Rette orientate

Definizione

Una *retta orientata* è una coppia

$$(r, \prec),$$

dove r è una retta e $\prec$ è un verso su r.

Segmenti

Definizione

Siano A e B punti distinti, sia r la retta che li contiene e fissiamo il verso $\prec$ tale che $A \prec B$. Si dice *segmento* (chiuso) di *estremi* A e B, e si indica con $\overline{AB}$, l'insieme

$$\overline{AB} = \{P \in r : A \preceq P \preceq B\} .$$

Un punto di $\overline{AB}$ diverso dagli estremi A e B si dirà *interno* ad $\overline{AB}$.

Semirette

Definizione

Sia $(r, \prec)$ una retta orientata ed $A \in r$. L'insieme

$$\{P \in r : A \preceq P\}$$

si chiama *semiretta* (chiusa) di origine A, e potrà essere indicata con r_A^+.

Segmento nullo

E' opportuno definire anche il “segmento nullo”, che è un insieme del tipo $\overline{AA} = \{P \in r : A \preceq P \preceq A\}$: tale insieme è sempre uguale ad $\{A\}$, qualsiasi sia la retta r che contiene il punto A, e qualsiasi sia il verso $\prec$ scelto su r.

Definizione

Sia A un punto. Si dice *segmento nullo* di estremo A, l'insieme $\overline{AA} = \{A\}$.

Parallelismo per i segmenti

Definizione

Sia s_1 un segmento contenuto in una retta r_1 ed s_2 un segmento contenuto in una retta r_2. Se le rette r_1 ed r_2 sono parallele, allora anche s_1 ed s_2 saranno detti *paralleli*, e si dirà anche che il segmento s_1 è *parallelo* alla retta r_2 (e che r_2 è *parallela* ad s_1).

Analogamente si definisce il parallelismo tra segmenti e piani.

Definizione

Un segmento si dice *parallelo ad un piano* π, se è contenuto in una retta parallela a π.

Osservazione

Con queste definizioni, un segmento nullo è parallelo a qualsiasi segmento, a qualsiasi retta ed a qualsiasi piano.

Restrizione di relazioni

Definizione

Sia $\mathcal{R}$ una relazione in un insieme S e sia T un sottoinsieme di S. La relazione $\mathcal{S}$ in T tale che

$$a \, \mathcal{S} \, b \; :\Longleftrightarrow \; a \, \mathcal{R} \, b$$

è detta *restrizione* di $\mathcal{R}$ a T.

Versi su un segmento

Definizione

Sia $\overline{AB}$ un segmento e sia r una retta che lo contiene. Un *verso* su $\overline{AB}$ è la restrizione ad $\overline{AB}$ di un verso su r.

Osservazione

Su un segmento nullo c'è un unico verso, coincidente col suo opposto.

Segmenti orientati

Definizione

Un *segmento orientato* è una coppia costituita da un segmento e da un verso su di esso. Un segmento orientato costituito da $\overline{AB}$, con il verso rispetto al quale $A \preceq B$, verrà indicato con AB, e il segmento orientato BA (cioè quello dato sempre da $\overline{AB}$, ma con il verso opposto) viene detto *opposto* ad AB.

Insiemi disgiunti

Definizione

Due insiemi si dicono *disgiunti* se la loro intersezione è vuota.

Semipiani

Assioma

Sia r una retta contenuta in un piano π. Allora $\pi \setminus r$ è unione di due sottoinsiemi non vuoti e disgiunti π_+ e π_- tali che per ogni $A, B \in \pi \setminus r$ si ha

$$A, B \in \pi_+ \text{ oppure } A, B \in \pi_- \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{AB} \cap r = \emptyset \; .$$

Definizione

Sia r una retta contenuta in un piano π. I due sottoinsiemi di $\pi \setminus r$ soddisfacenti la condizione dell'assioma qui sopra si dicono *semipiani* (aperti) di π individuati da r.

Quindi due punti non appartenenti ad r stanno in uno stesso semipiano individuato da r se e solo se il segmento che li congiunge non interseca r.

Semipiani

Proposizione

Siano r ed s due rette non parallele contenute in un piano π, sia A il loro punto d'intersezione (è uno solo per un'osservazione fatta in precedenza) e si fissi un verso $\prec$ su r. Allora i punti che seguono A stanno tutti in uno stesso semipiano di π individuato da s.

Dimostrazione.

Fissiamo un punto $P \in r$ che segue A. Poiché A è l'unico punto di r che appartiene ad s, si ha che $P \in \pi \setminus s$. Per l'assioma di definizione dei semipiani c'è un semipiano, diciamo π_+, che contiene P. Se Q è un qualsiasi punto che segue A, il segmento chiuso $\overline{PQ}$ non contiene A (altrimenti $P \preceq A$ o $Q \preceq A$). Ma l'unico punto di r che appartiene ad s è A. Dunque

$$\overline{PQ} \cap s = \emptyset \, .$$

Per l'assioma di definizione dei semipiani, poiché $P \in \pi_+$, anche $Q \in \pi_+$. Dunque un qualsiasi punto che segue A è contenuto in π_+. $\square$

Semipiani

Osservazione

Ovviamente la tesi della proposizione precedente vale anche per i punti che precedono A.

Proposizione

Siano r ed s rette non parallele contenute in un piano π, sia A il loro punto d'intersezione e si fissi un verso $\prec$ su r. Allora un punto che segue A deve appartenere ad un semipiano individuato da s, diverso da quello a cui appartiene un punto che precede A.

Dimostrazione.
Sia P un punto che segue A e Q un punto che precede A. Poiché A è l'unico punto di r che appartiene ad s, si ha che $P, Q \in \pi \setminus s$. Indichiamo con π_+ il semipiano a cui appartiene P e con π_- l'altro semipiano. Dobbiamo provare che $Q \in \pi_-$.

Semipiani

Poiché $Q \prec A \prec P$, si ha $A \in \overline{PQ}$. Siccome $A \in s$ si ha $\overline{PQ} \cap s \neq \emptyset$, e per l'assioma di definizione dei semipiani abbiamo $Q \in \pi_{-}$. $\square$

Osservazione

Siano r ed s rette non parallele contenute in un piano π, sia A il loro punto d'intersezione e si fissi un verso $\prec$ su r. Dai risultati precedenti si deduce subito che l'intersezione di r con un semipiano individuato da s in π è una semiretta privata dell'origine.

Angoli

Definizione

Siano r ed s due rette non parallele in un piano π, sia σ uno dei semipiani individuati da r e sia τ uno dei semipiani individuati da s. L'intersezione

$$\alpha = \sigma \cap \tau$$

verrà detta *angolo convesso proprio*.
Il punto d'intersezione O di r ed s viene detto *vertice* dell'angolo α. Le due semirette date da $\sigma \cap s$ e $\tau \cap r$ con l'aggiunta dell'orgine O si dicono *lati* dell'angolo.
Se A è un punto di $\sigma \cap s$ e B è un punto di $\tau \cap r$, allora l'angolo α potrà essere denotato con $A\hat{O}B$.
Infine, se denotiamo con σ' l'altro semipiano individuato da r, gli angoli convessi propri $\sigma \cap \tau$ e $\sigma' \cap \tau$ verranno detti *supplementari* tra loro.

Angoli

Osservazione

Con queste definizioni, i lati e il vertice di un angolo non sono contenuti nell'angolo.

Naturalmente, in altri testi si possono trovare definizioni diverse (ad esempio si può definire un angolo in modo da comprendere anche i lati). A livello internazionale, sembra aver preso piede l'uso di definire un angolo di vertice un punto O come una coppia (o un'unione) di due semirette (rays) di origine O. Ci sono ottimi motivi per far questo, così come ci sarebbero ottimi motivi per definire i segmenti semplicemente come coppie di punti. Non ci addentriamo in questo discorso. Diciamo solo che, considerati i vari aspetti della questione, la nostra definizione preferita consisterebbe in un insieme di semirette di origine O, comprese (in un senso che qui non precisiamo) tra due fissate. La definizione di un angolo come parte (sottoinsieme) di un piano è quella tradizionale e sembra essere ancora molto diffusa, almeno in Italia.

Angoli

Inoltre, abbiamo definito solo cosa sono gli angoli convessi propri. Gli studenti sanno bene che ci sono anche altri angoli, oltre a quelli convessi propri. Tuttavia, siccome ai fini del nostro corso possiamo fare a meno di usarli, non riporteremo in questi appunti una definizione più generale di "angolo" (anche se così, a malincuore, non possiamo parlare dell'angolo piatto, dell'angolo nullo e degli angoli concavi).

Angoli

Due rette non parallele in un piano individuano quattro angoli: diamo ora una definizione che risulta comoda per fissare uno dei quattro.

Definizione

Siano $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ rette orientate non parallele contenute in un piano π. Detto O il punto di intersezione, sia σ il semipiano di π individuato da r che contiene i punti di s che seguono O ma non quelli che lo precedono, e sia τ il semipiano di π individuato da s che contiene i punti di r che seguono O ma non quelli che lo precedono. Allora l'angolo (convesso proprio)

$$\sigma \cap \tau$$

sarà chiamato *angolo individuato da* $\vec{r}$ *ed* $\vec{s}$, o anche *angolo convesso individuato dalle semirette* r_O^+ *ed* s_O^+.

Congruenza tra segmenti

Prerequisito

Assumiamo come nozione primitiva la *congruenza* tra segmenti.

Assioma

La congruenza tra segmenti è una relazione di equivalenza nell'insieme dei segmenti.

Notazione

La relazione di congruenza tra segmenti sarà indicata col simbolo

$$\equiv$$

Definizione

Una *lunghezza* è una classe di equivalenza di segmenti congruenti.

Congruenza tra segmenti

Dunque la lunghezza di un segmento s è la sua classe di equivalenza $[s]_{\equiv}$.
Se l è una lunghezza ed s è un segmento, dire che "s ha lunghezza l" formalmente equivale a dire che $s \in l$.

Congruenza tra angoli

Prerequisito

Assumiamo come nozione primitiva la *congruenza* tra angoli convessi propri.

Assioma

La congruenza tra angoli convessi propri è una relazione di equivalenza nell'insieme degli angoli convessi propri.

Notazione

La relazione di congruenza tra angoli convessi propri sarà indicata, per abuso di notazione, con lo stesso simbolo usato per la congruenza tra segmenti:

$$\equiv$$

Definizione

Un'*ampiezza* è una classe di equivalenza di angoli congruenti.

Congruenza tra angoli

Dunque l'ampiezza di un angolo α è la sua classe di equivalenza $[\alpha]$ rispetto alla relazione di congruenza. Se *a* è un'ampiezza ed α è un angolo, dire che "α ha ampiezza *a*" formalmente equivale a dire che $\alpha \in a$.

Operazioni interne

Definizione

Sia S un insieme. Un'*operazione (binaria, interna)* in S è un'applicazione

$$S \times S \to S.$$

Notazione

Se denotiamo un'operazione interna con un simbolo, ad esempio

$$\bullet\ ,$$

allora l'immagine di una coppia (s, s') si denota in genere con

$$s \bullet s'\ ,$$

invece che con $\bullet((s, s'))$.

Elemento neutro

Definizione

Sia $\bullet$ un'operazione in un insieme A e supponiamo che $e \in A$ sia tale che

$$\forall a \in A, \quad a \bullet e = a = e \bullet a \; .$$

Allora si dice che e è un *elemento neutro* per l'operazione $\bullet$.

Proposizione

Per un'operazione in un insieme non ci può essere più di un elemento neutro.

Dimostrazione.
Se e, e' sono elementi neutri per un'operazione $\bullet$, abbiamo $e = e \bullet e'$ perché e' è un'elemento neutro, ed $e \bullet e' = e'$ perché e è un elemento neutro. Quindi

$$e = e \bullet e' = e' \; ,$$

cioè e ed e' non possono essere distinti.$\square$