

# Corso di Calcolatori Elettronici I

---

## Algebra di Boole

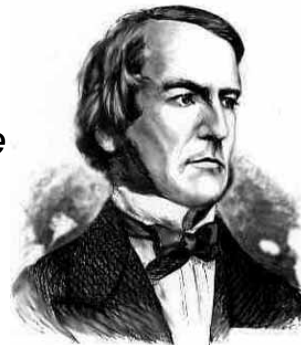
Dipartimento di Informatica e Sistemistica  
Università Degli Studi di Napoli Federico II

1

# Algebra di Boole

---

- ◆ George Boole (1815-1864)
- ◆ *An investigation into the laws of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities*



2

## Algebra di Boole

- ◆ E' uno strumento per l'analisi e la sintesi delle reti di commutazione.
- ◆ Consente di descrivere in forma algebrica le funzioni dei circuiti componenti e delle reti, fornendo altresì i metodi per la realizzazione del progetto logico.
- ◆ Stabilisce una corrispondenza biunivoca fra espressioni algebriche e reti di commutazione.

3

## Algebra astratta

Un'Algebra Astratta è costituita da:

un insieme  $K$  (sostegno)

+

due leggi binarie di composizione interna “+” e “.”

In altri termini, un'Algebra Astratta è definita da una terna  $\langle K, +, \cdot \rangle$

- ◆ L'*Algebra di Boole* è un'algebra astratta dotata di un insieme di ulteriori proprietà

4



## Proprietà dei reticoli

- ◆ I reticoli sono *ordinati*, ovvero posseggono una relazione d'ordine “ $\leq$ ” così definita

$$x \leq y \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} x+y=y$$

- ◆ Ricordiamo che una relazione d'ordine “ $\leq$ ” deve godere delle seguenti proprietà:
  - riflessiva:  $x \leq x$
  - antisimmetrica:  $x \leq y$  e  $y \leq x \Rightarrow x = y$
  - transitiva:  $x \leq y$  e  $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

7

## Reticoli distributivi

- ◆ Un reticolo si dice distributivo se per ogni elemento di  $K$  vale la proprietà:

***distributiva***

$$P5 : a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

$$P'5 : a + (b \cdot c) = (a+b) \cdot (a+c)$$

8

## Minimo e Massimo

- ◆ Un reticolo distributivo si dice dotato di minimo e massimo assoluti se in  $K$  sono presenti due elementi - che diremo 0 e 1 rispettivamente - i quali verificano la *proprietà del minimo e massimo*:

$$P6 : a \cdot 0 = 0$$

$$P'6 : a + 1 = 1$$

9

## Complemento

- ◆ Un reticolo distributivo si dice complementato se per ogni elemento  $a$  di  $K$  esiste ed è unico un elemento che diremo (complemento di  $a$ ) per il quale è valida la proprietà

**del complemento:**

$$P7 : a \cdot \bar{a} = 0$$

$$P'7 : a + \bar{a} = 1$$

10

## Postulati: ricapitolando

|              |    |                                     |     |   |
|--------------|----|-------------------------------------|-----|---|
| Commutativa  | P1 | $a+b=b+a$                           | P'1 | $a \cdot b=b \cdot a$                     |
| Associativa  | P2 | $(a+b)+c=a+(b+c)$                   | P'2 | $(a \cdot b) \cdot c=a \cdot (b \cdot c)$ |
| Idempotenza  | P3 | $(a+a)=a$                           | P'3 | $(a \cdot a)=a$                           |
| Assorbimento | P4 | $a+(a \cdot b)=a$                   | P'4 | $a \cdot (a+b)=a$                         |
| Distributiva | P5 | $a \cdot (b+c)=a \cdot b+a \cdot c$ | P'5 | $a+(b \cdot c)=(a+b) \cdot (a+c)$         |
| Min e max    | P6 | $a \cdot 0=0$                       | P'6 | $a+1=1$                                   |
| Complemento  | P7 | $a \cdot (\bar{a})=0$               | P'7 | $a+(\bar{a})=1$                           |

## Definizione di AdB

- ◆ Un reticolo distributivo, dotato di minimo e massimo assoluti e complementato, si dice un'algebra di Boole:
- ◆ La sestupla

$$\langle K, +, \cdot, \bar{\phantom{x}}, 0, 1 \rangle$$

## Legge di dualità

- ◆ Da qualsiasi identità booleana se ne può trarre un'altra per *dualità*, sostituendo cioè ad ogni operatore e agli elementi 0 ed 1 il rispettivo duale.
- ◆ In altre parole, i 14 postulati impiegati per definire l'algebra non sono tutti indipendenti fra loro

13

## Variabili e funzioni booleane

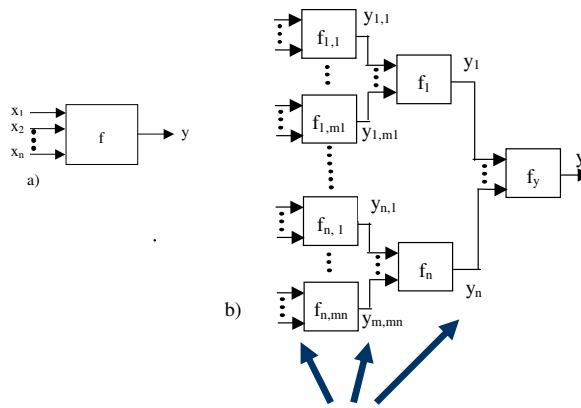
- ◆ Elementi del sostegno dell'algebra  $K \rightarrow$  **valori booleani**
- ◆ Variabili che possono assumere valori booleani  $\rightarrow$  **variabili booleane**
- ◆ Funzioni di variabili booleane in  $K \rightarrow$  **funzioni booleane**

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

- ◆ Le variabili possono essere a loro volta funzioni booleane
- ◆ Un insieme  $F$  di funzioni sul sostegno di un'algebra si dice **funzionalmente completo** se *qualsiasi* funzione dell'algebra può essere ottenuta come composizione di funzioni appartenenti ad  $F$

14

## Variabili e funzioni booleane



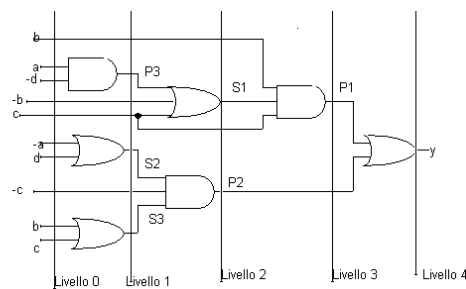
- ◆ Livello di una variabile in una funzione composta

15

## Un esempio (1/3)

- ◆ Applichiamo le proprietà viste sinora per trasformare questa funzione

$$y = bc(\overline{ad} + \overline{b} + c) + \overline{c}(d + \overline{a})(b + c)$$

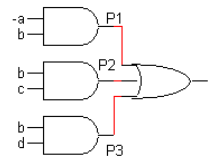


16

## Un esempio (2/3)

- ◆ Provate ad applicare tutte le proprietà viste sinora (nell'ordine: distributiva, commutativa, idempotenza, assorbimento)
- ◆ Possiamo trasformare la precedente funzione in questa:

$$y = \bar{a}b + bc + bd$$



17

## Soluzione (3/3)

$$y = bc(a\bar{d} + \bar{b} + c) + \bar{c}(d + \bar{a})(b + c)$$

Proprietà distributiva

$$y = bca\bar{d} + bcb + bcc + \bar{c}db + \bar{c}dc + \bar{c}\bar{a}b + \bar{c}\bar{a}c$$

Proprietà commutativa

$$bb = b; cc = c$$

$$y = abc\bar{d} + bcb + bcc + \bar{c}db + \bar{c}dc + \bar{c}\bar{a}b + \bar{c}\bar{a}c$$

Assorbimento,  $(bc = bc + abcd)$

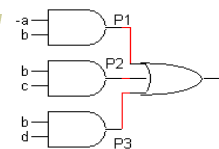
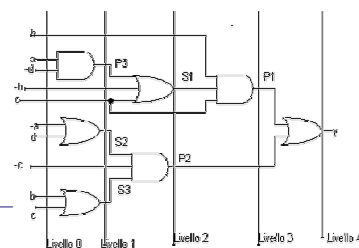
$$y = bc + b\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c} \Rightarrow y = b(c + (\bar{c}(\bar{a} + d)))$$

Proprietà distributiva  $[a+bc=(a+b)(a+c)]$

$$y = c + \bar{c}(\bar{a} + d) = (c + \bar{c})(c + (\bar{a} + d)) = \bar{a} + c + d$$

$$y = b(\bar{a} + c + d)$$

$$y = \bar{a}b + bc + bd$$



## Funzione duale

- ◆ Data una funzione  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  in una qualsiasi forma, diremo funzione duale di  $f$  la funzione  $\delta_f$  che ha per forma la forma duale di  $f$
- ◆ Ad esempio:

$$y = \bar{a} + b(c + 0)$$

$$\delta_y = \bar{a}(b + c \cdot 1)$$

19

## Alcuni “teoremi”

- ◆  $0$  ed  $1$  sono l'uno il complemento dell'altro
- ◆ Per la dimostrazione:
  - Ricordate come sono definiti il “minimo” ed il “massimo” ( $a=1$  per la  $P_6$  e  $a=0$  per la  $P'_6$ )
  - verificate la definizione di complemento (esiste ed è *unico*...)

$$1 \cdot 0 = 0 \qquad 1 + 0 = 1 \qquad (P_6, P'_6)$$

20

## Convoluzione

- ◆ Negando due volte un elemento si ottiene l'elemento stesso
- ◆ Per la dimostrazione
  - Applicate la definizione di complemento sia ad un elemento  $a$  che al suo negato (e poi la proprietà commutativa), e ricordate che il complemento è unico

$$\underline{a \cdot \bar{a}} = 0$$

$$\underline{a + \bar{a}} = 1$$

(P7, P'7)

$$\bar{a} \cdot \bar{\bar{a}} = 0$$

$$\bar{a} + \bar{\bar{a}} = 1$$

(unicità del complemento)

21

## Elementi neutri di somma e prodotto

- ◆  $0$  è l'elemento neutro della somma
- ◆  $1$  è l'elemento neutro del prodotto
- ◆ Per la dimostrazione
  - Per le proprietà dell'assorbimento
    - $a + (a \cdot 0) = a$  e  $a \cdot (a + 1) = a$
  - Per la proprietà del minimo e del massimo si ha che
    - $a \cdot 0 = 0$  e  $a + 1 = 1$
  - Quindi  $a + 0 = a$  e  $a \cdot 1 = a$

22

## Assorbimento del complemento

$$a + \bar{a}b = a + b$$

- ◆ Per la dimostrazione
  - Usate la proprietà distributiva ed infine il complemento

$$\underline{a + \bar{a}b = (a + \bar{a})(a + b)} \quad (P5)$$

$$a + \bar{a}b = (a + b) \quad (P7)$$

23

## Teoremi di De Morgan

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b}$$

$$\overline{ab} = \bar{a} + \bar{b}$$

- ◆ Per la dimostrazione
  - Consideriamo ad esempio la prima: dovete dimostrare che  $\overline{a+b}$  è il complemento dell'espressione al secondo membro. Per farlo applicate la definizione di complemento.

24

## Teorema di De Morgan

$$\overline{a \cdot b} = \bar{a} + \bar{b} \quad (1)$$

$$\overline{a + b} = \bar{a} \cdot \bar{b} \quad (2)$$

$$(a + b) + (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 1 \quad (1.1)$$

$$(a + b) \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b}) = 0 \quad (1.2)$$

La (2) vale per dualità

(1.1) *Dimostrazione*

$$\begin{aligned} a + b + \bar{a} \cdot \bar{b} &= a + \bar{a} \cdot \bar{b} + b + \bar{a} \cdot \bar{b} = && (P1, P3) \\ &= a + \bar{b} + b + \bar{a} = && (ass.comp) \\ &= a + \bar{a} + b + \bar{b} = && (P1) \\ &= 1 + 1 = 1 && (P'7, P'6) \end{aligned}$$

(1.2) *Dimostrazione*

$$\begin{aligned} (a + b) \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} &= a \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} + b \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} = && (P5) \\ &= 0 \cdot \bar{b} + 0 \cdot \bar{a} = && (P7) \\ &= 0 + 0 = 0 && (P6, P3) \end{aligned}$$

## Teorema di Shannon

- ◆ Il complemento di una funzione è ottenuto sostituendo ad ogni variabile il suo complemento e scambiando ogni funzione componente con la sua duale.
- ◆ Generalizza De Morgan

$$\overline{f(x_1, \dots, x_n)} = \delta_f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

## Un altro teorema

$$(1) \quad x + y = xy \Rightarrow x = y$$

◆ Per la dimostrazione:

- Si può dimostrare che sono vere entrambe le seguenti disequazioni  $x \geq y$  e  $y \geq x$
- Conviene tenere presente le seguenti disequazioni, sempre vere:

- $a \geq ab \rightarrow x \geq xy$  e  $y \geq xy$
- $a + b \geq a \rightarrow x + y \geq y$  e  $x + y \geq x$

● Per cui, se vale la (1)

- $x \geq xy = x + y \geq y$
- $y \geq xy = x + y \geq x$
- Si ha quindi  $x = y$

27

## Proprietà del complemento

$$(1) \quad xy = 0 \Rightarrow y \leq \bar{x}$$

◆ Per la dimostrazione

- Dimostrate che  $x$  è il complemento di  $(\bar{x} + y)$
- Applicate la definizione della relazione d'ordine  $\geq$

$$(\bar{x} + y) + x = 1$$

$$x \bullet (\bar{x} + y) = 0$$

quindi se vale la (1)

$$(\bar{x} + y) = \text{complemento di } x = \bar{x} \text{ e quindi } (\bar{x} + y) = \bar{x} \text{ implica } y \leq \bar{x}$$

*n.b.*  $a \leq b \Leftrightarrow a + b = b$

28

## Un ulteriore teorema

- ◆ Se valgono le
$$x+y=a, \quad xy=0$$
allora  $y$  è unico
- ◆ Per la dimostrazione:
  - Supponete che esistano due valori distinti  $z$  e  $y$  che soddisfano la proprietà indicata sopra. Moltiplicate membro a membro fino ad ottenere  $y=z$

29

## Principio di eliminazione

$$x + y = x + z \Rightarrow \bar{x}y = \bar{x}z$$

- ◆ Per la dimostrazione
  - Usate due volte la proprietà di assorbimento del complemento. Sfruttate la proprietà di unicità enunciata nel precedente lucido.

30

## Principio di eliminazione

- ◆ Nell'algebra di Boole non vale il principio di eliminazione:
- ◆  $x+y=x+z$  non implica necessariamente  $y=z$  !
- ◆ L'implicazione vale se è verificata la condizione aggiuntiva  $xy=xz$

31

## Algebre notevoli

- ◆ Le proprietà ed i teoremi dimostrati precedentemente si applicano a qualsiasi "porzione di realtà" che soddisfi gli assiomi dell'algebra astratta
- ◆ Si individuano così
  - l'algebra degli insiemi
  - l'algebra della logica delle proposizioni
  - l'algebra dei circuiti

32

# Algebra degli insiemi

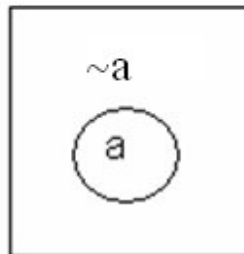
| Insiemi     |                  | Modello matematico |                  |
|-------------|------------------|--------------------|------------------|
| $\cup$      | unione           | +                  | somma            |
| $\cap$      | intersezione     | $\cdot$            | prodotto         |
| $\sim A$    | complemento      | $\bar{a}$          | complemento      |
| $\emptyset$ | insieme vuoto    | 0                  | minimo assoluto  |
| T           | insieme "totale" | 1                  | massimo assoluto |

33

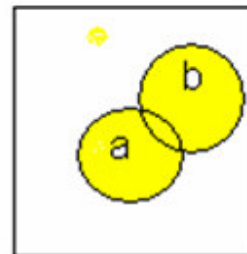
# Algebra degli insiemi (1/2)



a) Insieme universo



b)  $\sim a$



c)  $a \cup b$

34

## Algebra degli insiemi (2/2)

- ◆ Dati due insiemi  $A, B \in T$ , sono definite le operazioni di
  - Unione ( $\cup$ )
  - Intersezione ( $\cap$ )
  - Complemento ( $\sim$ )

$$a \cap \Phi = \Phi$$

$$a \cup T = T$$

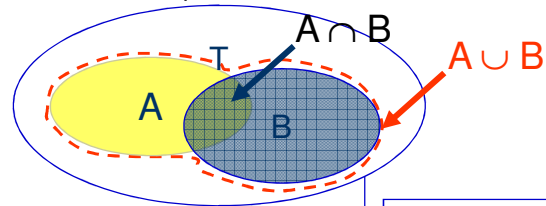


Diagramma di Venn

la sestupla  $\langle K, \cup, \cap, \sim, \Phi, T \rangle$  è un'algebra di Boole.

ove:

- ◆  $K$  indica l'insieme delle parti di  $T$
  - ◆  $\Phi$  indica l'insieme vuoto
- ◆ La relazione d'ordine  $\leq$  equivale alla relazione di inclusione tra insiemi

35

## Teorema di Stone

- ◆ Ogni algebra di Boole è rappresentabile su un'algebra di insiemi.
- ◆ Il modello degli insiemi (e equivalentemente i diagrammi di Venn) può essere assunto come strumento per verificare o dimostrare proprietà di una qualsiasi algebra di Boole.

36

# Algebra della logica

♦ L'insieme  $K=\{0,1\}$  su cui siano definite le operazioni

• Disgiunzione ( $\vee$ )

|        |   |   |
|--------|---|---|
| $\vee$ | 0 | 1 |
| 0      | 0 | 1 |
| 1      | 1 | 1 |

• Congiunzione ( $\wedge$ )

|          |   |   |
|----------|---|---|
| $\wedge$ | 0 | 1 |
| 0        | 0 | 0 |
| 1        | 0 | 1 |

• Negazione ( $\neg$ )

|        |   |   |
|--------|---|---|
| $\neg$ | 0 | 1 |
|        | 1 | 0 |

ovvero la sestupla  $\langle K, \vee, \wedge, \neg, 0, 1 \rangle$  è un'algebra di Boole.

37

# Algebra delle logiche

♦ Due funzioni notevoli nell'algebra delle proposizioni:

■ Funzione equivalenza  $a \Leftrightarrow b$   
 $f(a,b) = ab + \bar{a}\bar{b}$

■ Funzione implicazione  $a \Rightarrow b, f(a,b) = \bar{a} + b$

*Si dice che  $x$  implica  $y$  se e solo se dalla verità di  $x$  (antecedente) scaturisce necessariamente la verità di  $y$  (conseguente). In termini algebrici, essendo l'implicazione falsa se e solo se  $x$  è vera e  $y$  è falsa, applicando il Teorema di De Morgan, si ha*

$$\overline{x \Rightarrow y} = x\bar{y}$$
$$x \Rightarrow y = \bar{x} + y$$

38

# Algebra della logica

♦ Se  $x \Rightarrow y$  è vera, allora  $\bar{x} + y = 1$

$$\begin{aligned} \bar{x} + y &= \bar{x} \cdot \bar{y} + y && \text{(ass.compl)} \\ &= \bar{x} \cdot \bar{y} + xy + y && \text{(P4)} \\ &= \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{y} + xy + yy && \text{(P3)} \\ &= \overline{(x + y)} \cdot \bar{y} + (x + y) \cdot y = 1 && \text{(DeMorgan)} \end{aligned}$$



per le proprietà dell'equivalenza  $ab + \bar{a}b$   
 $x + y = y \Leftrightarrow x \leq y$



***l'implicazione è la relazione d'ordine nell'algebra della logica.***

39

# Considerando l'Algebra delle logica

| Proposizioni    |              | Insiemi  |                  | Modello matematico |                  |
|-----------------|--------------|----------|------------------|--------------------|------------------|
| $\vee$          | Disgiunzione | $\cup$   | unione           | +                  | somma            |
| $\wedge$        | Congiunzione | $\cap$   | intersezione     | $\cdot$            | prodotto         |
| $\neg$          | Negazione    | $\sim A$ | complemento      | $\bar{a}$          | complemento      |
| F               | Falso        | $\Phi$   | insieme vuoto    | 0                  | minimo assoluto  |
| $\forall^\circ$ | Vero         | T        | insieme "totale" | 1                  | massimo assoluto |

\* In inglese T, True

40

## Algebra dei circuiti

- ◆ Associa i simboli “0” e “1” ai livelli logici “basso” e “alto”
- ◆ Un circuito è descritto dalla funzione

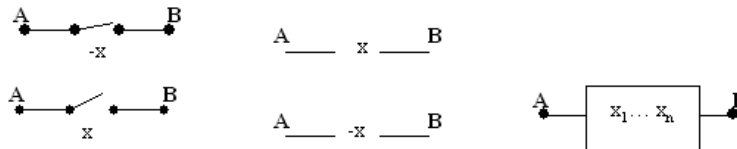
$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

dove:  $y$ =bit di uscita;  $x_1, x_2, \dots, x_n$ =bit di ingresso

41

## Algebra dei circuiti: reti bilaterali

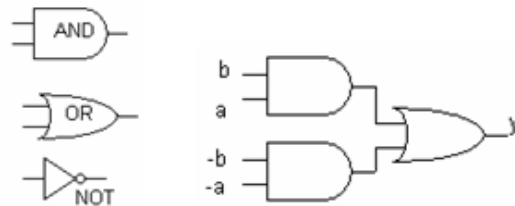
*Rete bilaterale: la funzione di uscita è valutata tra due punti.*



42

## Algebra dei circuiti: reti unilaterali

*Rete unilaterale: il flusso di informazione procede in un unico senso (ingresso → uscita)*



43

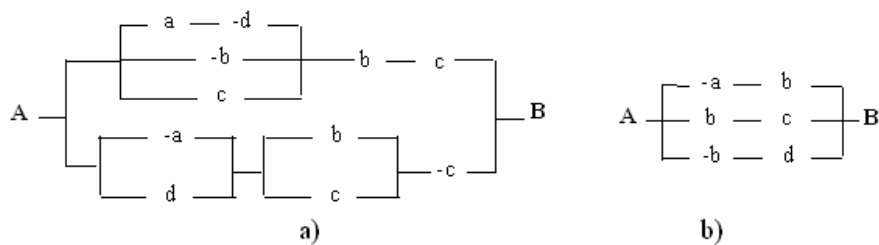
## Algebra dei circuiti: esempio

Le reti possono essere interconnesse in

*Serie*

*Parallelo*

*Serie-Parallelo*



44

## Riassumendo

- ◆ Nelle diverse algebre si utilizzano diversi simboli per definire le operazioni fondamentali ed il massimo e minimo
- ◆ La tabella sottostante li riassume:

| simboli                                   | denominazioni   |
|---|---|
| $+ \vee \cup$                             | somma logica, unione, disgiunzione, OR                  |
| $\cdot \wedge \cap$                       | prodotto logico, intersezione, congiunzione, AND        |
| $\sim a \neg a \bar{a} \underline{a'} -a$ | complementazione, negazione, NOT                        |
| $0 N \Phi F$                              | zero, vuoto, Nullo, falso, basso, assente               |
| $1 T V$                                   | uno, insieme totale, vero, <u>true</u> , alto, presente |

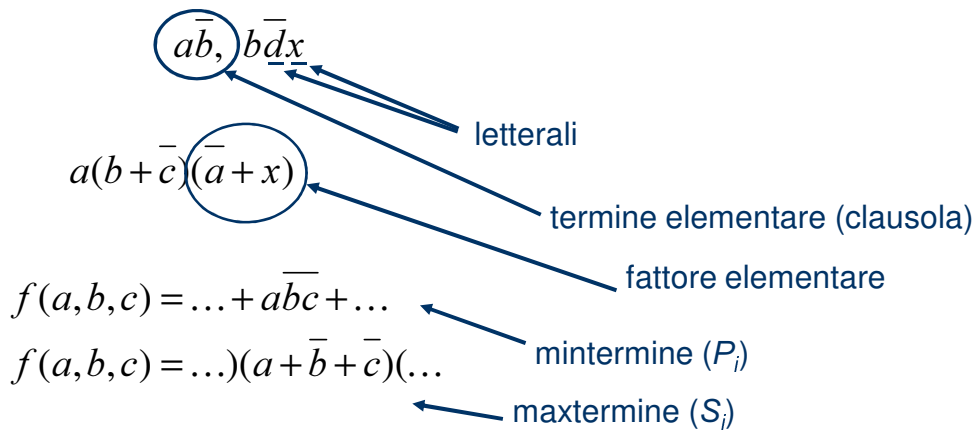
45

## Forme Algebriche

- ◆ L'importanza della forma
  - La corrispondenza biunivoca è tra FORMA e CIRCUITO (e non tra una funzione e un circuito)
  - Le eguaglianze notevoli e quelle derivate fra espressioni equivalgono a equivalenza funzionale fra CIRCUITI

46

## Ancora definizioni...



47

## Mintermini e Maxtermini

$$P_0 = \bar{a}\bar{b}\bar{c} \quad P_5 = \bar{a}\bar{b}c$$

$$S_0 = a+b+c \quad S_5 = \bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$$

$$\bar{P}_i = S_i \quad (\text{da de Morgan})$$

$$\forall i \neq j \quad P_i \cdot P_j = 0, \quad S_i + S_j = 1$$

$$\sum P_i = 1, \quad \prod S_i = 0$$

48

## Tabelle di verità

- ◆ Se l'algebra è finita, qualsiasi funzione può in linea di principio essere rappresentata mediante una tabella, definita **tabella di verità**

49

## Tabelle di verità

- ◆ Funzione algebrica

- Funzione definita in maniera tabellare per cui alla variabile dipendente sono associate tutte le possibili combinazioni delle  $n$  variabili indipendenti.

$$N = k^n$$

*numero delle  
ripetizioni di  $k$  valori  
su  $n$  posti*

$$M = k^N = k^{k^n}$$

*numero delle  
ripetizioni di  $k$  valori  
su  $N$  posti*

ove:

- $n$ =numero delle variabili indipendenti
- $k$ =numero dei valori dell'algebra (ad es.  $k=2$ )
- $N$ =numero totale di punti della funzione
- $M$ =numero totale delle funzioni di  $n$  variabili

*NB:d'ora in avanti si farà esclusivamente riferimento all'algebra primordiale ( $k=2$ )*

## Tabelle di verità

| a | b | c | y |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

51

## Forma normale di tipo P

$$f(x_1, \dots, x_n) = \bar{x}_1 f(0, x_2, \dots, x_n) + x_1 f(1, x_2, \dots, x_n) =$$

$$= \bar{x}_1 [\bar{x}_2 f(0, 0, x_3, \dots, x_n) + x_2 f(0, 1, x_3, \dots, x_n)] +$$

$$x_1 [\bar{x}_2 f(1, 0, x_3, \dots, x_n) + x_2 f(1, 1, x_3, \dots, x_n)]$$

.....

$$= f(0, 0, \dots, 0) \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n + \dots + f(1, 1, \dots, 1) x_1 x_2 \dots x_n = \sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i P_i$$

dove

$$\alpha_0 = f(0, 0, \dots, 0), \alpha_1 = f(0, 0, \dots, 1), \dots, \alpha_{2^n-1} = f(1, 1, \dots, 1),$$

Forma canonica: definisce univocamente la funzione

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i P_i$$

mintermini

“uscite” della funzione: sono gli ‘1’ e ‘0’ della tabella di verità, non sono variabili!

52

## Forma normale di tipo $P$

- ◆ Da quanto visto prima si deduce che una funzione di  $n$  variabili, assegnata mediante una tabella di verità, può essere espressa da una forma disgiuntiva di congiunzioni o, algebricamente, da una somma di prodotti.
- ◆ Ciascun termine della somma è associato ad un "1" presente nella colonna della tabella ed è un prodotto delle  $n$  variabili, ciascuna delle quali nella forma negata o non a seconda che nelle colonne corrispondenti sia presente uno "0" o un "1".
- ◆ Qualsiasi funzione è pertanto "algebrica".

53

## Forma Normale di Tipo $P$

| a | b | c | y |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$y = \overline{a}\overline{b}\overline{c} + \overline{a}\overline{b}c + \overline{a}b\overline{c} + \overline{a}bc + abc$$

54

## Forma normale di tipo $P$

- ◆ Viceversa, qualsiasi funzione algebrica può essere posta in forma normale  $P$  “aggiungendo” i letterali mancanti
- ◆ Basta sviluppare tutte le operazioni fino ad ottenere una somma di prodotti
- ◆ Le clausole che non siano mintermini (ovvero che non contengano tutte le variabili della funzione) possono essere moltiplicate per la somma di tutte le possibili clausole ottenibili con le variabili assenti

55

## Il solito esempio

- ◆ Partendo da

$$y(a, b, c, d) = \bar{a}b + bc + bd$$

56

## Forma normale di tipo S

$$f(x_1 \dots x_n) = \prod_{i=0}^{2^n - 1} (\alpha_i + S_i)$$

- ◆ Si può ottenere con il procedimento duale di quello usato per la forma di tipo  $P$
- ◆ In alternativa, si può negare la forma di tipo  $P$  e poi applicare de Morgan

57

## Forma normale di tipo S

- ◆ Una funzione di  $n$  variabili può essere espressa da una forma congiuntiva di disgiunzioni o, algebricamente, da un prodotto di somme.
- ◆ Ciascun fattore del prodotto è associato ad uno 0 presente nella colonna della tabella ed è una somma delle  $n$  variabili, ciascuna delle quali nella forma negata o non a seconda che nelle colonne corrispondenti sia presente un 1 o uno 0.

58

## Forma Normale di Tipo S

| a | b | c | y |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

$$y = (\bar{a} + b + c) \cdot (\bar{a} + b + \bar{c}) \cdot (\bar{a} + \bar{b} + c)$$

59

## Numero caratteristico

- ◆ E' la stringa ordinata di valori, tipica di ciascuna funzione, di lunghezza  $2^n$  per funzioni di  $n$  variabili e coincidente con la colonna di "0" e "1" nella tabella di verità
- ◆ L'insieme dei numeri caratteristici delle funzioni di  $n$  variabili, costituisce ancora un'algebra di Boole (con le operazioni effettuate "bit a bit")

60

## Numero caratteristico

$$(1) \quad f = a + bc + \bar{a}b$$

$$\# a = 00001111$$

$$\# b = 00110011$$

$$\# c = 01010101$$

$$\# bc = 00010001$$

$$\# a + bc = 00011111$$

$$\# \bar{a}b = 00110000$$

$$\# f = 00111111$$

- ◆ Per provare che è vero, partire dalla (1) e ricavare la forma P. Dopodiché controllare gli 1 della tabella.

61

## Equazioni booleane

$f(x_1, \dots, x_n) = c \quad c \in \{0,1\}$

Una funzione booleana di questo tipo può essere ridotta ad una somma di mintermini o prodotto di maxtermini a seconda che c sia 1 o 0

$$\sum_{i=0}^{2^n-1} \alpha_i \cdot P_i = 1$$

$$\prod_{i=0}^{2^n-1} (\alpha_i + S_i) = 0$$

$c=1$ : In questa forma, si vede che l'equazione è soddisfatta per qualsiasi combinazione di variabili che renda un  $P_i=1$

$c=0$ : In questa forma deve invece essere  $S_i=0$

Nel caso più generale in cui  $c$  non sia una costante, ci si riconduce ad uno dei casi precedenti osservando che:

$$f(X) = g(X) \Leftrightarrow f(X)g(X) + \overline{f(X)g(X)} = H(X) = 1$$

62

## Funzioni incompletamente specificate

- ◆ E' possibile non assegnare il valore di una funzione booleana per alcune n-uple di valori delle sue variabili
  - Il valore può essere irrilevante ai fini del funzionamento del sistema
  - Può esserci una dipendenza tra le variabili che esclude alcune combinazioni

63

## Funzioni incompletamente specificate

- ◆ Si parla pertanto di “**punti di non specificazione**” o *don't care*
- ◆ Due funzioni si dicono compatibili se assumono gli stessi valori, eccetto al più i punti di non specificazione.

64

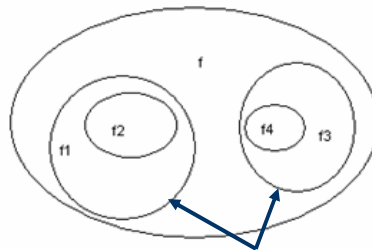
## Implicanti di una funzione

- ◆ Un **implicante** di  $f$  è una funzione  $f_1$  tale che  $\overline{f_1} + f = 1$
- ◆ Nell'insieme degli implicanti di  $f$ , definiamo **implicante primo**, o principale, un implicante che a sua volta non implichi nessun altro implicante.

66

## Implicanti di una funzione

- ◆ Un'interpretazione insiemistica:
  - Tutti i sottoinsiemi di  $f$  sono suoi implicanti



- Solo  $f_1$  ed  $f_3$  sono implicanti primi

67

## Proprietà degli implicanti (1/2)

1. La clausola di una funzione  $f$  in forma normale di tipo  $P$  è un suo implicante

$$f = \sum_{i=1}^n A_i \quad \overline{A_i} + f = \overline{A_i} + (A_1 + A_2 + \dots + A_n) = 1$$

2. Una clausola  $B$  ne implica un'altra  $A$  se e solo se  $B$  contiene tutti i letterali di  $A$
3. La somma di due clausole di ordine  $n$  che contengono  $n-1$  letterali uguali ed in cui un letterale dell'una sia il complemento di quello dell'altra è la clausola di ordine  $n-1$  formata dai letterali comuni (detta **consenso**).

68

## Proprietà degli implicanti (2/2)

3. Ad una funzione può essere aggiunto un suo implicante senza alterarne il valore
4.  $A$  è un implicante di  $f$  se e solo se nella prima forma canonica di  $f$  sono presenti tutti i mintermini aventi  $A$  come fattore
  - Infatti, se  $A$  è un implicante, lo si può aggiungere ad  $f$ , per poi espanderlo in mintermini (facendo comparire anche le variabili assenti in  $A$ )
  - Se, viceversa, sono presenti tutti i mintermini aventi  $A$  come fattore, essi possono essere raccolti in modo da far apparire  $A$  come clausola di  $f$ .

$$f(x, y, z) = xy + yz, \text{ e quindi } xy \Rightarrow f \text{ e } yz \Rightarrow f$$

$$\text{si ha : } f = xy\overline{z} + xyz + x\overline{y}z + \overline{x}yz$$

69

## Diagrammi di Veitch e mappe di Karnaugh

| a | b | c | Y |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |



|   |   | ab |    |    |    |
|---|---|----|----|----|----|
|   |   | 00 | 01 | 11 | 10 |
| c | 0 | 1  |    |    | 1  |
|   | 1 |    | 1  |    |    |

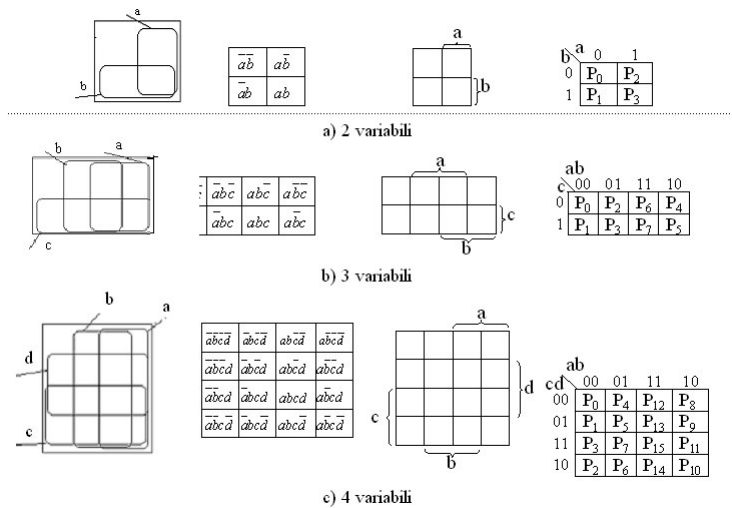
70

## Diagrammi di Veitch e mappe di Karnaugh

- ◆ Le mappe di Karnaugh sono una rappresentazione “tabellare” delle funzioni booleane, alternativa alla tabella di verità
- ◆ Consentono di individuare facilmente “consensi” nell’espressione algebrica

71

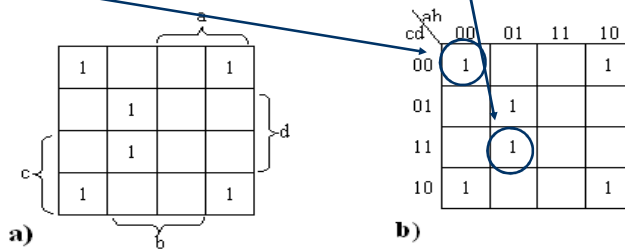
## Diagrammi di Veitch e mappe di Karnaugh



72

## Diagrammi di Veitch e mappe di Karnaugh

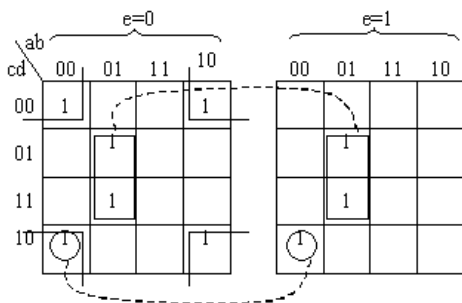
$$y = \overline{a}b\overline{c}d + \overline{a}bc\overline{d} + \overline{a}bcd + a\overline{b}\overline{c}d + a\overline{b}c\overline{d} + abc\overline{d}$$



73

## Diagrammi di Veitch e mappe di Karnaugh

- ◆ Possono essere usate anche per funzioni di 5 o 6 variabili, perdendo tuttavia l'efficacia e l'immediatezza della rappresentazione



74

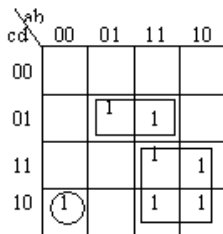
## Proprietà notevoli

- ◆ I mintermini che si oppongono in una sola variabile sono adiacenti e quindi le coppie di quadratini adiacenti rappresentano clausole di ordine  $n-1$ ;
- ◆ Le clausole di ordine  $n-1$  ( $n \geq 2$ ) che si oppongono in una sola variabile sono ancora adiacenti e quindi le "quadruple" rappresentano clausole di ordine  $n-2$ ;
- ◆ Le "ottuple" ( $n \geq 3$ ) rappresentano clausole di ordine  $n-3$ .
- ◆ Le clausole sono anche dette "cubi", o "sottocubi"
- ◆ Maggiore è la dimensione del sottocubo, minore l'ordine (numero di letterali) della clausola
- ◆ I sottocubi di area massima rappresentano gli implicanti primi della funzione

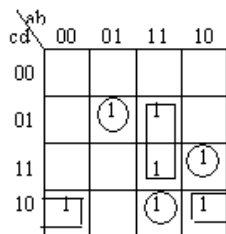
75

## Diagrammi di Veitch e mappe di Karnaugh

Due modi per rappresentare la stessa funzione:



a)



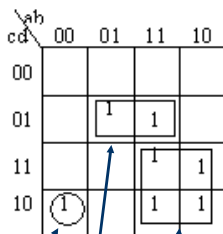
b)

$$a) y_1 = \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{b}\overline{c}\overline{d} + ac \quad b) y_2 = \overline{b}\overline{c}\overline{d} + abd + \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{a}\overline{b}c\overline{d} + abc\overline{d}$$

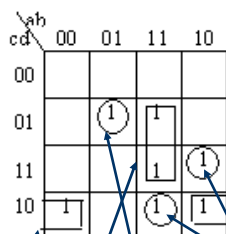
76

## Diagrammi di Veitch e mappe di Karnaugh

Due modi per rappresentare la stessa funzione:



a)



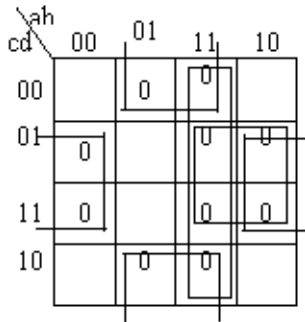
b)

$$a) y_1 = \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{b}\overline{c}\overline{d} + ac \quad b) y_2 = \overline{b}\overline{c}\overline{d} + abd + \overline{a}\overline{b}\overline{c}\overline{d} + \overline{a}\overline{b}c\overline{d} + abc\overline{d}$$

77

## Diagrammi di Veitch e mappe di Karnaugh

- ◆ Mappe per funzioni in forma S



78

## Funzioni di due variabili

Esistono 16 funzioni diverse di due variabili:

| $x$ | $y$ | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ | $f_7$ | $f_8$ | $f_9$ | $f_{10}$ | $f_{11}$ | $f_{12}$ | $f_{13}$ | $f_{14}$ | $f_{15}$ |
|-----|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
|     |     |       |       |       |       |       |       |       |       |       |       | 0        | 1        | 2        | 3        | 4        | 5        |
| 0   | 0   | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        | 1        |
| 0   | 1   | 0     | 0     | 0     | 0     | 1     | 1     | 1     | 1     | 0     | 0     | 0        | 0        | 1        | 1        | 1        | 1        |
| 1   | 0   | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1     | 1     | 0     | 0     | 1        | 1        | 0        | 0        | 1        | 1        |
| 1   | 1   | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0     | 1     | 0        | 1        | 0        | 1        | 0        | 1        |

79

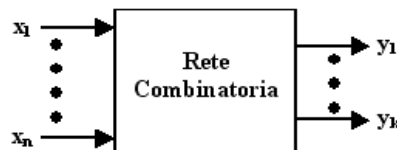
## Funzioni di due variabili

| f              | algebraica                          | nome               | simb-        | f               | algebraica                                 | nome         | simb-             |
|----------------|-------------------------------------|--------------------|--------------|-----------------|--|--------------|-------------------|
| f <sub>0</sub> | 0                                   | contraddizione     |              | f <sub>8</sub>  | $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x + y}$ | NOR          | $x \downarrow y$  |
| f <sub>1</sub> | $x \cdot y$                         | congiunzione-AND   | $x \cdot y$  | f <sub>9</sub>  | $\bar{x} \cdot \bar{y} + x \cdot y$        | equivalenza  | $x \equiv y$ 1    |
| f <sub>2</sub> | $x \cdot \bar{y}$                   | and-not-y          |              | f <sub>10</sub> | $\bar{y}$                                  | <u>nony</u>  | $\bar{y}$         |
| f <sub>3</sub> | x                                   | x                  |              | f <sub>11</sub> | $x + \bar{y}$                              | implicazione | $y \rightarrow x$ |
| f <sub>4</sub> | $\bar{x} \cdot y$                   | and-not-x          |              | f <sub>12</sub> | $\bar{x}$                                  | <u>nonx</u>  | $\bar{x}$         |
| f <sub>5</sub> | y                                   | y                  |              | f <sub>13</sub> | $\bar{x} + y$                              | implicazione | $x \rightarrow y$ |
| f <sub>6</sub> | $\bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y}$ | <u>oresclusivo</u> | $x \oplus y$ | f <sub>14</sub> | $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x \cdot y}$ | <u>nand</u>  | $x \uparrow y$    |
| f <sub>7</sub> | $x + y$                             | disgiunzione.OR    | $x + y$      | f <sub>15</sub> | 1  | tautologia   |                   |

80

## Funzioni booleane “generalizzate”

$$Y = F(X) \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n) \\ \dots \dots \dots \\ y_m = f_m(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$



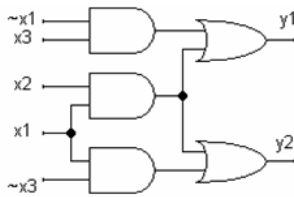
Si può vedere come un'unica funzione a più uscite

81

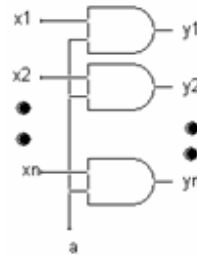
## Funzioni booleane "generalizzate": esempi

$$y_1 = x_1 x_2 + \overline{x_1 x_3}$$

$$y_2 = x_1 x_2 + x_1 x_3$$



$$Y = \alpha \cdot X$$



82

## Funzioni NAND e NOR

NAND

$$x \uparrow y = \overline{x \cdot y} = \overline{x} + \overline{y}$$

NOR

$$x \downarrow y = \overline{x + y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$$

De Morgan



$$x_1 \uparrow x_2 \uparrow \dots \uparrow x_n = \overline{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} = \overline{x_1} + \overline{x_2} + \dots + \overline{x_n}$$

$$x_1 \downarrow x_2 \downarrow \dots \downarrow x_n = \overline{x_1 + x_2 + \dots + x_n} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_2} \cdot \dots \cdot \overline{x_n}$$

83

## Funzioni NAND e NOR

- ♦ NAND e NOR **non** godono della proprietà associativa

$$\text{NAND} \quad (x_1 \uparrow x_2) \uparrow x_3 \neq x_1 \uparrow (x_2 \uparrow x_3) \neq x_1 \uparrow x_2 \uparrow x_3$$

$$\text{NOR} \quad (x_1 \downarrow x_2) \downarrow x_3 \neq x_1 \downarrow (x_2 \downarrow x_3) \neq x_1 \downarrow x_2 \downarrow x_3$$

84

## Funzioni NAND e NOR

- ♦ E' possibile ottenere una AND e una OR tramite NAND e NOR

$$x \cdot y = \overline{x \uparrow y} = \overline{x} \downarrow \overline{y}$$

$$x + y = \overline{x \downarrow y} = \overline{x} \uparrow \overline{y}$$

- ♦ E' possibile ottenere una NOT tramite NAND e NOR

$$\text{NAND} \quad x \uparrow 1 = \overline{x \cdot 1} = \overline{x}$$

$$\text{NOR} \quad x \downarrow 0 = \overline{x + 0} = \overline{x}$$

85

## Funzioni NAND e NOR

- ◆ Riassumendo, le NAND permettono di ottenere una NOT, una AND e, usando De Morgan, una OR
- ◆ Similmente per la NOR
- ◆ Ricordiamo che {AND,OR,NOT} è un insieme funzionalmente completo, quindi →

{NAND} e {NOR} sono due insiemi funzionalmente completi

86

## Proprietà di NAND e NOR

- ◆ Una NAND di prodotti è uguale alla NAND delle variabili indipendenti.  
(**Duale**) Una NOR di somme è uguale alla NOR delle variabili indipendenti  
$$(ab) \uparrow (cd) = \overline{(ab) \cdot (cd)} = a \uparrow b \uparrow c \uparrow d$$
$$(a+b) \downarrow (c+d) = \overline{(a+b) \cdot (c+d)} = a \downarrow b \downarrow c \downarrow d$$
- ◆ Una OR di NAND è uguale alla NAND delle variabili indipendenti.  
(**Duale**) Una AND di NOR è uguale alla NOR delle variabili indipendenti  
$$(a \uparrow b) + (c \uparrow d) = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d} = a \uparrow b \uparrow c \uparrow d$$
$$(a \downarrow b) \cdot (c \downarrow d) = \overline{a} \cdot \overline{b} \cdot \overline{c} \cdot \overline{d} = a \downarrow b \downarrow c \downarrow d$$
- ◆ Una AND è uguale ad una NOR di NAND.  
(**Duale**) Una OR è uguale ad una NAND di NOR  
$$(a \uparrow b) \downarrow (c \uparrow d) = abcd$$
$$(a \downarrow b) \uparrow (c \downarrow d) = a + b + c + d$$

87

## Forme NAND e NOR di una funzione

- ♦ Una forma elementare di tipo P si trasforma in una forma NAND a due livelli operando come segue:
  - tutti gli operatori si trasformano in NAND, rispettando le priorità;
  - le clausole costituite da un solo letterale vengono negate.

$$f = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = \overline{\overline{\gamma_1} \cdot \overline{\gamma_2} \cdot \dots \cdot \overline{\gamma_n}} = \overline{\gamma_1} \uparrow \overline{\gamma_2} \uparrow \dots \uparrow \overline{\gamma_n}$$

- ♦ Dualmente per la forma di tipo S

88

## Generalizzando...

- ♦ Se le  $\gamma_n$  sono funzioni invece che letterali, la proprietà precedente può essere generalizzata
- ♦ Una forma con operatori AND e OR a  $n$  livelli che abbia come ultimo livello una OR (*AND*) si trasforma in una forma **NAND** (*NOR*), operando come segue:
  - tutti gli operatori si trasformano in NAND (*NOR*) rispettando le priorità;
  - tutti i letterali che costituiscono variabili di funzioni di livello complementare dispari si negano.

89

## Forme NAND e NOR di una funzione

- ♦ Una forma con operatori AND e OR a  $n$  livelli che abbia come ultimo livello una OR (AND) si trasforma in una forma **NOR** (NAND) ad  $n+1$  livelli, operando come segue:
  - si aggiunge una NOR (NAND) finale che complementa le uscite;
  - tutti gli operatori si trasformano in NOR (NAND) rispettando le priorità;
  - tutti i letterali che costituiscono variabili di funzioni di livello complementare dispari si negano.

$$f = \gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n = (\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n) \cdot 1 = (\gamma_1 \downarrow \gamma_2 \downarrow \dots \downarrow \gamma_n) \downarrow 0$$

90

## Esempio 1

Dalla funzione a 2 livelli in forma P:

$$f = ab + \bar{a}\bar{b} + c$$

si ottiene la forma NAND

$$f = (a \uparrow b) \uparrow (\bar{a} \uparrow \bar{b}) \uparrow \bar{c}$$

ove  $c$  è negato perché singolo letterale (livello complementare 1) oppure quella NOR

$$f = ((\bar{a} \downarrow \bar{b}) \downarrow (a \downarrow b) \downarrow c) \downarrow 0$$

ove  $a, b$  sono negate in entrambe le clausole perché diventate di livello 3 e  $c$  non lo è più perché di livello 2.

91

## Esempio 2

Dualmente dalla funzione in forma S

$$f = (a + b) \cdot (\bar{a} + \bar{b}) \cdot c$$

si ottiene la forma NOR

$$f = (a \downarrow b) \downarrow (\bar{a} \downarrow \bar{b}) \downarrow \bar{c}$$

oppure quella NAND

$$f = ((\bar{a} \uparrow \bar{b}) \uparrow (a \uparrow b) \uparrow c) \uparrow 1$$

92

## Esempio 3

La funzione a 4 livelli

$$f = b \cdot (c + \bar{c} \cdot (\bar{a} + d))$$

si trasforma nella forma NOR ancora a 4 livelli

$$f = \bar{b} \downarrow (c \downarrow (c \downarrow (\bar{a} \downarrow d)))$$

dove  $b$  e  $\bar{c}$  sono negate rispettivamente ai livelli complementari 1 e 3, oppure nella forma NAND a 5 livelli

$$f = (b \uparrow (\bar{c} \uparrow (\bar{c} \uparrow (a \uparrow d)))) \uparrow 1$$

ove  $\bar{c}$  al livello 3 e  $\bar{a}, d$  al livello 5 sono negati.

93