
Appunti di topologia algebrica

LE SUPERFICI

1 CARATTERISTICA DI EULERO-POINCARÉ DI UN POLIEDRO

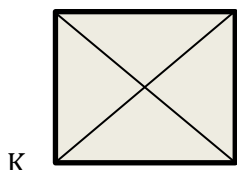
Definizione 1.1. Sia X uno spazio topologico compatto. X è detto **poliedro** se è omeomorfo al poliedro di un complesso simpliciale K , detto una *triangolazione* di X .

Definizione 1.2. Sia K un complesso di dimensione n . Si dice **caratteristica di Eulero-Poincaré di K** , e si indica con $\chi(K)$, la somma a segni alterni dei numeri α_i dei simplessi di dimensione i di K , ossia

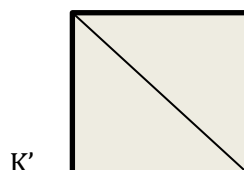
$$\chi(K) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i$$

La caratteristica di Eulero-Poincaré è un invariante topologico, cioè dipende solo da $|K|$ e non dalla triangolazione scelta.

Per esempio, consideriamo le seguenti triangolazioni del quadrato



$$\begin{aligned}\chi(K) &= \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \\ &= 5 - 8 + 4 = 1\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\chi(K') &= \alpha_0 - \alpha_1 + \alpha_2 \\ &= 4 - 5 + 2 = 1\end{aligned}$$

Esercizio: Si dimostri che passando da un complesso simpliciale K ad una sua suddivisione K' la caratteristica di Eulero-Poincaré non cambia.

Hint: si procede per induzione sul numero dei vertici aggiunti.

Sia X un poliedro. Si considerino i gruppi di omologia simpliciale di una sua triangolazione K

$$H_p(K) = \frac{Z_p}{B_p}$$

Z_p e B_p sono gruppi abeliani liberi e finitamente generabili (fg) perché sottogruppi del gruppo abeliano libero fg delle catene C_p .

Richiami di natura algebrica 1.1. Il quoziente di due gruppi abeliani liberi fg non è detto che sia libero, ma è finitamente generabile, e quindi somma diretta di una parte libera G' e di una parte di torsione T .

Definizione 1.3. Sia G un gruppo abeliano libero fg . Si definisce **rango di G** , e si denota con $rg(G)$, il numero dei suoi generatori.

Se G non è libero, ma finitamente generabile, allora il rango di G coincide con il rango della sua parte libera, cioè $G = G' \oplus T \Rightarrow rg(G) = rg(G')$.

Definizione 1.4. Sia X un poliedro. Il rango del gruppo di omologia $H_p(X)$ è detto **p -esimo numero di Betti** di X , e si indica con il simbolo

$$rg(H_p(X)) = b_p.$$

Proposizione 1.1. Sia X un poliedro e siano $H_p(X)$ i suoi gruppi di omologia simpliciale.

La caratteristica di Eulero-Poincaré di X è pari alla somma a segni alterni dei numeri di Betti, cioè

$$\chi(X) = \sum (-1)^i b_i.$$

Per dimostrare questa proposizione abbiamo bisogno di alcune nozioni di carattere algebrico.

Richiami di natura algebrica 1.2. Si ricordi la definizione di modulo su un anello A . Per gli A -moduli valgono molti risultati analoghi a quelli validi per gli spazi vettoriali (d'altra parte se A è un campo, un A -modulo è proprio un A -spazio vettoriale). In particolare vale un risultato che consente di associare, in taluni casi, ad un omomorfismo f tra due A -moduli una matrice il cui rango è significativo, in quanto fornisce il rango del sottomodulo immagine di f , mentre il corango fornisce il rango del nucleo di f .

Si osservi ora che ogni gruppo abeliano può essere visto come modulo sull'anello \mathbb{Z} degli interi relativi. Pertanto i gruppi delle catene simpliciali C_p di un poliedro X possono essere visti come \mathbb{Z} -moduli.

Dimostrazione della proposizione 1.1. Si considerino gli omomorfismi di bordo ∂_p e ∂_{p+1} che hanno rispettivamente come matrice associata $M_{p,p-1}$ e $M_{p+1,p}$

$$C_{p+1} \xrightarrow{\partial_{p+1}} C_p \xrightarrow{\partial_p} C_{p-1}.$$

Si ha che:

$$rg(\text{Ker } \partial_p) = \alpha_p - rg(M_{p,p-1}) \quad \text{e} \quad rg(\text{Im } \partial_{p+1}) = rg(M_{p+1,p}),$$

ovvero:

$$rg(H_p) = rg\left(\frac{Z_p}{B_p}\right) = rg(Z_p) - rg(B_p) = \alpha_p - rg(M_{p,p-1}) - rg(M_{p+1,p}).$$

Ora, facendo la somma a segni alterni, si ha:

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i b_i = \alpha_0 - rg(M_{1,0}) - (\alpha_1 - rg(M_{1,0}) - rg(M_{2,1})) - (\alpha_2 - rg(M_{2,1}) - rg(M_{3,2})) + \dots + (-1)^n (\alpha_n - rg(M_{n,n-1}) - rg(M_{n+1,n})) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \alpha_i = \chi(X)$$

(poiché l'ultima matrice $M_{n+1,n}$ è la matrice nulla, allora $rg(M_{n+1,n}) = 0$)

□

Dunque, la caratteristica di Eulero-Poincaré è un invariante topologico, anzi è un invariante omotopico, perché tali sono i ranghi dei gruppi di omologia.

Esercizio: Provare, utilizzando i numeri di Betti, che la caratteristica di E.P. della sfera è 2, quella del toro è 0, e quella del piano proiettivo è 1.

2 VARIETÀ TOPOLOGICHE

Definizione 2.1. Uno spazio topologico M è detto **varietà topologica** se ogni suo punto ha un intorno aperto in M omeomorfo a un disco aperto di \mathbb{R}^n .

Per un punto $x \in M$ si dimostra, utilizzando il teorema di Brouwer di invarianza della dimensione, che x non può avere un intorno omeomorfo a \mathbb{R}^n e uno omeomorfo a \mathbb{R}^m , con $n \neq m$, dunque ha senso parlare di dimensione locale.

Teorema 2.1. Sia M una varietà connessa e siano $x, y \in M / x \neq y$. Allora $dim(M)_x = dim(M)_y$.

Dimostrazione. Supponiamo che sia non vuoto l'insieme $M(m) = \{x \in M / dim(M)_x = m\}$. Esso risulta un aperto di M . Infatti ogni $x \in M(m)$ ha un intorno aperto U omeomorfo a \mathbb{R}^m , allora ogni punto di U appartiene ad $M(m)$ e quindi $U \subseteq M(m)$.

Consideriamo $M \setminus M(m) = \{y \in M / dim(M)_y \neq m\}$. Sia $y \in M \setminus M(m)$ e tale che la sua dimensione locale, mediante un intorno V , sia $n \neq m$. Per quanto detto prima, ogni punto di V ha dimensione n e dunque $M \setminus M(m)$ è un aperto.

Per ipotesi M è connessa e di conseguenza una delle due componenti disgiunte è vuota. Avendo supposto $M(m) \neq \emptyset$, risulta $M \setminus M(m) = \emptyset$. □

Per quanto dimostrato, se M è una varietà connessa ha senso parlare di dimensione globale.

Definizione 2.2. Si definisce **n-varietà con bordo** una coppia $(M, \partial M)$ che soddisfa le seguenti proprietà:

- i) $\forall x \in M - \partial M$, x ha un intorno aperto in M omeomorfo a \mathbb{R}^n ;
- ii) $\forall x \in \partial M$, x ha un intorno aperto in M omeomorfo a \mathbb{R}^{n+} ;
- iii) ∂M è una $(n-1)$ varietà senza bordo.

Ne segue che una varietà topologica M senza bordo è un caso particolare di varietà con bordo, il cui bordo è vuoto.

Un esempio di varietà con bordo è D^2 , dove il bordo è S^1 ossia una 1-varietà e $\forall x \in \partial D^2 = S^1$, x ha come intorno un semi disco che nella topologia di D^2 è un aperto.

Definizione 2.3. Una varietà M si dice **chiusa** se è compatta e senza bordo.

3 LE SUPERFICI

Definizione 3.1. Si definisce **superficie** con, o senza, bordo una varietà topologica di dimensione 2 rispettivamente con, o senza, bordo.

Le superfici che andremo a considerare sono quelle chiuse e connesse. Per esse vale il Teorema di classificazione delle superfici.

Per poter enunciare tale Teorema occorre dare la definizione di orientabilità di una superficie ed occorrono strumenti e considerazioni che faremo qui di seguito e nei prossimi paragrafi.

Teorema 3.1 (di Rado (1925)). *Ogni superficie chiusa e connessa è triangolabile, cioè esiste un complesso simpliciale K tale che $|K| \sim M$.*

Per il Teorema 3.1 l'orientabilità di una superficie si può definire a partire dalla nozione di complesso simpliciale orientato.

Osservazione: Sia M una superficie chiusa e connessa. Una triangolazione di M gode di particolari proprietà:

- 1) Ogni semplice di dimensione 1 è esattamente faccia di due semplici di dimensione 2.
- 2) Per ogni vertice di K è possibile ordinare circolarmente i semplici di dimensione 2 della stella, in modo tale che due semplici consecutivi abbiano sempre un lato in comune

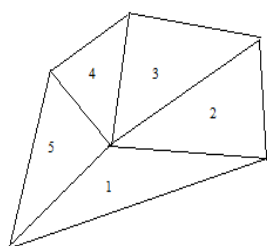


Figura 1

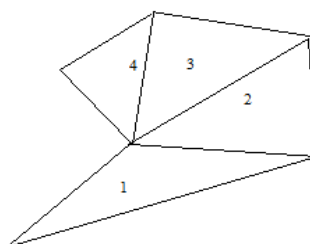
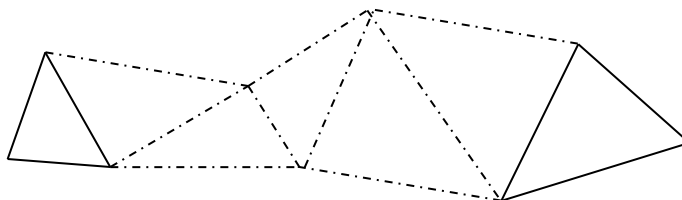


Figura 2

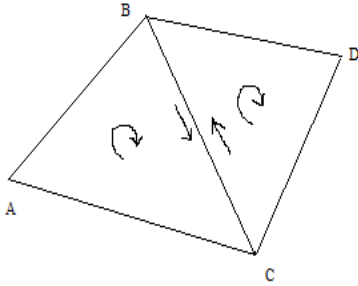
- 3) Dati due semplici disgiunti σ e $\bar{\sigma}$ di dimensione 2 è possibile “passare” dall’uno all’altro mediante una sequenza finita di semplici di dimensione 2 e 1



$$\sigma = \sigma_2^1 l_1 \sigma_2^2 l_2 \sigma_2^3 l_3 \dots \sigma_2^h = \bar{\sigma}, \quad \text{con } \sigma_2^i > l_i < \sigma_2^{i+1}.$$

Dunque, una triangolazione di una superficie è un particolare complesso simpliciale, e già sappiamo che orientare un complesso simpliciale significa orientare ciascun semplice del complesso.

Definizione 3.2. Una orientazione di K si dice compatibile se le orientazioni di due arbitrari semplici di dimensione 2 aventi una 1 faccia in comune inducono su questa orientazioni opposte. K si dice orientabile se possiede una orientazione compatibile.



Orientazioni coincidenti sui triangoli inducono orientazioni opposte sul lato comune BC.

ATTENZIONE: NON è vero che una triangolazione di M ammette sempre un'orientazione compatibile. Infatti il nastro di Möbius è un esempio di superficie con bordo non orientabile.

Proposizione 3.1. *Siano M ed M' due superfici omeomorfe. Se M è orientabile anche M' lo è.*

La dimostrazione segue banalmente dal fatto che da una triangolazione di M con una orientazione compatibile se ne ottiene una di M' componendo con un omeomorfismo tra M ed M' .

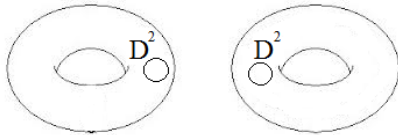
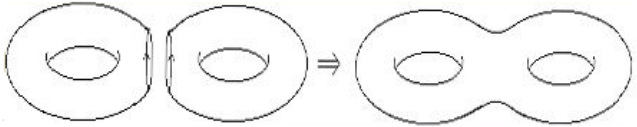
4 SOMMA CONNESSA DI SUPERFICI

Definizione 4.1. Siano M e M' due superfici. Siano A_1 e A_2 due aperti rispettivamente di M e M' , le cui chiusure siano entrambe omeomorfe al disco D^2 .

La somma connessa di M e M' è definita come lo spazio che si ottiene rimuovendo gli interni dei due dischi considerati da M e M' e "incollando" le due superfici rimanenti lungo i bordi di tali dischi in modo da conservare l'orientazione. È facile verificare che tale spazio è una superficie: basta controllare come sono fatti gli intorni dei punti che vengono incollati.

La somma connessa viene indicata con il simbolo $\#$.

Esempio: Consideriamo due tori. La loro somma connessa si ottiene nel seguente modo:

- considero un disco su entrambi i tori
 
- elimino da entrambi i tori i dischi aperti considerati e incollo identificando le circonferenze (bordi dei dischi eliminati), in modo da conservare l'orientazione
 

La superficie ottenuta dalla somma connessa di due tori è detta *bi-toro*.

Proposizione 4.1. *L'insieme delle classi di omeomorfismo delle superfici con l'operazione # di somma connessa è un monoide commutativo, infatti:*

- i) # è commutativa;
- ii) # è associativa;
- iii) esiste l'elemento neutro che è la sfera.

La dimostrazione è lasciata per esercizio. Si osservi che l'associatività di # si dimostra tenendo conto del Teorema di omogeneità¹ per le varietà.

Proposizione 4.2. *Siano M_1 e M_2 due superfici. Si ha che*

$$\chi(M_1 \# M_2) = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2.$$

Dimostrazione. Calcoliamo in primo luogo $\chi(M_1) + \chi(M_2)$.

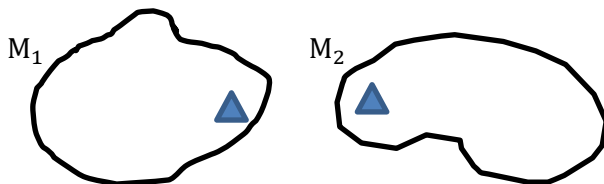
$$\chi(M_1) + \chi(M_2) = (\alpha_2^1 - \alpha_1^1 + \alpha_0^1) + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2 + \alpha_0^2)$$

dove: - α_2^i è il numero di triangoli;

- α_1^i è il numero di lati;

- α_0^i è il numero di vertici.

Calcoliamo ora $\chi(M_1 \# M_2)$.



Si può pensare di eliminare da entrambe le superfici gli interni di due triangoli, essendo essi omeomorfi a D^2 .

Facendo la somma connessa si ha:

$$\begin{aligned} \chi(M_1 \# M_2) &= [(\alpha_2^1 - 1) - (\alpha_1^1 - 3) + (\alpha_0^1 - 3)] + [(\alpha_2^2 - 1) - \alpha_1^2 + \alpha_0^2] = \\ &= (\alpha_2^1 - \alpha_1^1 + \alpha_0^1) + (\alpha_2^2 - \alpha_1^2 + \alpha_0^2) - 2 = \chi(M_1) + \chi(M_2) - 2. \end{aligned}$$

□

Iterando l'operazione di somma si ottiene la seguente, più generale

Proposizione 4.3. *Per la somma connessa di h superfici M_i vale la relazione*

$$\chi(M_1 \# \dots \# M_h) = \sum_{i=1}^h \chi(M_i) - 2(h - 1).$$

¹ Teorema di omogeneità: "Sia M una varietà topologica connessa e siano A e B una coppia di punti di M . Allora esiste un omeomorfismo dalla varietà in sé, che muta A in B e B in A ."

Provare per esercizio la seguente

Proposizione 4.4. *La somma connessa di h superfici è orientabile se, e solo se, tutte le superfici addendi sono orientabili.*

Suggerimento per la dimostrazione: provare prima nel caso di due superfici, utilizzando per la somma una triangolazione costruita a partire da due triangolazioni delle superfici date.

5 L'ETICHETTA DELLE SUPERFICI ELEMENTARI

Ad ogni superficie, ottenibile come spazio quoziente di un poligono, è possibile associare un'etichetta, ossia una sequenza ordinata di lettere che indica come i lati vengono identificati nel quoziente, nel seguente modo:

- si sceglie un verso di percorrenza (orario o antiorario) del perimetro del poligono dopo aver indicato con la stessa lettera i lati da identificare e con una freccia il verso dell'identificazione;
- si riporta la lettera che denota il lato se il verso di percorrenza è concorde con il verso dell'identificazione oppure la lettera con esponente -1 se i due versi sono discordi.

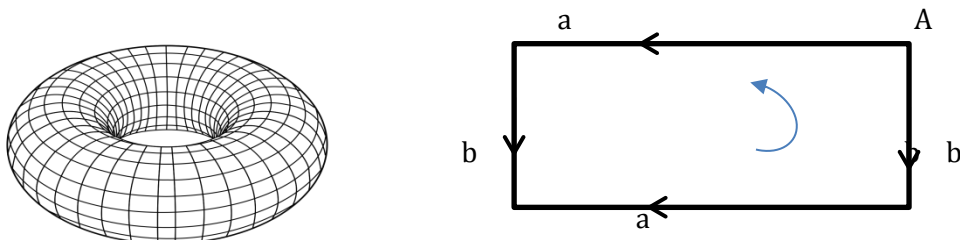
Si ottiene così una "parola".

Osservazione: È indifferente il vertice da cui si parte, ma bisogna far attenzione nell'associare l'etichetta ad una superficie, perché una "parola" non è commutativa.

Per convenzione, negli esempi che seguono, si sceglie il verso di percorrenza antiorario.

5.1 IL TORO

Il toro può essere visto come quoziente di un rettangolo con le identificazioni mostrate in figura.



Partendo dal vertice indicato in figura con A si ottiene la seguente parola o etichetta:

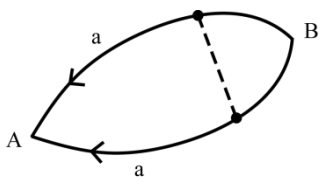
$$aba^{-1}b^{-1}$$

Dalla “parola” si riesce a capire quali sono i lati identificati e in che verso sono stati identificati. Nel nostro caso i lati identificati con la lettera a oppure b hanno lo stesso verso, perché compaiono con esponenti diversi.

5.2 LA SFERA S^2

La sfera può essere pensata sia come quoziente di un poligono di due lati, che come quoziente di un poligono di quattro lati.

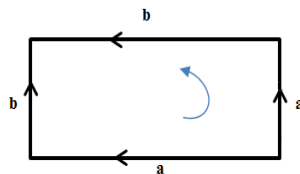
Caso 1. Sfera come quoziente di un poligono di due lati



L'identificazione è mostrata in figura: vengono posti equivalenti punti simmetrici rispetto ad AB.

L'etichetta della sfera risulta aa^{-1} .

Caso 2. Sfera come quoziente di un poligono di quattro lati.

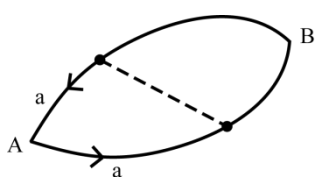


Anche in questo modo si ottiene l'etichetta

$$abb^{-1}a^{-1} = (ab)(b^{-1}a^{-1}) = cc^{-1}$$

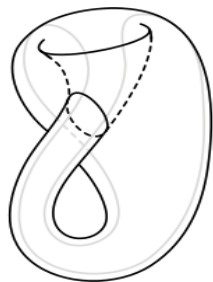
5.3 IL PIANO PROIETTIVO

Il piano proiettivo può essere visto come spazio quoziente di un poligono con due lati di cui vengono identificati punti simmetrici rispetto al punto medio di AB.

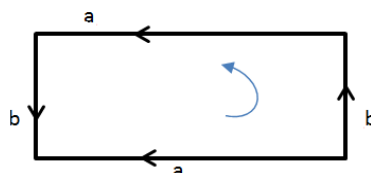


L'etichetta del piano proiettivo è aa .

5.4 LA BOTTIGLIA DI KLEIN



La bottiglia di Klein può essere vista come spazio quoziente di un rettangolo con la seguente identificazione



Dunque l'etichetta associata alla bottiglia di Klein è $aba^{-1}b$.

Tabella delle etichette delle quattro superfici elementari:

SUPERFICIE	ETICHETTA
Toro	$aba^{-1}b^{-1}$
Sfera	aa^{-1}
Piano proiettivo	aa
Bottiglia di Klein	$aba^{-1}b$

6 TEOREMA DI CLASSIFICAZIONE DELLE SUPERFICI

Sia data una qualunque superficie chiusa e connessa M . Mediante oculate operazioni di “taglio” sui lati, la triangolazione di M (esistente per il teorema di Rado) viene trasformata in quella di un poligono con un numero pari di lati di bordo. La superficie di partenza risulta un quoziente di tale poligono in cui i lati del bordo vengono identificati a coppie (così da ricucire i tagli).

Proposizione 6.1. *Ogni superficie chiusa e connessa M può essere ottenuta come quoziente di un poligono con un numero pari di lati di bordo.*

A questo punto va detto che del teorema di classificazione daremo solo la linea dimostrativa, senza entrare nei dettagli. Lo studente può trovare la dimostrazione completa sul testo di W.S. Massey: *Algebraic topology: an introduction*.

A partire dal poligono di cui M è quoziente si procede ad etichettare i lati di bordo con lo stesso metodo descritto all'inizio del precedente paragrafo, e si fissa un verso di percorrenza del bordo. Si arriva così ad associare alla superficie una parola con $2n$ lettere a coppie uguali, la sua etichetta. Si definiscono lettere del 1° tipo quelle che in una parola compaiono con esponente diverso e lettere del 2° tipo quelle che compaiono con lo stesso esponente. Ad esempio, nell'etichetta della bottiglia di Klein $aba^{-1}b$ la lettera a è del 1° tipo, mentre la lettera b è del 2° tipo. La parola etichetta viene poi *manipolata* con successivi spostamenti, o sostituzioni, o inserimenti, o soppressioni di gruppi di lettere. Ciascuna di queste operazioni deve tradurre il passaggio dalla superficie di partenza ad una omeomorfa, e quindi deve essere geometricamente lecita. Tanto per fare un esempio semplice, è lecito inserire o sopprimere, in un qualunque punto di una parola, un monomio del tipo aa^{-1} , perché questo corrisponde ad aggiungere, od eliminare, la somma connessa con una sfera, che sappiamo essere neutra. Vediamo ad esempio cosa accade per la parola $aba^{-1}b$, etichetta della bottiglia di Klein. Inseriamo aa^{-1} dopo la prima a . Otteniamo la parola $aaa^{-1}ba^{-1}b = aa(a^{-1}b)(a^{-1}b) = aacc$. Questo ci dice che la bottiglia di Klein è omeomorfa alla somma connessa di due piani proiettivi.

Quello cui si perviene, dopo aver effettuato le operazioni che occorrono, porta alla seguente

Proposizione 6.2. *Se etichettando una superficie chiusa e connessa che non sia una sfera:*

- *non ci sono lettere del 2° tipo, allora la parola ad essa associata si può ridurre ad una del tipo $aba^{-1}b^{-1}cdc^{-1}d^{-1} \dots pqp^{-1}q^{-1}$, e quindi la superficie è omeomorfa ad una somma connessa di tori;*
- *sono presenti lettere del 2° tipo, allora la parola ad essa associata si può ridurre ad una del tipo $aabbcc \dots pp$, e quindi la superficie è omeomorfa ad una somma connessa di piani proiettivi.*

Osservazione: In entrambi i casi, si arriva ad una sequenza in cui compaiono solo lettere di uno stesso tipo.

Tenendo presente la proposizione 4.4 ed il fatto che la sfera ed il toro sono orientabili, mentre il piano proiettivo non è orientabile, si ha poi la seguente

Proposizione 6.3. *Ogni superficie chiusa e connessa orientabile è una sfera oppure una somma connessa di tori. Ogni superficie chiusa e connessa non orientabile è somma connessa di piani proiettivi.*

A questo punto, si hanno tutte le conoscenze per poter comprendere il seguente teorema.

Teorema 6.1 (Teorema di classificazione delle superfici).

Due superfici chiuse e connesse sono omeomorfe se, e solo se, sono entrambe orientabili o entrambe non orientabili e hanno la stessa caratteristica di Eulero-Poincaré.

Dimostrazione. (\Rightarrow) banale;

(\Leftarrow) Bisogna dimostrare che per le superfici chiuse e connesse orientabili (non orientabili) la caratteristica di Eulero-Poincaré è un invariante totale.

Supponiamo che M sia una superficie orientabile diversa da una sfera.

Per la proposizione 6.3 M risulta essere somma connessa di h tori, cioè

$$M = T_1^2 \# \dots \# T_h^2,$$

pertanto

$$\chi(M) = \chi(T_1^2 \# \dots \# T_h^2) = \sum_{i=1}^h \chi(T_i^2) - 2(h-1) = -2(h-1) \Rightarrow \chi(M) = -2(h-1) \quad (1)$$

Supponiamo che M sia una superficie non orientabile.

Per la proposizione 6.3 M risulta essere somma connessa di piani proiettivi, cioè

$$M = P_1^2 \# \dots \# P_h^2,$$

pertanto

$$\chi(M) = \chi(P_1^2 \# \dots \# P_h^2) = \sum_{i=1}^h \chi(P_i^2) - 2(h-1) = h - 2(h-1) \Rightarrow \chi(M) = 2 - h \quad (2)$$

Supponiamo che M_1 e M_2 siano entrambe orientabili e tali che $\chi(M_1) = \chi(M_2)$.

Per la (1) le due superfici risultano essere somme connesse dello stesso numero di tori, e pertanto esse sono omeomorfe.

La dimostrazione è analoga se M_1 e M_2 sono entrambe non orientabili e tali che $\chi(M_1) = \chi(M_2)$.

□

Per concludere si enunciano i seguenti risultati le cui dimostrazioni sono lasciate per esercizio, ma si trovano comunque nel citato testo di Massey.

Teorema 6.2. *La somma connessa di un toro con un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di una bottiglia di Klein con un piano proiettivo*

$$T^2 \# P^2 \sim K^2 \# P^2.$$

Suggerimento: Un piano proiettivo lo si può vedere come un nastro di Möbius “incollato” ad un disco lungo la circonferenza di bordo, mentre una bottiglia di Klein la si può vedere come un nastro di Möbius incollato ad un altro nastro di Möbius.

Corollario 6.1. *La somma connessa di un toro con un piano proiettivo è omeomorfa alla somma connessa di tre piani proiettivi.*