

IL PARADOSSO DI HARDY

ENRICO SANTAMATO

Le probabilità congiunte di eventi calcolate secondo le regole della meccanica quantistica hanno proprietà diverse da quelle classiche: possono violare, ad esempio, alcune disuguaglianze (chiamate, in generale, disuguaglianze di Bell, anche se trovate da altri autori), che invece sono soddisfatte dalle probabilità congiunte di eventi casuali classici. Da qui l'impossibilità di introdurre variabili nascoste locali al fine di descrivere i processi quantistici come processi stocastici di tipo classico ¹. Il paradosso di Hardy [L. Hardy, Phys. Rev. Lett., **71** 1665 (1993)] esclude anch'esso ogni modello a variabili nascoste locali, ma senza uso di disuguaglianze e praticamente senza uso di probabilità, nel senso che le probabilità in gioco sono o zero (evento impossibile) o uno (evento certo). Nel seguito considereremo un caso particolarmente semplice di questo paradosso.

Come il paradosso EPR, anche il paradosso di Hardy considera un sistema bipartito, formato da due sottosistemi separati spazialmente e non interagenti. Le osservabili considerate, inoltre, possono assumere solo due valori. Ad esempio, il sistema può essere costituito da due spin e le osservabili dalle componenti dello spin in una qualunque direzione, proporzionali agli operatori di Pauli $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$. I valori ammessi per queste osservabili sono ± 1 . In ottica quantistica, invece, si possono considerare due fotoni e prendere come osservabili i loro spin, legati allo stato di polarizzazione; ma è ovvio che ogni coppia di sistemi a due livelli può andare altrettanto bene.

Per essere specifici, consideriamo due spin $\frac{1}{2}$. In una misura locale della componente z , ciascuno spin può essere trovato (e proiettato) o nello stato *up* $|\uparrow\rangle$ o nello stato *down* $|\downarrow\rangle$, corrispondenti ai valori ± 1 dell'osservabile $\hat{\sigma}_z$. In una misura locale della componente x , invece, ciascuno spin viene proiettato in uno dei due stati

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) \quad (1)$$

$$|\leftarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle) \quad (2)$$

che corrispondono, rispettivamente, ai due valori ± 1 dell'osservabile $\hat{\sigma}_x$. Le misure possono essere effettuate, ad esempio, con opportuni apparati di Stern-Gerlach (SG).

Si consideri ora il seguente stato della *coppia* di spin

$$|\psi_H\rangle = N(\theta)[2 \cos \theta |\uparrow, \uparrow\rangle + (\cos \theta + \sin \theta)(|\uparrow, \downarrow\rangle + |\downarrow, \uparrow\rangle) + 2 \sin \theta |\downarrow, \downarrow\rangle]. \quad (3)$$

dove

$$N(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2(3 + 2 \sin \theta \cos \theta)}} \quad (4)$$

è la costante di normalizzazione. Il parametro θ è per il momento arbitrario. Chiameremo lo stato (3) lo *stato di Hardy*.

Date: January 2, 2011.

¹Modelli stocastici classici possono riprodurre i risultati quantistici al prezzo di essere *non locali*, di ammettere, cioè, correlazioni istantanee a distanza tra sistemi spazialmente separati e non interagenti.

Un semplice calcolo mostra che

$$\langle \downarrow, \downarrow | \psi_H \rangle = 2N(\theta) \sin \theta \quad (5)$$

$$\langle \rightarrow, \downarrow | \psi_H \rangle = \frac{N(\theta)}{\sqrt{2}} (3 \sin \theta + \cos \theta) \quad (6)$$

$$\langle \downarrow, \rightarrow | \psi_H \rangle = \frac{N(\theta)}{\sqrt{2}} (3 \sin \theta + \cos \theta) \quad (7)$$

$$\langle \leftarrow, \leftarrow | \psi_H \rangle = 0 \quad (8)$$

Scegliendo, in particolare, $\theta = -\arctan(1/3)$ si ottiene

$$|\langle \downarrow, \downarrow | \psi_H \rangle|^2 = \frac{1}{12} \quad (9)$$

$$|\langle \rightarrow, \downarrow | \psi_H \rangle|^2 = 0 \quad (10)$$

$$|\langle \downarrow, \rightarrow | \psi_H \rangle|^2 = 0 \quad (11)$$

$$|\langle \leftarrow, \leftarrow | \psi_H \rangle|^2 = 0 \quad (12)$$

Come interpretare questi risultati relativi allo stato $|\psi_H\rangle$ della coppia di spin? Secondo l'interpretazione usuale delle misure quantistiche, il risultato (9) ci dice che se facciamo passare i due spin in due apparati di SG orientati lungo z e ripetiamo l'esperimento molte volte su di un *ensemble* di coppie di spin identicamente preparati nello stato $|\psi_H\rangle$, con probabilità $1/12$ le particelle usciranno entrambe nella porta corrispondente al valore $\hat{\sigma}_z = -1$ e l'esperimento confermerà questo risultato. Dobbiamo allora concludere che

1 in un dodicesimo delle volte le due particelle hanno entrambe $\hat{\sigma}_z = -1$.

Il risultato (10) ci dice, inoltre, che, orientando i due apparati di SG il primo lungo x e il secondo lungo z , non troveremo mai il primo spin con $\hat{\sigma}_x = 1$ e il secondo spin simultaneamente con $\hat{\sigma}_z = -1$ e l'esperimento confermerà questo risultato. Dobbiamo allora concludere che è impossibile trovare $\hat{\sigma}_z = -1$ nella seconda particella e $\hat{\sigma}_x = -1$ nella prima, ovvero che

2 ogni qualvolta la seconda particella ha $\hat{\sigma}_z = -1$, la prima particella ha $\hat{\sigma}_x = -1$.

Analogamente, il risultato (11) ci dice che

3 ogni qualvolta la prima particella ha $\hat{\sigma}_z = -1$, la seconda particella ha $\hat{\sigma}_x = -1$.

Prendiamo ora in considerazione quel dodicesimo di casi in cui le due particelle hanno entrambe $\hat{\sigma}_z = -1$. Le proposizioni (2) e (3) ci dicono allora che in questi casi le due particelle avranno entrambe $\hat{\sigma}_x = -1$ ². Ma questo è in contraddizione con il risultato (12), ottenuto dal calcolo quantistico e confermabile dall'esperimento, secondo il quale

4 le due particelle non hanno mai $\hat{\sigma}_z = -1$ entrambe.

La contraddizione tra le proposizioni (1–4) continua ad esistere per qualsiasi modello, a variabili nascoste o meno, che riproduca i risultati quantistici (9–12) e che interpreti questi ultimi come probabilità di eventi associati ad elementi di realtà descritti dallo stato $|\psi_H\rangle$. Ogni ipotesi di realismo imposta alla teoria quantistica dà luogo a contraddizioni logiche. Più specificamente, il paradosso di Hardy mostra come la teoria quantistica sia in grado di prevedere i risultati delle misure sperimentali con le giuste frequenze (probabilità), ma che, in certi casi, rende vano ogni tentativo di usare i risultati delle misure al fine di ottenere informazioni coerenti e non contraddittorie sullo stato del sistema antecedente alle misure stesse. Ne segue che un'interpretazione logicamente coerente dello stato di un sistema quantistico in termini di elementi di realtà ricavati dall'analisi dei risultati sperimentali è impossibile. In breve, la teoria quantistica è sì predittiva, ma non realistica e coerente allo stesso tempo. Realismo e coerenza logica sono mutuamente esclusive nel mondo quantistico.

²Si ha qui una violazione del principio di indeterminazione di Heisenberg del tutto simile a quella che si determina nel paradosso EPR nella versione di Bohm.