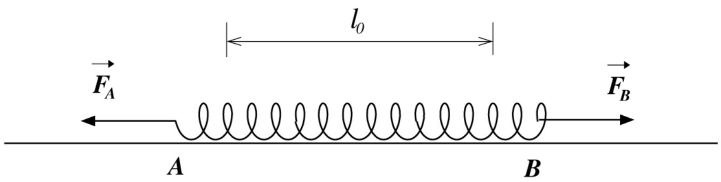

Figura 1: rappresentazione di una molla ideale.

Chiamiamo l_0 la lunghezza della molla a "riposo", cioè quando non vi è applicata nessuna forza agli estremi, essa è un parametro caratteristico della molla. La lunghezza, istante per istante, è $l(t)$ o semplicemente l (ma sempre sottintendendo la dipendenza funzionale dal tempo!). Questa, come tutte le lunghezze (dei segmenti..., e la molla è come un segmento, ma **variabile** nel tempo), è data dalla differenza delle coordinate degli estremi (secondo il verso dell'asse introdotto):

$$l = x_B(t) - x_A(t) \quad \text{(questa deve essere} > 0) \quad .$$

In generale i due estremi si muoveranno nel tempo.

Def. - Chiamiamo **deformazione** (della molla) la differenza $l - l_0$:

$$\Delta l = l - l_0 \quad \begin{cases} > 0 & \textbf{allungamento} \\ < 0 & \textbf{compressione} \end{cases} \quad .$$

Dunque in generale:

$$\Delta l(t) = x_B(t) - x_A(t) - l_0 \ .$$

Questa deve essere l'espressione a cui si pensa, automaticamente, quando si parla di deformazione.

Non ci occuperemo mai delle due forze esterne $\vec{F}_A$ e $\vec{F}_B$ che agiscono sulla molla, semplicemente perché la molla non costituirà mai il corpo su cui focalizzare il nostro interesse, è un oggetto ideale, una specie di "generatore" di forza elastica. Infatti, sono le due forze di reazione alle forze esterne che ci interessano, le forze elastiche appunto, chiamiamole $\vec{f}_A^{el}$ e $\vec{f}_B^{el}$. Queste hanno la direzione dell'asse della molla e, essendo opposte alle forze esterne, avranno i versi verso l'interno nel caso di allungamento della molla, verso l'esterno nel caso di compressione. E i moduli?

Le due forze elastiche che si sviluppano agli estremi di una molla ideale hanno lo stesso modulo e versi opposti:

$$\vec{f}_A^{el} = -\vec{f}_B^{el} \quad ; \tag{1}$$

questa relazione può essere giustificata ragionando sui singoli segmenti della molla (tutti di massa trascurabile), così come si fa nei fili, e facendo vedere che lungo la molla si trasmette una forza elastica che nel caso ideale ha modulo costante lungo la molla. La relazione (1) può anche essere assunta come **definizione della molla ideale**.

L'ipotesi di proporzionalità (regime di Hooke) implica che il modulo della forza elastica è proporzionale alla deformazione:

$$|\vec{f}^{el}_A| = |\vec{f}^{el}_B| = k|\Delta l| \quad ,$$

dove k è una costante positiva, detta **costante elastica** della molla, la cui unità di misura è il **newton su metro**:

$$[k] = [f][l^{-1}] = [m\,t^{-2}] \quad .$$

Come rappresentare vettorialmente la forza elastica esercitata da un estremo della molla? Si segua la seguente successione logica del ragionamento (e la si riporti sul proprio quaderno facendo il disegno):

a) molla ideale (si disegna la molla elicoidale e non si nominano ancora gli estremi).

b) si introduce un asse cartesiano di riferimento (ad esempio x).

c) si fissa l'origine (dove si vuole) e il verso: fissato questo, si chiama A l'estremo che viene prima e B quello che viene dopo, ciò al fine di avere sempre che $l = x_B - x_A$ sia positiva.

d) se la molla è allungata (nell'istante t generico), $\Delta l > 0$, le due forze puntano verso l'interno, allora quella concorde con il verso scelto dell'asse è $\vec{f}^{el} = k\ \Delta l\ \ \hat{x}$, quella discorde ha invece il segno meno davanti a k; se la molla è compressa i segni rimangono gli stessi perché è $\Delta l < 0$.

e) Si sostituisce ad l la sua espressione $x_B(t) - x_A(t)$ e il gioco è fatto: si può sostituire la legge della forza nell'equazione del moto (vettoriale) del corpo ad essa corrispondente (cioè di quello sul quale essa agisce). La dipendenza della legge della forza dalle coordinate degli estremi assicura che, muovendosi questi ultimi nel corso del tempo, la forza elastica cambi verso quando cambia il segno di Δl (come deve essere).

Nella parte della dinamica di cui ci stiamo occupando, quella del corpo singolo puntiforme, uno degli estremi della molla è agganciato ad un supporto rigido fisso: la sua coordinata, dunque, è costante rispetto al tempo e questo è il caso che abbiamo schematizzato nella Figura 2.

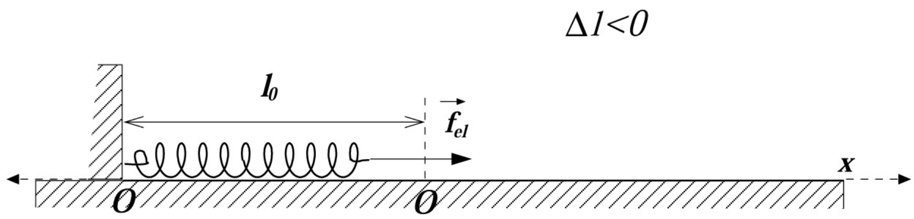

Figura 2: introduzione di un sistema di riferimento per una molla: 2 possibili origini + 2 versi possibili.

Nella sezione successiva studieremo l'equazione del moto in presenza di una forza elastica, ma prima di andare avanti è molto utile dedicarsi pazientemente al seguente esercizio.

Si considerino 4 modi diversi di introdurre il sistema di riferimento: con l'origine nell'estremo fisso oppure con l'origine nel punto in cui si trova l'estremo libero quando la molla è a riposo, e per ciascuno di questi casi nei due versi possibili dell'asse. Per le due scelte dell'origine la coordinata dell'estremo fisso sarà facilmente individuata (o zero o semplice funzione di l_0), mentre la coordinata dell'estremo libero, **variabile** col tempo, sarà sempre indicata con $x(t)$ e corrisponderà anche alla posizione del corpo puntiforme di massa m, sul quale agisce la forza elastica. Si ripeta nei 4 casi la successione $a) \to e)$ in modo da familiarizzarsi con possibili espressioni diverse della legge della forza elastica.

Si devono ottenere le quattro espressioni:

$$\begin{aligned}
1)\quad & \vec{f}^{el} = -k\,[x(t) - l_0]\;\hat{x} \\
2)\quad & \vec{f}^{el} = k\,[-x(t) - l_0]\;\hat{x} \\
3)\quad & \vec{f}^{el} = -k\,x(t)\;\hat{x} \\
4)\quad & \vec{f}^{el} = k\,[-x(t)]\;\hat{x}\ ,
\end{aligned}$$

le prime due nel caso dell'origine coincidente con l'estremo fisso, le seconde due nel caso dell'origine coincidente con il punto dell'estremo libero quando la molla è a riposo. Da queste espressioni si nota che il termine contenente "$k\ x(t)$" ha sempre il segno meno e che la seconda scelta conduce ad un'espressione assai semplice (che è l'unico caso considerato dai libri di testo), da cui si comprende che la lunghezza a riposo della molla, l_0, non è un parametro essenziale.

2 L'equazione del moto

1. Compare sulla scena l'equazione differenziale. Con la schematizzazione appena fatta abbiamo dunque introdotto una particolare forza (macroscopica) che è la **forza elastica**, della quale siamo in grado di esibire, a prescindere dal corpo su cui agisce, la legge di forza.

Consideriamo una molla ideale posta su un piano orizzontale, con un estremo, ad esempio quello sinistro, fissato a qualcosa che sia rigidamente connesso al piano orizzontale. Questo supporto nel punto d'attacco della molla sviluppa una **reazione vincolare** che agisce sull'estremo della molla, uguale ed opposta alla forza elastica che la molla esercita su di esso. L'attributo "vincolare" fa riferimento al vincolo costituito dal supporto nei confronti dell'estremo della molla: in questo caso è un vincolo **bilaterale**, perché l'estremo della molla è agganciato e non appoggiato, e non si può muovere né in un senso né nell'altro. Facciamo la scelta numero 3) tra quelle esaminate alla fine della sezione precedente (se facciamo una delle prime due, talvolta conveniente, otteniamo un "termine noto" nella equazione del moto, cioè un'equazione differenziale "non omogenea", che impareremo a trattare). E consideriamo poi anche un secondo asse, z, verticale.

Attacchiamo un blocchetto di massa m nell'estremo libero della molla. Esso poggia sul piano orizzontale (vedi la Figura 3) e sia trascurabile l'attrito tra le superfici a contatto.

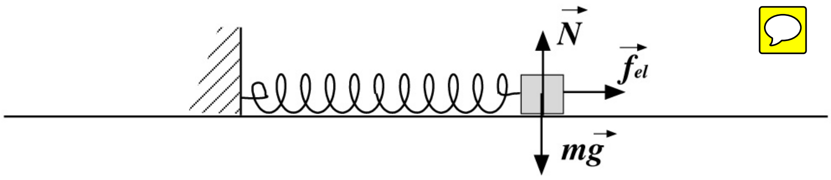

Figura 3: diagramma delle forze di corpo singolo.

Lo schema che segue è quello che deve essere sempre seguito nell'impostare qualunque esercizio di dinamica (talvolta chiamato da Clarizia "pentalogo"):

I) Fare un buon disegno della situazione descritta nel testo dell'esercizio.

II) Fare il diagramma delle forze agenti sul corpo (o sui singoli corpi, se ce n'è più d'uno), individuandole con accuratezza e disegnando per ciascuna un vettore rappresentativo.

III) Scrivere l'equazione del moto ($\sum \vec{f} = m\vec{a}$). Nel nostro caso, come già detto, consideriamo trascurabile l'attrito tra il blocchetto e il piano orizzontale, "superfici lisce", quindi:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f}^{el} = m\vec{a} \quad .$$

IV) Introdurre un sistema di riferimento (scegliendo posizione dell'origine O e versi degli assi).

V) Proiettare l'equazione vettoriale sugli assi:

$$\begin{aligned} z: &\qquad -m\,g + N = 0 \\ x: &\qquad -k\,x(t) = m\,\ddot{x} \quad . \end{aligned} \tag{2}$$

La forza peso è, per definizione, $m\,\vec{g}$. La forza $\vec{N}$ è la Reazione vincolare (Normale) del piano orizzontale sul corpo, e dunque essa è verticale. Essa è **incognita** per definizione. Dalla prima equazione si ricava il suo valore. (**Attenzione**: per il Principio di Azione e Reazione, il corpo di massa m esercita una forza uguale ed opposta ad $\vec{N}$, anch'essa una Reazione vincolare, sul piano su cui è poggiato; **in questo caso** il suo valore, ma soltanto il suo **valore**, è proprio uguale ad $m\,\vec{g}$). L'equazione su z non serve ad altro.

E veniamo all'equazione su x. Qui è bene ricordare che al secondo membro c'è l'accelerazione a che, nel nostro contesto, è un'incognita: il suo valore è dunque determinato dalle componenti delle forze contenute nel primo membro. Se queste ultime sono funzione solo del tempo (in particolare costante), l'equazione del moto è una equazione algebrica, che permette di ricavare $a(t)$. Questa funzione si integra due volte, così come abbiamo visto in Cinematica (utilizzando le condizioni iniziali come costanti di integrazione), e così si ottiene la legge oraria, $x(t)$. Se, però, nelle leggi delle forze c'è una dipendenza funzionale dalla o dalle coordinate spaziali ed eventualmente dalle velocità, queste certamente non sono note a priori, anzi rappresentano la soluzione finale del problema. È questo il caso della forza elastica: nell'equazione relativa all'asse x, a primo membro, c'è la funzione incognita $x(t)$, non si può procedere per semplice integrazione diretta (bisogna capire bene questo punto). Abbiamo davanti un'**equazione differenziale**! Possiamo studiare la breve Appendice E del Rosati([1]), che sintetizza giusto quel che ci serve. C'è un po' da lavorare con le formule di trigonometria o, più rapidamente, con le formule di Eulero (se studiate sul Rosati, attenzione agli errori di stampa nella nota di pag. 76):

$$\begin{aligned} e^{i\alpha t} &= \cos\alpha t + i\sin\alpha t \\ e^{-i\alpha t} &= \cos\alpha t - i\sin\alpha t \end{aligned}$$

quindi, con i numeri complessi (vedi PW per una nota sui Numeri Complessi).

L'equazione sull'asse x si scrive nella forma:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}\,x(t) = 0 \qquad\qquad \frac{k}{m} \equiv \Omega^2 \quad ;$$

essa è **omogenea** (termine noto nullo) ed Ω è detta **pulsazione**, sempre positiva (è consigliabile usare Ω maiuscola giusto per evitare di confondersi in futuro con la velocità angolare).

Questa è l'equazione differenziale del **moto armonico** e la pulsazione è legata al valore del periodo dalla relazione $T = 2\pi\,\Omega^{-1}$ (se si ottenesse, nei casi più complicati dopo alcuni calcoli, una equazione con il segno meno davanti al coefficiente del termine in x, questo sarebbe il campanello di allarme di un errore di calcolo!). Questa equazione caratterizza il moto armonico, e infatti la sua soluzione generale è data da:

$$x(t) = A\sin(\Omega t + \varphi_0) \quad ,$$

come ci assicura la teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti costanti. In questa legge oraria, A è l'**ampiezza** dell'oscillazione ed è **definita positiva** e $\varphi_0 \in [0, 2\pi)$ è la **fase iniziale**. Esse sono le costanti (di integrazione) arbitrarie, legate alle "condizioni iniziali", $x_0 = x(0)$ e $v_0 = \dot{x}(0)$, nel seguente modo:

$$\begin{cases} x_0 = x(0) = A\sin\varphi_0 \\ v_0 = \dot{x}(0) = A\,\Omega\cos\varphi_0 \end{cases} .$$

Nel testo del problema, in generale, sono contenuti come dati i valori di x_0 e v_0 e quindi dal sistema di equazioni trigonometriche di sopra bisogna ricavare A e φ_0 in modo da poter scrivere la soluzione nella sua forma specifica per il caso in esame. Il caso più semplice e di immediata soluzione è quello con $v_0 = 0$: in questo caso $A = |x_0|$ e $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$ oppure $\varphi_0 = \frac{3\pi}{2}$ a seconda del segno di x_0; conviene scrivere la soluzione in questa forma: $x_0\cos(\Omega t)$.

Se invece $v_0 \neq 0$, il sistema si risolve in modo standard, portando la Ω a primo membro nella seconda equazione e poi quadrando e sommando, per ottenere la A, e dividendo membro a membro, per ottenere la φ_0 :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\Omega^2}} \\ \varphi_0 &= \arctan\left(\frac{\Omega\,x_0}{v_0}\right) + n\pi \quad . \end{aligned}$$

[1] Si trova sulla PW = Pagina-Web 'http://people.na.infn.it/clarizia'

N.B.: il valore da scegliere per n ($n = 0$, 1) si determina esaminando, nel sistema precedente, i segni di sinφ_0 e di $\cos\varphi_0$ (nell'operazione di divisione membro a membro si è finito per duplicare il numero delle soluzioni, ma solo una è corretta).

Il moto che si ottiene è dunque un moto armonico, avente come centro (dell'oscillazione) l'origine dell'asse cartesiano x, che abbiamo posto nel punto in cui si trova l'estremo libero della molla in condizioni di riposo (a distanza l_0 dall'estremo fisso). Questa circostanza è sempre vera, se non ci sono altre forze agenti costanti che sposterebbero il centro di oscillazione. In generale, infatti, il centro di oscillazione sarà quel particolare punto geometrico che corrisponde alla posizione di equilibrio (reale o virtuale) per il corpo di massa m; la coordinata di tale posizione, chiamiamola x_c, è una soluzione particolare (soluzione "banale", perché costante) della equazione differenziale, che in questo caso è **non omogenea**.

Come esempio, consideriamo il caso in cui avessimo fatto la scelta 1) dell'elenco che è alla fine del paragrafo precedente: cioè, l'origine dell'asse x nell'estremo fisso della molla e verso a destra. L'equazione del moto si scrive:

$$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}\, x(t) = \frac{k\, l_0}{m} \quad .$$

Questa equazione è **non omogenea** perché ha un termine noto (cioè non dipendente dalla funzione x o dalle sue derivate), che in questo caso è costante (rispetto al tempo – in generale il termine noto è una funzione della variabile indipendente). La soluzione generale dell'equazione è data dalla soluzione generale dell'equazione omogenea associata (quella che abbiamo visto prima) più una soluzione particolare (una qualsiasi) della non omogenea. Questa soluzione particolare è la soluzione banale (x = cost), la cui derivata seconda è ovviamente nulla, dunque:

$$\frac{k}{m}\, x_c = \frac{k\, l_0}{m} \quad ,$$

cioè $x_c = l_0$.

La soluzione generale è data da:

$$x(t) = l_0 + A\sin(\Omega t + \varphi) \quad ,$$

che oscilla intorno a l_0.

Altro esempio: molla in verticale, fissata superiormente ad un supporto e con il corpo di massa m attaccato inferiormente e pendente nel vuoto. Si scelga l'asse, z (origine e verso), si scriva l'equazione vettoriale del moto, si proietti sull'asse z (la molla ha, ovviamente, lunghezza l_0 quando il corpo non è attaccato). Questa volta il termine noto contiene la forza peso. Qual è la soluzione particolare z_c? Ad essa corrisponde o no la posizione di equilibrio ed anche il centro dell'oscillazione? E corrisponde anche (attenzione!) il punto in cui la velocità è massima?

2. Ma che cos'è una equazione differenziale? Non dimentichiamo che noi all'inizio del corso abbiamo dato alla derivata un significato molto concreto (ancorché approssimato) come rapporto incrementale. E se lo usassimo per interpretare il significato di una... equazione differenziale e ricorressimo a EXCEL per trovare la soluzione per punti?

Scriviamo nuovamente la nostra equazione iniziale (2):

$$a(t) = -\frac{k}{m}\, x(t) \quad .$$

A questa dobbiamo aggiungere le condizioni iniziali, ad esempio (ma potete sbizzarrirvi) $x_0 = 3\, cm$ e $v_0 = 4\, cm/s$, ed i valori di k e di m; per semplicità, prendiamo questi in modo che sia $\Omega = 1\, s^{-1}$. Scegliamo un passo temporale: ad esempio $\Delta t = 0.2\, s$; con questo passo, con 40 punti copriamo almeno un periodo, cioè una oscillazione intera. Velocità, ricordiamolo, significa:

$$v(t) = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \quad ,$$

da cui otteniamo:

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v(t)\, \Delta t \quad .$$

Questa relazione permette di ottenere il punto x_1 noti il punto x_0 la velocità v_0 e il passo Δt e noi li abbiamo tutti e 3. E il punto x_2 ? Ci vuole la velocità v_1 e, allora, per questa ricordiamo il significato di accelerazione:

$$a(t) = \frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} \quad ,$$

cioè

$$v(t+\Delta t) = v(t) + a(t)\, \Delta t \quad .$$

Dunque v_1 sarà data da:

$$v_1 = v_0 + a_0 \Delta t \quad .$$

Oibò, ci serve a_0 !! Fin qui abbiamo utilizzato le definizioni cinematiche, ma il valore di a_0 non ce lo dà la cinematica. Ecco che interviene la Dinamica, il Secondo Principio di Newton, che **lega l'accelerazione alla legge di forza** attraverso una equazione, **che è una equazione differenziale** e che, in questo caso della forza elastica, lega una derivata seconda al valore della funzione, punto per punto. Nel nostro caso l'equazione ci dice:

$$\forall n \; (= 0, 1, \ldots) \qquad a_n = -x_n \qquad \mathbf{!}$$

Niente male, abbiamo dunque a_0 e quindi v_1 e quindi x_2 e così via... x_n . Prendiamo subito un foglio EXCEL e proviamo con i metodi che abbiamo imparato, basta richiamarli alla memoria. Possiamo mettere in una casella di riga 2 (la riga 1 serve per le definizioni), diciamo da colonna 6 in poi, il valore di Δt, poi il valore di x_0 e il valore di v_0. Questi potranno essere cambiati a piacere. Nella prima colonna mettiamo i valori del tempo: $0\,, \Delta t\,, 2\Delta t\,, \ldots$; naturalmente con il solito algoritmo che incrementa la casella precedente. Nella seconda i valori x dati dalla equazione:

$$x_{n+1} = x_n + v_n\, \Delta t \quad ,$$

nella terza colonna i valori v dati dalla equazione:

$$v_{n+1} = v_n + a_n\, \Delta t \quad ,$$

nella quarta colonna i valori di a dati dalla equazione:

$$a_n = -x_n \quad ;$$

e tiriamo giù le tendine per 40, 60 passi.

Inseriamo il grafico. Uhm! Le cose vanno così così, i massimi e minimi non rimangono costanti; ma allora forse non si tratta di un seno o l'integrazione numerica non funziona! Effettivamente la funzione seno è una funzione complicata, di difficile convergenza con il metodo che abbiamo usato; possiamo però migliorarlo, con l'accorgimento di considerare i valori delle velocità nei punti di mezzo, piuttosto che nei punti iniziali, dell'intervallo Δt. Dunque nella prima casella, la C2, invece di riportare il nome della casella dove avevamo inserito il valore v_0, facciamo calcolare $v(\Delta t/2)$ utilizzando v_0, a_0 e, naturalmente, $\Delta t/2$; nella successiva, C3, facciamo calcolare $v(3\,\Delta t/2)$ utilizzando la precedente v, a_1 e il Δt intero; e così via. La colonna B delle x non ha bisogno di essere cambiata perché leggerà i valori delle velocità nella colonna accanto **nei punti di mezzo**, come deve essere. Riproviamo con il grafico. Funziona! E forse abbiamo imparato qualcosa anche sulle equazioni differenziali. Ci aspetta più in là un'integrazione di una equazione differenziale ben più spettacolare.