

L'uso degli insiemi come fondamento

Definizione

L'insieme che nella diapositiva precedente abbiamo chiamato ω sarà d'ora in poi invece denotato con \mathbb{N}_0 . Gli elementi di \mathbb{N}_0 sono i *numeri naturali*. Per ogni $n \in \mathbb{N}_0$, $n \cup \{n\}$ è il *successivo* di n , e diremo anche che n è il precedente di $n \cup \{n\}$.

Correzione

Nella diapositiva precedente è meglio specificare:

$$\dots \Rightarrow n \text{ è un insieme e } n \cup \{n\} \in \omega$$

$$\dots \Rightarrow x \text{ è un insieme e } x \cup \{x\} \in X$$

L'uso degli insiemi come fondamento

Per scrivere un elenco di numeri naturali, uno successivo all'altro, possiamo usare una notazione abbreviata con i puntini.

Esempio

$1, \dots, 5$ è una scrittura abbreviata per $1, 2, 3, 4, 5$.

$3, \dots, 7$ è un'abbreviazione per $3, 4, 5, 6, 7$.

Allo stesso modo si può fare quando i numeri vengono usati come indici.

Esempio

x_0, \dots, x_3 è un'abbreviazione per x_0, x_1, x_2, x_3 .

L'uso degli insiemi come fondamento

Un'altra cosa molto fondamentale che viene invece definita sulla base degli insiemi sono le coppie ordinate. Parlando informalmente, una coppia ordinata è un insieme con due elementi, ma con un'informazione in più. Una coppia ordinata (a, b) può essere definita come $\{\{a, b\}, \{a\}\}$ (definizione di Kuratowski), o anche come $\{\{a, b\}, a\}$.

L'uso degli insiemi come fondamento

Qui di seguito usiamo un trucco ancora diverso; inoltre non usiamo il termine “coppia ordinata” (che comparirà più avanti in un contesto un po' più generale) e anche la notazione qui è un po' diversa.

Notazione

Dati elementi qualsiasi a, b (che potrebbero essere anche uguali),
indichiamo con

$$(a \mapsto b)$$

l'insieme

$$\{ \{0, a\}, \{1, b\} \} .$$

L'uso degli insiemi come fondamento

Osservazione

Si ha

$$(a \mapsto b) = (c \mapsto d) \iff a = c \text{ e } b = d .$$

Spiegare perché non è così facile come sembra.

In particolare $(a \mapsto b)$ può essere uguale a $(b \mapsto a)$ solo quando $a = b$.

L'uso degli insiemi come fondamento

Il fatto appena osservato aiuta anche a capire perché $(a \mapsto b)$ può essere anche interpretata come una coppia ordinata. Infatti le coppie ordinate operano una distinzione tra (a, b) e (b, a) , cosa che con i semplici insiemi di due elementi non si può fare. Se si pensa alle coordinate dei punti del piano, si capisce anche che spesso non è l'ordine che conta, ma il fatto che ai due numeri si attribuisce un diverso “significato” (non ci sono particolari motivi per dire che “orizzontale” viene prima di “verticale”).

Funzioni: definizione

Una *funzione* è un insieme f tale che

$$\forall x \in f \exists a \mid \exists! b \mid x = (a \mapsto b) .$$

Il *dominio* di una funzione f è l'insieme

$$A := \{a \mid \exists b \mid (a \mapsto b) \in f\} ,$$

che può anche essere chiamato *campo di esistenza*.

Funzioni: definizione

Per ciascun $a \in A$, l'unico b tale che $(a \mapsto b) \in f$ viene detto *immagine*, o *corrispondente*, di a tramite f , o anche il *valore di f in a* . Si dice anche che f *associa b ad a* , o anche che *manda a in b* . L'immagine b di a viene denotata con

$$f(a) ;$$

inoltre si potrà anche scrivere

$$a \xrightarrow{f} b ,$$

e spesso anche solo $a \mapsto b$ (con f sottinteso).

Funzioni: definizione

Se B è un qualunque insieme che contiene tutte le immagini tramite f (oltre ad eventuali altri elementi), si dirà che f è *a valori in* B . La notazione

$$f : A \rightarrow B$$

indica che f ha dominio A ed è a valori in B . Si potrà dire anche che f è una funzione *da* A *a* B , o anche *da* A *in* B .

L'insieme di tutte le funzioni da A a B si può denotare con

$$B^A .$$

Osservazione

Siano $f : A \rightarrow B$ ed $f' : A' \rightarrow B'$ funzioni. Allora

$$f = f' \iff A = A' \text{ e } \forall a \in A, f(a) = f'(a) .$$

Più avanti presenteremo una “variante” della nozione di funzione, per la quale ci vorrà anche $B = B'$.

Funzioni

Definizione

Siano f e g funzioni. La *funzione composta* $g \circ f$ è definita dall'insieme

$$\left\{ (a \mapsto c) \mid \exists b \mid a \xrightarrow{f} b \xrightarrow{g} c \right\} .$$

Definizione

Sia A un insieme. La *funzione identica* di A è la funzione $f : A \rightarrow A$ tale che

$$f(a) = a \quad \forall a \in A .$$

n -uple

Definizione

Una n -upla (*ordinata*) di elementi di un insieme X , dove n è un numero naturale, è una funzione il cui dominio è n (che, ricordiamo, è per definizione l'insieme $\{0, \dots, n'\}$, dove n' è il precedente di n).

Una n -upla può essere denotata, elencando, tra parentesi e separate da virgole, prima l'immagine di 0 e poi via via quelle dei successivi. Anzi, un tale elenco può essere usato per determinare direttamente una n -upla.

Le immagini vengono dette *componenti* della n -upla. Le 2-uple sono anche dette *coppie* e le 3-uple *terne*.

Esempio

In base alle definizioni appena date, la terna

$$(8, 5, 5)$$

è formalmente definita come la funzione che a 0 associa 8, a 1 associa 5 e a 2 associa 5. A sua volta, questa funzione è formalmente definita come l'insieme

$$\{(0 \mapsto 8), (1 \mapsto 5), (2 \mapsto 5)\} .$$

n -uple

Osservazione

Siano x e y n -uple. Allora $x = y$ se e solo se componenti di x sono uguali alle rispettive componenti y , nell'ordine in cui vengono elencate.

In particolare, due coppie

$$(x_1, x_2) \quad \text{e} \quad (y_1, y_2)$$

sono uguali se e solo se

$$x_1 = y_1 \quad \text{e} \quad x_2 = y_2 .$$

Famiglie con indici

Definizione

Una *famiglia di elementi* di un insieme X con *indici* in un insieme I è definita semplicemente da una funzione $I \rightarrow X$.

Per una tale famiglia si potrà usare la notazione

$$(x_i)_{i \in I} ,$$

ed in tal caso per ciascun dato $i \in I$, x_i indicherà la sua immagine, che potrà essere chiamato *elemento con indice i* (della data famiglia).

Le famiglie con indici in \mathbb{N}_0 vengono anche chiamate *successioni*.

Cautela: indici di una n -upla

Utilizzando la notazione di sopra, gli indici delle componenti di una n -upla diventano automaticamente $0, \dots, n'$ (con n' precedente di n). Ma questo non pregiudica la possibilità di usare anche indici diversi, sia perché uno stesso oggetto si può sempre denotare in modi diversi, sia perché non è obbligatorio utilizzare la notazione “di default” per le famiglie. Quindi, non ci sono grossi problemi ad utilizzare per le n -uple la notazione più comune (x_1, \dots, x_n) .