

Corso di Fisica Matematica per Ingegneria Aerospaziale

Prof. G. Fiore

Parte 3: Dinamica e Statica dei sistemi materiali

1 Meccanica dei sistemi materiali: risultati generali

1.1 Richiami di meccanica del punto materiale

Innanzitutto ricapitoliamo alcune nozioni fondamentali della meccanica del punto materiale (esse sono il risultato di opportune astrazioni dall'esperienza empirica quotidiana).

1. Massa (inerziale) m di un corpo. $m > 0$. Rimane invariata se il corpo rimane integro. È estensiva (la massa di un corpo = somma delle masse delle sue parti). Delle stesse proprietà gode anche la massa gravitazionale. Sono due grandezze fisiche indipendenti (cioè si misurano in modo diverso, v. più avanti), tuttavia sperimentalmente si osserva che coincidono (se si adotta come unità di misura per entrambe la massa di uno stesso corpo campione).
2. Punto materiale \mathcal{P} , o più brevemente particella \mathcal{P} . È (un'idealizzazione consistente in) un corpo di dimensioni nulle, e perciò concentrato in un punto (geometrico) $P \in \mathcal{E}_3$. È un'approssimazione di un corpo concreto tanto migliore quanto più piccole sono le dimensioni di questo rispetto a quelle dell'ambiente entro cui vogliamo descriverne il moto. La possiamo considerare rigorosamente valida quando l'applichiamo a elementi costitutivi *infinitesimi* di un corpo esteso, cioè nel limite in cui facciamo tendere a zero le loro dimensioni (e ad ∞ il loro numero).
3. Tempo e spazio assoluti. Orologi sincroni rimangono tali se vengono spostati o mossi l'uno rispetto all'altro. Quindi il tempo è indipendente dall'osservatore (tempo assoluto/pantopico). La distanza tra due punti materiali ad un certo istante è indipendente dall'osservatore. (Invece, secondo la relatività speciale, queste cose risultano solo approssimativamente vere se le velocità relative sono \ll velocità della luce.)
4. Sistemi di riferimento \mathcal{R} Costituiti da un osservatore dotato di una terna $(\Omega, \underline{e}_i)$ (definita utilizzando 4 punti opportuni di un corpo rigido), di un regolo e di un orologio. Le leggi della dinamica prendono la forma più semplice nei sistemi di riferimento "inerziali".
5. Concetti della cinematica. Posizione, velocità, accelerazione, etc.
6. Forze agenti su \mathcal{P} L'interazione di \mathcal{P} con altri punti materiali è schematizzabile come sovrapposizione di altrettanti contributi indipendenti, le forze. Ciascuno è rappresentabile tramite un vettore di E_3 applicato al punto, *oggettivo* (cioè indipendente dal sistema di riferimento) e la sovrapposizione si effettua come somma vettoriale. Le forze tra due punti materiali possono esplicarsi non solo quando essi sono a contatto, ma anche quando sono distanti. (Anzi anche le forze apparentemente di contatto sono riconducibili all'effetto complessivo di molte forze a distanza di natura elettrica, magnetica o gravitazionale tra le molecole costituenti agenti, ma con distanze microscopiche).
7. Leggi di forza Mettono in relazione le singole forze con il tempo t , le posizioni, velocità, la natura dei corpi che le esercitano e subiscono, etc. Vedere per es. le leggi delle forze gravitazionali, elettriche, magnetiche, di contatto, attrito, resistenza del mezzo, etc. Si osserva che le forze a distanza decrescono con quest'ultima. Diremo isolato un punto materiale così distante dagli altri che il suo stato di quiete o di moto non risenta delle loro forze.

Ricordiamo ora le tre leggi fondamentali della meccanica del punto materiale.

I Legge *Esiste un sistema di riferimento \mathcal{R} , che diremo inerziale, in cui ogni \mathcal{P} isolato rimane in quiete o si muove di moto rettilineo uniforme.*

Questa legge serve innanzitutto ad individuare riferimenti inerziali. Si noti che, dato un sistema di riferimento inerziale, gli altri riferimenti inerziali sono tutti e soli quelli che si muovono di moto traslatorio rettilineo uniforme rispetto a esso.

Sistemi di riferimento che approssimano sistemi inerziali sono, in ordine di approssimazione crescente, quello: 1) solidale alla Terra; 2) con origine nel baricentro della Terra ed assi orientati verso le stelle “fisse”; 3) con origine nel sole ed assi orientati verso le stelle “fisse”; 4) con origine nel centro della nostra galassia e assi orientati verso le altre galassie “fisse”. Il motivo di questo orientamento è che con uno diverso le stelle e galassie, che sono sicuramente tanto lontane da poterle considerare isolate, apparirebbero compiere traiettorie curve (rispetto ad un sistema solidale alla Terra descriverebbero un’orbita circolare in un giorno), anziché rettilinee (e con velocità di molte volte superiori alla velocità della luce, cosa ritenuta oggi impossibile in base alla relatività speciale). Per questo motivo un sistema inerziale prossimo alla Terra *deve* puntare gli assi verso le “stelle fisse” (che appaiono tali perché su tempi non astronomici i loro spostamenti sono molto minori rispetto alle loro distanze, e quindi la direzione da cui ci arriva a loro luce non varia apprezzabilmente).

II Legge *In un sistema di riferimento inerziale, detta \underline{F} la risultante di tutte le forze agenti su \mathcal{P} , $\underline{a}(t) = \ddot{\underline{P}}(t)$ la sua accelerazione, risulta¹*

$$\underline{F} = m\underline{a} \quad (1.5)$$

III Legge (Principio di azione e reazione) *Se $\underline{f}_{\underline{P}P'}$ denota la forza che \mathcal{P}' esercita su \mathcal{P} , risulta*

$$\underline{f}_{\underline{P}P'} = -\underline{f}_{\underline{P}'P} \parallel (\underline{P} - \underline{P}') \quad (1.6)$$

Praticamente per tutte le leggi di forza fondamentali che si incontrano in natura risulta $\underline{f}_{\underline{P}P'} = \underline{f}_{\underline{P}P'}(\underline{P}, \underline{P}', \dot{\underline{P}}, \dot{\underline{P}}')$, cioè non c’è dipendenza delle forze dalle derivate di ordine ≥ 2 , né dipendenza esplicita da t . Inoltre, si dimostra che l’oggettività (cioè l’indipendenza dall’osservatore) di $\underline{f}_{\underline{P}P'}$ implica che il suo modulo $f_{\underline{P}P'}$ dipende solo da $r = \|\underline{P} - \underline{P}'\|$ e da \dot{r} (nota: $\dot{r} \neq \|\underline{v}_P - \underline{v}_{P'}\|$). Assieme alla terza legge questo dá finalmente una dipendenza del tipo

$$\underline{f}_{\underline{P}P'} = f_{\underline{P}P'}(r, \dot{r}) \underline{u}_{\underline{P}P'}, \quad \underline{u}_{\underline{P}P'} := \frac{\underline{P} - \underline{P}'}{r}. \quad (1.7)$$

¹Nei sistemi di riferimento non inerziali la II legge è valida se a primo membro si includono anche le forze apparenti, $\underline{F} + \underline{F}_\tau + \underline{F}_c = m\underline{a}'$. Sia $(\Omega, \underline{e}_i)$ una terna inerziale, e $(\Omega', \underline{e}'_i)$ un’altra terna. Ricordiamo che le accelerazioni $\underline{a}_P, \underline{a}'_P$ di un punto materiale nelle due terne sono collegate da

$$\underline{a}_P = \underline{a}'_P + \underline{a}_\tau + \underline{a}_c \quad (1.1)$$

dove l’accelerazione di trascinamento \underline{a}_τ e di Coriolis \underline{a}_c sono date da

$$\underline{a}_\tau := \underline{a}_{\Omega'} + \dot{\underline{\omega}} \times (\underline{P} - \Omega') + \underline{\omega} \times [\underline{\omega} \times (\underline{P} - \Omega')] \quad (1.2)$$

$$\underline{a}_c := 2\underline{\omega} \times \underline{v}'_P. \quad (1.3)$$

Le forze apparenti (o fittizie), di trascinamento \underline{F}_τ e di Coriolis \underline{F}_c , sono date da

$$\underline{F}_\tau := -m\underline{a}_\tau, \quad \underline{F}_c := -m\underline{a}_c. \quad (1.4)$$

Ad es., la legge di forza gravitazionale tra due particelle di massa (gravitazionale) m, m' è

$$\underline{f}_{PP'} = -G \frac{mm'}{r^2} \underline{u}_{PP'}, \quad G \equiv \text{cost. di gravitazione universale} \simeq \frac{6.7}{g \text{ cm}^3 \text{ s}^2} 10^{-8}. \quad (1.8)$$

1.2 Equazioni del moto per un sistema isolato di particelle

Consideriamo ora un sistema materiale \mathcal{S}_{tot} , per semplicità discreto, cioè un sistema di N punti materiali \mathcal{P}_j di masse m_j (v. Fig. 1.1), ed isolato, cosicché non subisca forze da corpi esterni al sistema. $P_j \equiv$ posizione occupata da \mathcal{P}_j ad un certo istante t , $\underline{F}_{jh} \equiv$ forza che \mathcal{P}_h esercita su \mathcal{P}_j . Per quanto detto risulta

$$\underline{F}_{jh} = \underline{F}_{jh}(P_j, P_h, \dot{P}_j, \dot{P}_h), \quad (1.9)$$

[In questo momento non ci occorre indicare la dipendenza più specifica (1.7)].

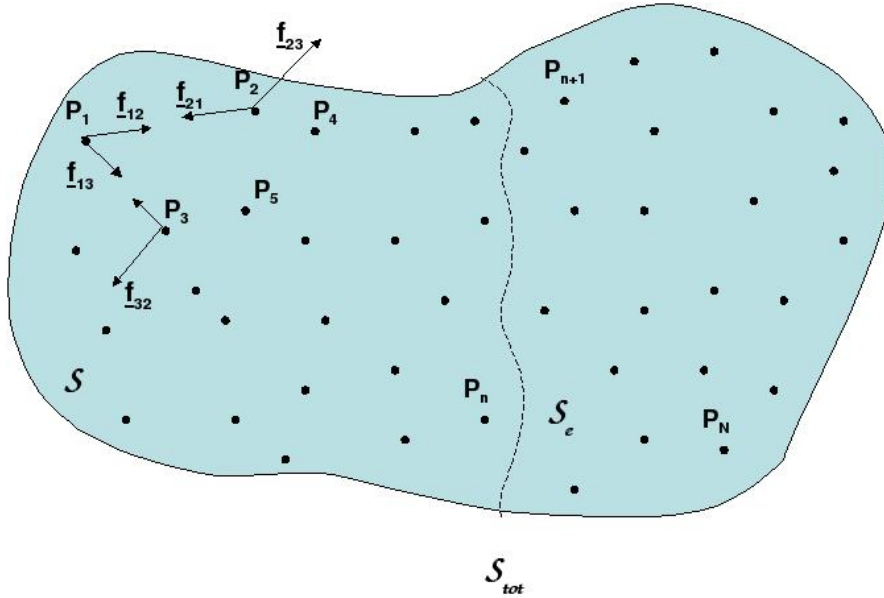


Figure 1.1:

La risultante delle forze agenti su \mathcal{P}_j è

$$\underline{F}_j := \sum_{h=1, h \neq j}^N \underline{F}_{jh}, \quad (1.10)$$

e la sua equazione del moto in un sistema di riferimento inerziale

$$m_j \ddot{P}_j = \underline{F}_j. \quad (1.11)$$

Poiché il secondo membro dipende in generale da *tutte* le P_h, \dot{P}_h , la sua risoluzione è possibile solo se si risolve l'*intero* sistema di N equazioni differenziali vettoriali (accoppiate) del

secondo ordine in forma normale

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{P}_1 &= \underline{F}_1(P_1, \dots, P_N; \dot{P}_1, \dots, \dot{P}_N) \\ \dots &= \dots \\ m_N \ddot{P}_N &= \underline{F}_N(P_1, \dots, P_N; \dot{P}_1, \dots, \dot{P}_N) \end{aligned} \quad (1.12)$$

nelle N incognite $P_j(t)$. Questo sistema di equazioni ammette una ed una sola soluzione in corrispondenza di ogni insieme di condizioni iniziali, e per leggi di forza per \underline{F}_{jh} sufficientemente regolari².

Trattare lo schema discreto non esclude nella sostanza il caso in cui il sistema sia costituito anche da corpi estesi (in particolare rigidi), perché basta adattarlo come segue: possiamo considerare i corpi costituiti di tante particelle legate le une alle altre da forze mutue molto forti, le particelle essendo porzioni del corpo comprese in tanti volumetti molto piccoli in cui possiamo dividere la regione occupata dal corpo. L'approssimazione è tanto migliore quanto più piccolo è il volume dV dei volumetti, ed è corretta nel limite $dV \rightarrow 0$, in cui le somme si trasformano in integrali.

A rigore, l'unico sistema \mathcal{S}_{tot} davvero isolato è l'universo stesso, perché tutti i corpi (particelle) sono dotati di massa e quindi interagiscono tra di loro almeno tramite la forza gravitazionale. Come conseguenza, per l'universo (soltanto) vale il cosiddetto *determinismo dinamico*, notato da Laplace: se uno sapesse posizioni e velocità di tutte le particelle dell'universo ad un certo istante e avesse una potenza di calcolo sconfinata, potrebbe prevederne esattamente il moto successivo, perché esso è completamente determinato.

Nei problemi concreti si è interessati a determinare il moto di un numero molto limitato di corpi/punti materiali, che formano un sistema non isolato \mathcal{S} . Cosa possiamo dire a proposito?

1.3 Le Equazioni Cardinali della Dinamica (ECD)

Consideriamo \mathcal{S} come un sottosistema di un sistema \mathcal{S}_{tot} scelto così grande da essere isolato. Enumeriamo le particelle di \mathcal{S} con $h = 1, 2, \dots, n$, con $h = n + 1, \dots, N$ le restanti, che diremo formare il sistema *esterno* $\mathcal{S}_e = \mathcal{S}_{tot} - \mathcal{S}$. Scomponiamo la risultante \underline{F}_j delle forze agenti sulla particella \mathcal{P}_j di \mathcal{S} in una parte interna ed una esterna:

$$\underline{F}_j^{(i)} := \sum_{h=1}^n \underline{F}_{jh} \quad \underline{F}_j^{(e)} := \sum_{h=n+1}^N \underline{F}_{jh} \quad (1.13)$$

Le equazioni (1.11) danno

$$m_j \ddot{P}_j = \underline{F}_j^{(i)} + \underline{F}_j^{(e)} \quad j = 1, \dots, n. \quad (1.14)$$

Sommando le precedenti relazioni membro a membro su j troviamo

$$\sum_{j=1}^n m_j \underline{a}_j = \sum_{h,j=1, h \neq j}^n \underline{F}_{jh} + \sum_{i=1}^n \underline{F}_j^{(e)}.$$

²Cioè continue e lipschitziane ovunque, eccettuate eventualmente delle singolarità fuchsiane (nel qual caso bisogna però escludere particolari condizioni iniziali che portino a soluzioni divergenti, per esempio due particelle con velocità iniziale dirette l'una verso l'altra e soggette a forza attrattiva tipo gravitazionale); le forze gravitazionali, elettriche etc. e tutte le altre con cui abbiamo a che fare lo sono.

Moltiplicando invece le (1.14) membro a membro per $(P_j - O) \times$ e poi sommandole su j troviamo invece

$$\sum_{j=1}^n m_j (P_j - O) \times \underline{a}_j = \sum_{h,j=1, h \neq j}^n (P_j - O) \times \underline{F}_{jh} + \sum_{j=1}^n (P_j - O) \times \underline{F}_j^{(e)}.$$

Siccome per il Principio di azione e reazione il sistema $\Sigma^{(i)}$ delle forze interne è un sistema di coppie di braccio nullo, allora $\Sigma^{(i)} \sim 0$ cioè ha risultante e momento risultante nulli:

$$\underline{R}^{(i)} := \sum_{j=1}^n \underline{F}_j^{(i)} = \sum_{\substack{h,j=1 \\ h \neq j}}^n \underline{F}_{jh} \stackrel{(III)}{=} \underline{0}, \quad \underline{M}_O^{(i)} := \sum_{j=1}^n (P_j - O) \times \underline{F}_j^{(i)} = \sum_{\substack{h,j=1 \\ h \neq j}}^n (P_j - O) \times \underline{F}_{jh} \stackrel{(III)}{=} \underline{0};$$

definendo la risultante e il momento risultante delle forze esterne tramite

$$\underline{R}^{(e)} := \sum_{j=1}^n \underline{F}_j^{(e)}, \quad \underline{M}_O^{(e)} := \sum_{j=1}^n (P_j - O) \times \underline{F}_j^{(e)},$$

troviamo la **prima e la seconda equazione cardinale della dinamica per \mathcal{S} nella prima forma**

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n m_j \underline{a}_j &= \underline{R}^{(e)}, & \text{IECD}_{\mathcal{S}} \\ \sum_{j=1}^n m_j (P_j - O) \times \underline{a}_j &= \underline{M}_O^{(e)} & \text{IIECD}_{\mathcal{S}}, \quad \text{polo } O. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Utilizzando la legge di variazione o la definizione di momento risultante si verifica che cambiando polo si ottiene un sistema di equazioni equivalente³. La risultante ed il momento risultante rispetto al polo O del sistema $\{(P_1, m\underline{v}_1), \dots, (P_n, m\underline{v}_n)\}$ dei vettori quantità di moto sono detti *quantità di moto* \underline{Q} e *momento della quantità di moto* (o *momento angolare*) \underline{L}_O del sistema \mathcal{S} :

$$\underline{Q} := \sum_{j=1}^n m_j \underline{v}_j, \quad \underline{L}_O := \sum_{j=1}^n m_j (P_j - O) \times \underline{v}_j.$$

Risulta evidentemente

$$\begin{aligned} \dot{\underline{Q}} &:= \sum_{j=1}^n m_j \underline{a}_j, & \frac{d}{dt} \underline{L}_O &= \sum_{j=1}^n m_j (P_j - O) \times \underline{a}_j + \sum_{j=1}^n m_j (\underline{v}_j - \underline{v}_O) \times \underline{v}_j \\ & & &= \underline{M}_O^{(e)} - \underline{v}_O \times \underline{Q}, \end{aligned}$$

quindi si possono equivalentemente scrivere **le equazioni cardinali nella seconda forma**

$$\begin{aligned} \dot{\underline{Q}} &= \underline{R}^{(e)}, & \text{IECD}_{\mathcal{S}} \\ \dot{\underline{L}}_O + \underline{v}_O \times \underline{Q} &= \underline{M}_O^{(e)} & \text{IIECD}_{\mathcal{S}}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

³Infatti, utilizzando prima la legge di variazione del momento risultante al variare del polo, poi le ECD con polo O , troviamo

$$\underline{M}_Q^{(e)} = \underline{M}_O^{(e)} + (O-Q) \times \underline{R}^{(e)} \stackrel{(1.15)}{=} \sum_{j=1}^n (P_j - O) \times m_j \underline{a}_j + (O-Q) \times \sum_{j=1}^n m_j \underline{a}_j = \sum_{j=1}^n [(P_j - O) + (O-Q)] \times m_j \underline{a}_j = \sum_{j=1}^n (P_j - Q) \times m_j \underline{a}_j,$$

cioè la II ECD con polo Q . Quindi le ECD con polo O implicano quelle con polo Q , e perciò sono ad esse equivalenti, vista l'arbitrarietà di O, Q .

La (1.16)₁ è detta anche **teorema della quantità di moto**. Nella (1.16)₂ il secondo termine a primo membro si annulla se il polo O è fisso ($\underline{v}_O = 0$) oppure se $O \equiv G$, siccome

$$\underline{Q} = m\underline{v}_G, \quad m := \sum_j m_j; \quad (1.17)$$

quest'ultima relazione discende dalla definizione del baricentro $m(G - \Omega) = \sum_j m_j(P_j - \Omega)$ applicando $\frac{d}{dt}$. Quindi nella seconda forma la IIECD diventa

$$\underline{\dot{L}}_O = \underline{M}_O^{(e)} \quad \text{se } O \text{ è fisso oppure } O \equiv G, \quad (1.18)$$

che è detta anche **teorema del momento della quantità di moto**. Infine, osservando che con ulteriore derivazione $\underline{\dot{Q}} = m\underline{a}_G$, possiamo dare alla prima eq. cardinale una terza forma, che si enuncia sotto forma di **teorema del moto del baricentro**

$$m\underline{a}_G = \underline{R}^{(e)} \quad \text{IECD}_{\mathcal{S}}. \quad (1.19)$$

Si noti che se \mathcal{S} si riduce ad un singolo punto materiale \mathcal{P} di posizione P ($n=1$), la corrispondente IECD si riduce alla II legge della dinamica e la IIECD è dipendente dalla quest'ultima, perché in questo caso $\underline{M}_O^{(e)} = (P - O) \times \underline{R}^{(e)}$. Il moto di \mathcal{P} sarà univocamente determinato una volta assegnate le condizioni iniziali. Se invece $n=2$ solo 5 delle 6 componenti delle ECD sono indipendenti⁴.

1.4 Lo schema ristretto

Le (1.14) sono un sistema di n equazioni (vettoriali) del secondo ordine in cui compaiono ancora *tutte* le N incognite $P_h(t)$, $h = 1, \dots, N$ da cui eravamo partiti; infatti le $\underline{F}_j^{(e)}$, dipendono in generale anche dalle posizioni delle particelle di \mathcal{S}_e , incognite anch'esse del moto. Anche nelle ECD (due equazioni vettoriali) compaiono le stesse N incognite. Per determinare il moto di \mathcal{S} sembra quindi comunque necessario determinare il moto di tutti i corpi con cui \mathcal{S} interagisce significativamente, includendolo in un unico grande sistema isolato, cosa per cui noi non abbiamo né i mezzi né l'interesse: una bella rognà! (Inoltre, come già detto, a rigore l'unico sistema \mathcal{S}_{tot} davvero isolato è l'universo stesso).

Vediamo invece in quali ipotesi lo schema precedente si può semplificare. Si trova che il moto \mathcal{S}_e non è significativamente influenzato da quello di \mathcal{S} nelle ipotesi di *schema ristretto*, cioè se \mathcal{S}_e è costituito da corpi rigidi \mathcal{C} con masse $M \gg m = \sum_j m_j \equiv$ massa totale di \mathcal{S} (più eventualmente altri corpi/particelle che non interagiscano significativamente con \mathcal{S}). Possiamo applicare lo schema ristretto, per esempio, a sistemi \mathcal{S} di corpi di dimensioni medio-piccole includendo nel sistema esterno la terra, eventualmente altri corpi celesti (sole, luna, pianeti, stelle); oppure al sistema \mathcal{S} dei pianeti del sistema solare, includendo il sole nel sistema esterno; etc. In queste ipotesi il moto di \mathcal{S}_e si può determinare prima di (ed indipendentemente da) quello di \mathcal{S} , risolvendo le equazioni di \mathcal{S}_e o, come accade per i corpi celesti, tenendo semplicemente conto della nostra conoscenza millenaria sul loro

⁴Scegliendo $O = G$, risulta $(P_1 - P_2) \parallel (P_1 - G) \parallel (P_2 - G)$; quindi la componente della IIECD (con polo G) in direzione $(P_1 - P_2)$ è identicamente soddisfatta.

moto. Di conseguenza, la dipendenza da $P_h(t), \dot{P}_h(t)$ (con $h = n + 1, \dots, N$) che appare nelle $F_j^{(e)}$ risulterà nota, potremo conglobarla in un'unica dipendenza da t e scrivere semplicemente

$$\underline{F}_j^{(e)} = \underline{F}_j^{(e)}(P_j, \dot{P}_j, t). \quad (1.20)$$

La dipendenza funzionale (1.20), posta nel sistema di equazioni (1.14), lo rende un sistema di $3n$ equazioni in $3n$ incognite, anziché $3N$. Questa semplificazione prende il nome di *schema ristretto*. Riassumendo, potremo scrivere un sistema di sole n equazioni vettoriali nelle n incognite $P_j(t)$

$$m\ddot{P}_j = \underline{F}_j^{(i)} + \underline{F}_j^{(e)}(P_j, \dot{P}_j, t) \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (1.21)$$

giacché' anche $\underline{F}_j^{(i)}$ dipende solo da queste incognite. Assegnate le condizioni iniziali, questo sistema ammetterá quindi una ed una sola soluzione (determinismo dinamico). Anche $\underline{R}^{(e)}$ dipenderá solo da queste n incognite e da t , tutta la dipendenza dalle posizioni dei corpi esterni essendo conglobata nella dipendenza da t .

Per semplicitá ci limitiamo a dimostrare che \mathcal{S} non influenza il moto di \mathcal{S}_e nel caso che \mathcal{S}_e si riduca ad un solo corpo rigido \mathcal{C} di massa $M \gg m$. Il principio di azione e reazione ed il teorema del baricentro applicato a $\mathcal{S}, \mathcal{S}_e$ dá

$$m\underline{a}_G = \underline{R}^{(e)} = -M\underline{a}_{G_e} \quad (1.22)$$

ove G_e denota il baricentro di \mathcal{C} . Risulta quindi $\underline{a}_{G_e} = \underline{a}_G m/M \simeq 0$, da cui $v_{G_e} \simeq \text{cost}$ ed il moto di G_e è rettilineo uniforme, quindi non è influenzato dal moto di \mathcal{S} . In analoghe ipotesi sul tensore centrale di inerzia di \mathcal{C} ($Y_e \gg Y$), dalla IIECD si ricava in maniera analoga che il moto di rotazione di \mathcal{C} attorno al suo baricentro è un moto di rotazione libero (o *di Poinsot*, v. il capitolo di dinamica del solido), e quindi anch'esso non è influenzato dal moto di \mathcal{S} .

Se invece \mathcal{S}_e consiste di piú solidi \mathcal{C}_i con masse $M \gg m$ e momenti di inerzia molto grandi, i moti dei loro baricentri non saranno in generale rettilinei uniformi, né quelli di rotazione saranno alla Poinsot, ma entrambi saranno determinati solo dalle mutue interazioni dei \mathcal{C}_i .

Consideriamo un riferimento \mathcal{R}' con origine nel baricentro G_e di un solido ed assi orientati verso le stelle (o le galassie) fisse. I ragionamenti prima esposti mostrano che quanto maggiore é la massa M del solido rispetto alla massa m dei corpi con cui interagisce, tanto piú il moto di G_e rispetto ad un riferimento inerziale \mathcal{R} é prossimo ad un moto rettilineo uniforme, e quindi tanto piú \mathcal{R}' si avvicina ad essere anch'essa una terna inerziale. Questo spiega le approssimazioni via via migliori di riferimenti inerziali che abbiamo indicato dopo la I Legge.

1.5 Utilitá delle ECD

Torniamo alla discussione sulle ECD. Se gli $n > 1$ punti sono vincolati a formare un solido allora le $3n$ incognite x_P^i si riducono a 6. Come vedremo, solo allora le equazioni cardinali (6 eq. scalari) bastano ancora a determinare completamente il moto (o la quiete) del sistema, una volta assegnate le condizioni iniziali e le posizioni delle particelle esterne in funzione di t . Se le due equazioni si disaccoppiano la IECD determina il moto di G , mentre la IIECD con $O \equiv G$ determina il moto di rotazione del solido attorno a G . Siccome il sistema delle forze esterne interviene nelle ECD solo tramite la risultante ed il momento risultante, è evidente che sistemi di forze equivalenti determineranno lo stesso moto (o quiete) per il solido. Ciò giustifica la definizione di "equivalenti" data a suo tempo.

Anche negli altri casi tuttavia le ECD possono essere molto utili, in quanto danno importanti informazioni su come variano \underline{Q} (o, equivalentemente, G) e \underline{L}_O . Nota: solo in casi particolari $\underline{R}^{(e)}$, $\underline{M}_O^{(e)}$ dipendono unicamente da G e 3 angoli; solo in questi casi esse risultano quindi disaccoppiate dalle altre equazioni e possono essere risolte indipendentemente da esse. Ciò accade per esempio se il sistema di forze esterne è equivalente a quello nullo, o le uniche forze esterne sono i pesi dei punti materiali ed eventuali forze fittizie. In questi casi il moto di G e la variazione di \underline{L}_O saranno determinabili indipendentemente dal moto relativo delle varie parti di \mathcal{S} . Ad esempio il moto del baricentro di una manciata di sabbia lanciata in aria, trascurando la resistenza di quest'ultima, è uniformemente accelerato.

Osserviamo inoltre che per ogni $\mathcal{S}' \subset \mathcal{S}$ le $ECD_{\mathcal{S}'}$ sono indipendenti dalle $ECD_{\mathcal{S}}$. Applicando le ECD a tutte le parti di \mathcal{S} si ottiene un sistema sicuramente sufficiente a determinarne il moto, largamente dipendente. Possiamo estrarre da questo vari differenti sottosistemi di equazioni indipendenti sufficienti a determinare il moto di \mathcal{S} , tra loro equivalenti. Uno è costituito dalla IECD per ogni particella isolata ed entrambe le ECD per ogni solido. Altri sistemi di equazioni equivalenti si ottengono usando una o più volte la seguente proprietà:

Proposizione 1 *Se $\mathcal{S} = \mathcal{S}_I \cup \mathcal{S}_{II}$, con $\mathcal{S}_I, \mathcal{S}_{II}$ disgiunti (v. fig. 1.2 sinistra), allora vale l'equivalenza*

$$\left\{ \begin{array}{l} ECD_{\mathcal{S}_I} \\ ECD_{\mathcal{S}_{II}} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} ECD_{\mathcal{S}_I} \\ ECD_{\mathcal{S}} \end{array} \right. \quad (1.23)$$

Dim: Chiamiamo $\Sigma_I^{(e)}, \Sigma_{II}^{(e)}, \Sigma^{(e)}$ i sistemi di forze esterne agenti risp. su $\mathcal{S}_I, \mathcal{S}_{II}, \mathcal{S}_I \cup \mathcal{S}_{II}$. Osserviamo che $\Sigma^{(e)} = \Sigma_I^{(e)} \cup \Sigma_{II}^{(e)}$, ove abbiamo indicato con $\Sigma_I^{(e)'}, \Sigma_{II}^{(e)'}$ i sistemi di forze esercitate risp. su $\mathcal{S}_I, \mathcal{S}_{II}$ dalle particelle esterne a *tutto* \mathcal{S} ; mentre $\Sigma_I^{(e)} = \Sigma_I^{(e)'} \cup \Sigma_{I,II}$ e $\Sigma_{II}^{(e)} = \Sigma_{II}^{(e)'} \cup \Sigma_{II,I}$, ove abbiamo indicato con $\Sigma_{I,II}$ (risp. $\Sigma_{II,I}$) il sistema di forze esercitate dalle particelle di \mathcal{S}_{II} su quelle di \mathcal{S}_I (risp. di \mathcal{S}_I su quelle di \mathcal{S}_{II}). Ma per il terzo principio $\Sigma_{I,II} \cup \Sigma_{II,I} \sim 0$ (perchè sistema di coppie di braccio nullo), da cui $\Sigma_I^{(e)} \cup \Sigma_{II}^{(e)} = \Sigma_I^{(e)'} \cup \Sigma_{II}^{(e)'} \cup \Sigma_{I,II} \cup \Sigma_{II,I} \sim \Sigma_I^{(e)'} \cup \Sigma_{II}^{(e)'} = \Sigma^{(e)}$, e $\underline{R}^{(e)} = \underline{R}_I^{(e)} + \underline{R}_{II}^{(e)}$, $\underline{M}_O^{(e)} = \underline{M}_I^{(e)} + \underline{M}_{II}^{(e)}$. D'altro canto da $\underline{Q} = \underline{Q}_I + \underline{Q}_{II}$, $\underline{L}_O = \underline{L}_I + \underline{L}_{II}$ segue immediatamente $\underline{\dot{Q}} = \underline{\dot{Q}}_I + \underline{\dot{Q}}_{II}$, $\underline{\dot{L}}_O = \underline{\dot{L}}_I + \underline{\dot{L}}_{II}$. Perciò l'implicazione \Rightarrow si ottiene sommando membro a membro le equazioni a primo membro, mentre l'implicazione \Leftarrow si ottiene sottraendo membro a membro le equazioni a secondo membro. \square .

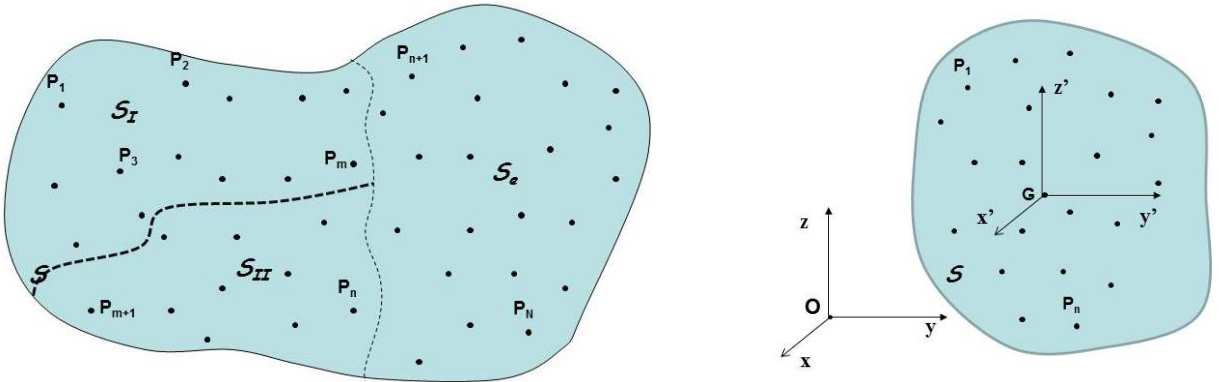


Figure 1.2:

Si noti ancora che le (1.14), e quindi le (1.15), perdono di senso se schematizziamo le forze

interne come impulsive⁵, perché allora le \underline{v}_j diventano discontinue, e le \underline{a}_j divergono. Tuttavia nelle altre forme le ECD continuano ad essere applicabili, perché $\underline{Q}, \underline{L}_O, \underline{v}_G$ rimangono continue. In questo senso le (1.16), che prendono anche il nome di **equazioni di bilancio della quantità di moto e del momento angolare**, si possono considerare più generali delle (1.15), e possono essere adottate, come propose Eulero, quali leggi fondamentali della meccanica al posto della seconda legge di Newton.

Se adottiamo un sistema di riferimento non inerziale \mathcal{R}' dobbiamo includere tra le $\underline{F}_j^{(e)}$ anche le forze fittizie, ed in $\underline{R}^{(e)}, \underline{R}_O^{(e)}$ a secondo membro delle ECD anche la risultante ed il momento risultante di queste ultime. La loro dipendenza dal tempo è dettata dal moto di \mathcal{R}' rispetto a un sistema di riferimento inerziale \mathcal{R} .

Massa gravitazionale e massa inerziale

Siano m_0^g, m_0 le masse gravitazionale e inerziale (che assumeremo unitarie) di un corpo campione \mathcal{C}_0 , e m^g, m quelle di un generico altro corpo \mathcal{C} . Si può misurare m_g confrontandola con m_0^g tramite una bilancia. Si può misurare m confrontandola con m_0 tramite il seguente dispositivo. Scelto $\mathcal{S} = \{\mathcal{C}_0, \mathcal{C}\}$, si fa in modo che $\underline{R}^{(e)} = \underline{0}$ (allontanando \mathcal{S} da altri corpi fino a renderlo isolato, o per esempio facendo scivolare $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}$ su un piano orizzontale perfettamente liscio, in modo che peso e reazione vincolare si cancellino tra loro). Per le ECD questo implica $\underline{Q} = m_0 \underline{v}_{G_0} + m \underline{v}_G = \text{cost}$; posso rendere $\underline{Q} = \underline{0}$ con un'opportuna scelta delle condizioni iniziali, per es. entrambi i corpi fermi. Scegliendo nonnulle le mutue forze, i due corpi acquisteranno velocità nonnulle legate ad ogni istante dalle relazione precedente, da cui $m = m_0 v_{G_0} / v_G$, che mi consentirà di "misurare" m misurando v_{G_0}, v_G . Per misurare queste ultime con precisione arbitrariamente alta basta fare in modo che dopo un certo istante le forze mutue si annullino⁶, cosicché $\underline{v}_{G_0}, \underline{v}_G$ diventino costanti e perciò pari alle velocità medie di G_0, G ; .

Sperimentalmente si osserva che $m^g = m$. Una volta accettata questa uguaglianza come una legge universale della natura, la misura con la bilancia determina anche la massa inerziale di un corpo. Conseguenza di $m^g = m$ è che se \mathcal{C} è soggetto solo alla forza peso allora $\underline{a}_G = \underline{g} = \text{cost} \equiv$ accelerazione di gravità; cioè ogni grave cade allo stesso modo.

1.6 Superamento della meccanica classica

In realtà gli sviluppi successivi della fisica, la teoria della relatività e la teoria dei campi prima, la teoria dei quanti poi, hanno invalidato lo schema precedente come teoria dell'universo. La

⁵In processi come urti o esplosioni le forze $\underline{F}_{AB}, \underline{F}_{BA} = -\underline{F}_{AB}$ tra due parti A, B coinvolte si possono considerare nulle al di fuori di un intervallo di tempo $[t, t + \Delta t]$, con Δt molto piccolo, ma entro $[t, t + \Delta t]$ raggiungono valori così elevati che $\Delta \underline{Q}_A, \Delta \underline{Q}_B$ risultano finite. $\underline{F}_{AB}, \underline{F}_{BA}$ si dicono *impulsive* quando si schematizzano ponendo $\Delta t = 0$, pur fornendo delle regole ben precise (conservazione di $\underline{Q}_A + \underline{Q}_B$; conservazione dell'energia cinetica totale, o eventuale perdita parziale, secondo il coefficiente di restituzione) per ottenere $\Delta \underline{Q}_A, \Delta \underline{Q}_B$ finite (l'andamento di $\underline{F}_{AB}, \underline{F}_{BA}$ in funzione di t è schematizzato con una cosiddetta δ di Dirac).

⁶Per esempio, frapponendo tra $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}$ una molla inizialmente compressa, le forze mutue saranno inizialmente repulsive e metteranno in moto con impulsi opposti i due corpi; si annulleranno quando i corpi si saranno staccati dalla molla. Oppure, facendo avvenire un piccolo scoppio tra i due corpi, che li allontanerà l'uno dall'altro.

meccanica classica diventa compatibile con la teoria della relatività speciale se si sostituisce la (1.5) con la nuova legge

$$\underline{F} = \dot{\underline{p}}, \quad \underline{p} := \frac{m\underline{v}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}, \quad (1.24)$$

ove $c \simeq 3 \times 10^8 m/sec$ indica la velocità della luce nel vuoto; cioè cambia solo la definizione di quantità di moto \underline{p} della particella [ma quando $v/c \ll 1$ allora $\underline{p} \simeq m\underline{v}$, $\dot{\underline{p}} \simeq m\underline{a}$, e quindi vale con ottima approssimazione la (1.5)].

Un altro punto in cui va in crisi la meccanica classica pre-relativistica è che essa si basa sulla propagazione istantanea delle forze a distanza. Invece qualunque segnale non può viaggiare a velocità superiore a quella della luce. I campi svolgono il ruolo di mediatori delle forze tra le particelle. Ciascuna particella da un lato svolge il ruolo di “sorgente” di ciascun campo *nel punto* dove si trova, dall’altro subisce una forza pari al campo *in quel punto* moltiplicato per la carica (elettrica, o gravitazionale, etc) associata: si dice che l’interazione tra i campi e le particelle è “locale”. Per esempio se la particella ha carica elettrica e , la forza elettrica che essa subisce è pari a $e\underline{E}$, ove \underline{E} denota il campo elettrico nel punto P dove si trova la particella all’istante t considerato; se la particella non subisce altri tipi di forze (o queste sono trascurabili) allora $\underline{F} = e\underline{E}$, altrimenti $\underline{F} = e\underline{E} + \dots$, ove nei puntini bisogna includere le altre forze, calcolate allo stesso modo. I campi si evolvono in base a delle equazioni alle derivate parziali, secondo cui la propagazione di variazioni dei campi avviene alla velocità della luce.

Infine, nella meccanica quantistica addirittura velocità e posizione di una particella elementare (protoni, elettroni,...) non sono entrambe ben definite; lo stato di una particella elementare ad un certo t è descritto non dalla sua posizione e dalla sua velocità, ma da una “funzione d’onda” a valori complessi.

Noi nel seguito ignoreremo questi sviluppi.

1.7 Moto relativo al baricentro, energia cinetica, lavoro e teoremi collegati

Dato un sistema di riferimento $\mathcal{T} = (O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ (non necessariamente inerziale) sia $\mathcal{T}' = (G, \underline{e}'_1, \underline{e}'_2, \underline{e}'_3)$ il sistema di riferimento con origine nel baricentro G di \mathcal{S} ed assi paralleli al primo. Indichiamo senza apice le grandezze fisiche valutate in \mathcal{T} , con apice quelle valutate in \mathcal{T}' (v. fig. 1.2 destra).

Dalla (1.17) troviamo $\underline{Q}' = m\underline{v}'_G = \underline{0}$ (dato che $\underline{v}'_G = 0$), che posta nella legge di trasformazione del momento risultante al variare del polo implica che \underline{L}'_O è indipendente dal polo O ; quest’ultimo verrà perciò denotato semplicemente con \underline{L}' .

Teorema 1 (di König) *Detta m la massa totale del sistema, risulta*

$$\underline{L}_O = \underline{L}' + (G - O) \times m\underline{v}_G, \quad \text{in particolare} \quad \underline{L}_G = \underline{L}'. \quad (1.25)$$

Dim: La velocità di trascinamento dello spazio solidale a \mathcal{T}' rispetto a \mathcal{T} si riduce a \underline{v}_G , da cui $\underline{v}_h = \underline{v}'_h + \underline{v}_G$ e

$$\begin{aligned} \underline{L}_G &:= \sum_{h=1}^n (P_h - G) \times m_h \underline{v}_h = \sum_{h=1}^n (P_h - G) \times m_h \underline{v}'_h + \left[\sum_{h=1}^n (P_h - G) m_h \right] \times \underline{v}_G \\ &= \underline{L}'_G + (G - G) \times m\underline{v}_G = \underline{L}'. \end{aligned}$$

La (1.25)₁ è diretta conseguenza della legge di variazione del momento al variare del polo, dimostrata nel capitolo del calcolo vettoriale. \square

Definizione. L'energia cinetica di un sistema $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}_1, \dots, \mathcal{P}_n\}$ di n punti materiali è definita da

$$T := \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n m_h v_h^2. \quad (1.26)$$

Teorema 2 (di König)

$$T = T' + \frac{1}{2} m v_G^2, \quad (1.27)$$

Dim: Di nuovo $\underline{v}_h = \underline{v}'_h + \underline{v}_G$ e

$$\begin{aligned} T &:= \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n m_h v_h^2 = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n m_h (\underline{v}'_h + \underline{v}_G)^2 = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n m_h v_h'^2 + \frac{1}{2} m v_G^2 + \left(\sum_{h=1}^n m_h \underline{v}'_h \right) \cdot \underline{v}_G \\ &= T' + \frac{1}{2} m v_G^2 + m \underline{v}'_G \cdot \underline{v}_G = T' + \frac{1}{2} m v_G^2 \quad \square \end{aligned}$$

Definizione. Data una forza \underline{F} agente sul punto materiale \mathcal{P} avente posizione P diremo

$$dL := \underline{F} \cdot dP \quad (1.28)$$

lavoro infinitesimo (o *elementare*) compiuto da \underline{F} in corrispondenza dello spostamento infinitesimo (o elementare) dP . Dato un sistema $\Sigma = \{(P_1, \underline{F}_1), \dots, (P_n, \underline{F}_n)\}$ di n forze applicate ad altrettanti punti di un sistema materiale \mathcal{S} diremo

$$dL := \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \cdot dP_i \quad (1.29)$$

lavoro elementare compiuto da Σ in corrispondenza dello spostamento elementare $d\mathcal{S} = \{dP_1, \dots, dP_n, \dots\}$.

Si noti che, per la definizione di lavoro elementare, dL in generale *non* è la variazione elementare di alcuna funzione di $\overline{X} \equiv (P_1, \dots, P_n)$ soltanto; perciò per indicarlo abbiamo usato il simbolo dL anziché dL . Quando esiste una funzione $U(P_1, \dots, P_n)$ tale che $dL = -dU$ in corrispondenza di un qualsiasi spostamento elementare $d\mathcal{S}$, allora diremo il sistema di forze *conservativo*, e chiameremo una tale U *energia potenziale*; U è determinata a meno di una costante additiva. Allora accade anche che il lavoro totale compiuto L lungo ogni curva (nello spazio delle \overline{X}) è pari a $\Delta U = U(\overline{X}_i) - U(\overline{X}_f)$, cioè dipende solo dalle posizioni iniziale \overline{X}_i e finale \overline{X}_f , ma non dalla particolare traiettoria fatta per congiungerle; in particolare, $L = 0$ lungo ogni traiettoria chiusa. (Viceversa, se le forze dipendono solo dalle posizioni ed è nullo il lavoro totale compiuto lungo ogni curva chiusa nello spazio delle coordinate normali, *anche se la curva non è contraibile ad un punto*, allora esiste una funzione $U(P_1, \dots, P_n)$ tale che $dL = -dU$). Se \mathcal{S} è soggetto a vincoli fissi, allora U si può esprimere come una funzione $U = U(q)$ delle coordinate lagrangiane.

Per le applicazioni concrete ai solidi conviene spesso utilizzare il fatto che gli spostamenti infinitesimi dP delle particelle componenti un solido si ottengono tutti a partire dallo spostamento dO di un particolare punto solidale al solido e da un particolare vettore infinitesimo $d\underline{\psi}$ (angolo di rotazione infinitesimo) tramite la relazione $dP = dO + d\underline{\psi} \times (P - O)$. Dato

un sistema Σ di forze agenti sui punti P_i di uno stesso solido, siccome le relazioni precedenti varranno per ciascun P_i , avremo (utilizzando la proprietà ciclica del prodotto misto)

$$\begin{aligned} dL &= \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \cdot dP_i = \sum_{i=1}^n \underline{F}_i \cdot [dO + d\underline{\psi} \times (P_i - O)] \\ &= \underline{R} \cdot dO + \underline{M}_O \cdot d\underline{\psi}. \end{aligned} \quad (1.30)$$

Dalla definizione di energia cinetica (1.26) e dalla seconda legge della dinamica $m_h \underline{a}_h = \underline{F}_h^{(i)} + \underline{F}_h^{(e)}$, segue

$$\dot{T} := \sum_{h=1}^n m_h \underline{a}_h \cdot \underline{v}_h = \sum_{h=1}^n \underline{F}_h^{(i)} \cdot \underline{v}_h + \sum_{h=1}^n \underline{F}_h^{(e)} \cdot \underline{v}_h.$$

Moltiplicando ambo i membri per dt e osservando che $dT = \dot{T}dt$, $dP_h = \underline{v}_h dt$, si ottiene il

Teorema 3 (dell'energia cinetica). *In un intervallo di tempo $[t, t+dt]$ la variazione di energia cinetica ed i lavori compiuti dalle forze interne ed esterne sono legati da*

$$dT = dL^{(i)} + dL^{(e)}. \quad (1.31)$$

Proposizione 2 *Il lavoro $dL^{(i)}$ delle forze interne in un corpo rigido è nullo, e quindi*

$$dT = dL^{(e)}. \quad (1.32)$$

Dim: Dal III principio segue $\underline{R}^{(i)} = \underline{M}_O^{(i)} = \underline{0}$, che posto nella (1.30) dá $dL^{(i)} = 0$. \square

La (1.32), valida se \mathcal{S} è un solido, evidentemente non è un'equazione indipendente dalle ECD, perché queste ultime determinano completamente il moto di un solido, quindi anche tutte le velocità e l'energia cinetica. Ciò si vede anche più esplicitamente ridimostrandola:

$$\begin{aligned} dT &:= \dot{T}dt = \sum_{h=1}^n m_h \underline{a}_h \cdot \underline{v}_h dt = \sum_{h=1}^n m_h \underline{a}_h \cdot dP_h = \sum_{h=1}^n m_h \underline{a}_h \cdot dO + \sum_{h=1}^n m_h \underline{a}_h \cdot [d\underline{\psi} \times (P_h - O)] \\ &= \left(\sum_{h=1}^n m_h \underline{a}_h \right) \cdot dO + d\underline{\psi} \cdot \left[\sum_{h=1}^n (P_h - O) \times_h \underline{a}_h \right] \stackrel{ECD}{=} \underline{R}^{(e)} \cdot dO + d\underline{\psi} \cdot \underline{M}_O^{(e)} = dL^{(e)}, \end{aligned}$$

Se invece \mathcal{S} non è un solido la (1.31) è evidentemente indipendente dalle ECD, perché in essa vi figurano anche le forze interne.

Nel caso che le forze esterne e quelle interne siano conservative il teorema dell'energia cinetica diventa quello della **conservazione dell'energia meccanica**:

$$\begin{aligned} d(T + U^{(i)} + U^{(e)}) &= 0, & \Rightarrow & T + U^{(i)} + U^{(e)} = \text{cost} \\ d(T + U^{(e)}) &= 0 & \Rightarrow & T + U^{(e)} = \text{cost} \quad \text{se } \mathcal{S} \text{ è rigido.} \end{aligned} \quad (1.33)$$

Il sistema di forze peso esercitate dalla Terra su n particelle è conservativo: dette (x_h, y_h, z_h) le coordinate della particella \mathcal{P}_h rispetto a un sistema di riferimento $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ con \underline{e}_3 parallelo e discorde a \underline{g} , risulta con un rapido calcolo $dL = -dU^{(e)}$, con

$$\underline{F}_h = m_h \underline{g} = -m_h g \underline{e}_3 \quad \Rightarrow \quad U^{(e)} = \sum_{h=1}^n m_h z_h g = m z_G g \quad (1.34)$$

e (x_G, y_G, z_G) sono le coordinate del baricentro G . La coppia di forze tra due particelle $\mathcal{P}, \mathcal{P}'$ interagenti con una legge di forza (1.7) *non dipendente dalla velocità* è conservativa, con energia potenziale U data da⁷:

$$\underline{E}_{\mathcal{P}\mathcal{P}'} = f(r) \underline{u}_{\mathcal{P}\mathcal{P}'}, \quad r := \|P - P'\| \quad \Rightarrow \quad U(r) = - \int^r dr' f(r') + \text{cost.} \quad (1.35)$$

In particolare troviamo: per la legge di gravitazione universale (1.8)

$$U(r) = -G \frac{mm'}{r}; \quad (1.36)$$

per la legge di forza elastica (o di Hook) esercitata tramite una molla ideale di lunghezza a riposo r_0 (v. Fig. 1.3)

$$\underline{E}_{\mathcal{P}\mathcal{P}'} = -k(r - r_0) \underline{u}_{\mathcal{P}\mathcal{P}'}, \quad \Rightarrow \quad U(r) = \frac{k}{2}(r - r_0)^2. \quad (1.37)$$

La forza è proporzionale alla deformazione della molla ed ha direzione opposta ad essa. Se

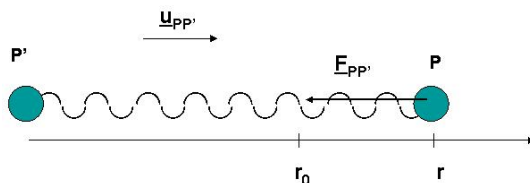


Figure 1.3:

una delle particelle, ad es. \mathcal{P}' , è vincolata a rimanere ferma, U non dipende P' .

Un sistema di forze tra n particelle interagenti con leggi di forza di tipo (1.35)₁ è conservativo; l'energia potenziale U si ottiene sommando quelle (1.35)₂ relative a ciascuna coppia di particelle.

Le definizioni e i risultati precedenti si applicano in particolari a spostamenti virtuali $\delta\mathcal{S} = \{\delta P_1, \dots, \delta P_n\}$, che sono particolari spostamenti elementari; δL sarà corrispondentemente detto *lavoro virtuale* ed indicato con il simbolo δL . In particolare, per un sistema Σ di forze agenti sui punti P_h di uno stesso solido varrà la relazione

$$\delta L = \underline{R} \cdot \delta O + \underline{M}_O \cdot \delta \underline{\psi}. \quad (1.38)$$

Applichiamo il teorema dell'energia cinetica ad un solido con asse fisso r (v. figura 1.4 sinistra). Preso $O \in r$, e scelta una terna con $x \equiv r$ dato che $\delta O = \underline{0}$, $\delta \underline{\psi} \sim \underline{\omega} \parallel \vec{x}$, troviamo

⁷Da $\dot{r} = \frac{d}{dt} \sqrt{(P-P') \cdot (P-P')} = \frac{P-P'}{\sqrt{(P-P') \cdot (P-P')}} \cdot (\dot{P} - \dot{P}') = (\dot{P} - \dot{P}') \cdot \underline{u}_{\mathcal{P}\mathcal{P}'}$ segue $dr = d(P-P') \cdot \underline{u}_{\mathcal{P}\mathcal{P}'}$ e la tesi

$$dL = \underline{E}_{\mathcal{P}\mathcal{P}'} \cdot dP + \underline{E}_{\mathcal{P}'\mathcal{P}} \cdot dP' = f(r) \underline{u}_{\mathcal{P}\mathcal{P}'} \cdot (dP - dP') = f(r) \underline{u}_{\mathcal{P}\mathcal{P}'} \cdot d(P-P') = f(r) dr = -dU. \quad \square$$

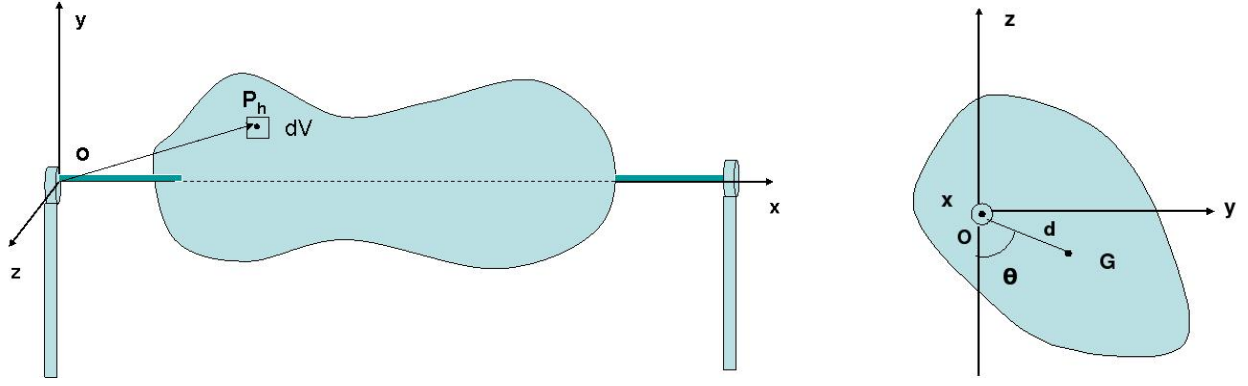


Figure 1.4:

da un lato che per la (1.30) il lavoro delle forze esterne è dato da

$$\delta L^{(e)} = M_O^{(e)r} \delta \psi.$$

Dall'altro, siccome il moto di ogni particella è circolare su una circonferenza ortogonale all'asse, con centro su r e raggio pari alla distanza $\delta_h = \|P_h - O\| \sin \theta_h$ del punto P_h del solido da r allora, $v_h = \delta_h \omega$ e

$$T = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n m_h v_h^2 = \frac{1}{2} \sum_{h=1}^n m_h \delta_h^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I_r \omega^2, \quad I_r := \sum_{h=1}^n m_h \delta_h^2; \quad (1.39)$$

I_r è detto *momento d'inerzia del solido rispetto a r* , ed è indipendente da t . Di qui $\dot{T} = I_r \dot{\omega} \omega = I_r \dot{\psi} \dot{\psi}$, e quindi $\delta T = \dot{T} dt = I_r \dot{\psi} \dot{\psi} dt = I_r \dot{\psi} \delta \psi$, da cui, applicando la (1.32), deriviamo **l'equazione del moto di un solido con asse fisso x** :

$$I_r \ddot{\psi} = M_O^{(e)x}. \quad (1.40)$$

A parità di $M_O^{(e)r}$, quanto maggiore è I_r tanto minore è $\ddot{\psi}$, cioè il ritmo di variazione della velocità angolare.

Pendolo composto

Scriviamo l'equazione nel caso particolare di un solido pesante ruotante attorno ad un asse orizzontale liscio, che scegliamo come asse \vec{x} (v. figura 1.4 destra). L'uniche forze esterne sono evidentemente il sistema delle forze peso, equivalente a (G, mg) , e quello delle forze vincolari, che non compie lavoro (v. piú avanti). Indichiamo con ψ l'angolo tra il piano π passante per \vec{x} e verticale (e quindi fisso) ed il piano π' passante per \vec{x} e G (e quindi solidale al solido). Detta d la distanza di G da \vec{x} (la supporremo > 0), il braccio di (G, mg) rispetto a \vec{x} risulta evidentemente $h = d \sin \psi$. Quindi l'equazione (1.40) diventa

$$\ddot{\psi} = -\Omega^2 \sin \psi, \quad \text{ove } \Omega^2 := mg d / I_x. \quad (1.41)$$

Questa è la stessa equazione differenziale che regola il moto di un pendolo semplice, la pulsazione Ω di quest'ultimo essendo definita da $\Omega^2 = g/l$! In altri termini, il solido si muove

come un pendolo semplice di lunghezza $l = I_x/md!$ Per questo motivo suole chiamarsi "pendolo composto", ed l *lunghezza equivalente* del pendolo composto.

Approfondimento. Se si vincola il solido pesante a ruotare non attorno a \bar{x} ma attorno ad un asse $r' \parallel \bar{x}$ posto a distanza l nel piano $G\bar{x}$, Ω^2 non cambia (*reversibilit  del pendolo composto*)! Per dimostrarlo basta usare il teorema di Steiner-Huygens. Ci  suggerisce un metodo per misurare g con grande precisione senza bisogno di misurare I_x , semplicemente da $g = \Omega^2 l$. Si osservi innanzitutto che le frequenze Ω si possono misurare con grande precisione pur di disporre di un tempo sufficiente per contare tanti periodi. Si pu  inoltre determinare con grande precisione l'asse $r' \parallel \bar{x}$ che d  lo stesso periodo per approssimazioni successive, spostandolo con metodi micrometrici.

Moto di puro rotolamento di un cilindro pesante su un piano inclinato

È facile calcolare che il momento di inerzia I_r di un cilindro omogeneo di massa m e raggio R rispetto al suo asse di simmetria r è $I_r = mR^2/2$. Il sistema ha grado di libert  $n = 1$. Con riferimento alla figura 1.5, come coordinata lagrangiana posso scegliere per esempio l'angolo di rotazione ψ tra un piano solidale passante per r ed un piano orizzontale, o la quota z_G del baricentro G , o la coordinata y'_G di G lungo un'asse coincidente con la sua traiettoria. Le loro derivate e la velocit  di G sono collegate dalle relazioni

$$\underline{v}_G = \dot{y}'_G \underline{e}'_2, \quad \dot{y}'_G = -R\dot{\psi}, \quad \dot{z}_G = -\dot{y}'_G \sin \theta = \sin \theta R\dot{\psi}, \quad (1.42)$$

da cui $v_G^2 = R^2\dot{\psi}^2$, $\dot{z}_G^2 = v_G^2 \sin^2 \theta = \sin^2 \theta R^2\dot{\psi}^2$. Rispetto alla terna del baricentro $\mathcal{T}' = (G, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$ il moto appare di rotazione attorno a r fisso, quindi $T' = \frac{1}{2}I_r\dot{\psi}^2 = \frac{m}{4}R^2\dot{\psi}^2$. Perci  applicando (1.27) troviamo $T = T' + \frac{1}{2}mv_G^2 = \frac{3}{4}mR^2\dot{\psi}^2 = \frac{3m}{4\sin^2 \theta}\dot{z}_G^2$.

D'altro canto, per il teorema dell'energia cinetica $dT = \dot{d}L^{(e)} = \dot{d}L^{(v)} + \dot{d}L^{(a)}$, ma $dL^{(v)} = 0$ perch  il cilindro rotola senza strisciare (v. vincoli ideali, pi  avanti), mentre il lavoro delle forze peso   $\dot{d}L^{(a)} = -dU^{(a)}$, ove $U^{(a)} = mgz_G$ a meno di una costante additiva; ci  l'energia meccanica E   costante. Adottiamo z_G come coordinata lagrangiana. Applicando (1.33) troviamo

$$E := T + U^{(a)} = \frac{3m}{4\sin^2 \theta}\dot{z}_G^2 + mgz_G = \text{cost}; \quad (1.43)$$

il valore di E si pu  determinare utilizzando i valori iniziali z_0, v_0^z di z_G, \dot{z}_G . Per ogni valore di E la (1.43) ci permette di ricavare z_G in funzione di \dot{z}_G , o viceversa.

Derivando rispetto a t troviamo

$$m\dot{z}_G \left(\frac{3}{2\sin^2 \theta}\dot{z}_G + g \right) = 0, \quad (1.44)$$

che deve essere verificata assieme alla (1.43). La (1.44)   soddisfatta *per ogni t* se l'espressione in parentesi tonda   identicamente nulla, ossia se

$$\dot{z}_G = -\frac{2\sin^2 \theta}{3}g, \quad \Rightarrow \quad \underline{a}_G = \ddot{y}'_G \underline{e}'_2 = \frac{\ddot{z}_G}{\sin \theta} \underline{e}'_2 = \frac{2}{3}\sin \theta g \underline{e}'_2 \quad (1.45)$$

ci  il moto   uniformemente accelerato con un'accelerazione minore di g non solo perch  il piano   inclinato, ma anche perch  il moto del cilindro non   traslatorio: per contro, un solido

che scivola su un piano inclinato liscio (moto traslatorio) ha un'accelerazione $\underline{a}_G = \sin \theta g \underline{e}'_2$. La soluzione dell'equazione del moto è ovviamente

$$z_G(t) = -\frac{\sin \theta^2}{3} g t^2 + v_0^z t + z_0. \quad (1.46)$$

Applicando la IECD troviamo la risultante $\underline{R}^{(v)}$ delle reazioni vincolari esercitate dal piano,

$$m \underline{a}_G = \underline{R}^{(e)} = m \underline{g} + \underline{R}^{(v)} \quad \Rightarrow \quad m (\underline{a}_G - \underline{g}) = \underline{R}^{(v)} = \underline{N} + \underline{A}. \quad (1.47)$$

Essa come le sue componenti normale \underline{N} e tangenziale \underline{A} sono quindi costanti, e date da

$$\underline{N} = mg \cos \theta \underline{e}'_3, \quad \underline{A} = \frac{2}{3} mg \sin \theta \underline{e}'_2 - mg \sin \theta \underline{e}'_2 = -\frac{m}{3} g \sin \theta \underline{e}'_2 \quad (1.48)$$

Per la simmetria del problema rispetto alla coordinata y , la densità (lineare) di reazione vincolare in ogni punto dell'asse di contatto del cilindro sul piano (l'asse di Mozzi) sarà $\underline{R}^{(v)}$ fratto l'altezza del cilindro. Verifichiamo la IIECD con polo in G : il momento risultante delle forze peso e reazioni normali è nullo, quindi il momento delle forze esterne si riduce a quello delle componenti d'attrito, $\underline{M}_G^{(e)} = -\frac{mR}{3} g \sin \theta \underline{e}_1$; per il teorema di Koenig e poiché r è asse centrale (v. capitoli successivi) troviamo $\underline{L}_G = \underline{L}'_G = I_r \dot{\psi} \underline{e}_1 = \frac{m}{2} R^2 \frac{\dot{z}_G}{R \sin \theta} \underline{e}_1$; la IIECD è quindi verificata:

$$\underline{M}_G^{(e)} - \dot{\underline{L}}_G = \frac{mR}{3} g \sin \theta \underline{e}_1 + \frac{mR}{2 \sin \theta} \ddot{z}_G \underline{e}_1 = \frac{mR}{3} g \sin \theta \underline{e}_1 - \frac{mR}{2} \frac{2 \sin \theta}{3} g \underline{e}_1 = 0.$$

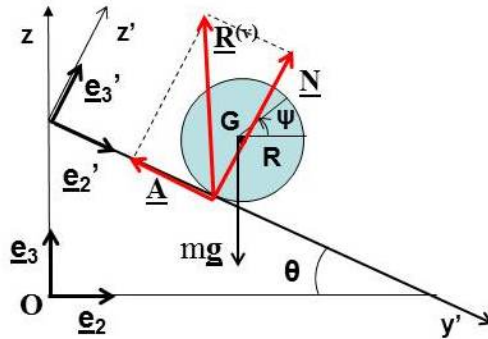


Figure 1.5:

1.8 Forze attive e reazioni vincolari. Forze d'attrito

La forza peso (1.34), quella gravitazionale (1.8), quella elastica (1.37) e più in generale una forza (1.7) sono esempi di *forze attive*, nel senso seguente:

Diremo *attive* tutte le forze la cui legge di forza è completamente nota, cioè le forze che sono completamente note come funzioni del tempo, delle variabili posizione, velocità, etc., dei punti materiali tra cui si esercitano.

Macroscopicamente constatiamo l'impenetrabilità dei corpi. Corpi a contatto esercitano quindi l'uno sull'altro opportune forze che diremo di contatto. Come accade per una molla, esse crescono con - e si oppongono a - le loro deformazioni nelle zone di contatto, con una legge simile alla (1.37). Per molti corpi in condizioni ordinarie, per esempio una biglia ed un tavolo a contatto, la costante k è così grande che conseguentemente le deformazioni sono così piccole da non essere macroscopicamente osservabili. Diremo questi corpi *rigidi*, e ignoreremo le deformazioni. Come abbiamo già visto nella cinematica, l'impenetrabilità dei corpi si formula allora come delle condizioni, o *vincoli*, sotto forma di equazioni o disequazioni, sulle posizioni/moti dei punti dei corpi. Semplificheremo così enormemente la descrizione del loro stato di quiete o di moto (basteranno 6 coordinate per ogni solido, o anche meno se questo è soggetto a dei vincoli bilaterali). Tuttavia le forze che esercitano questi corpi rigidi, che chiameremo *reazioni vincolari*, non si potranno più esprimere in funzione delle coordinate (e loro variazioni, cioè deformazioni); le leggi di forza saranno solo parzialmente rimpiazzate dalle *leggi d'attrito* nel caso di vincoli di appoggio/appartenenza ad una superficie (v. più avanti). Potremo determinare in modo completo le reazioni vincolari solo contestualmente alla risoluzione delle equazioni del moto (o dell'equilibrio) dei corpi coinvolti, sfruttando l'informazione contenuta nelle equazioni o disequazioni dei vincoli. In altri termini, solo mettendo a sistema *tutte* le relazioni a primo membro si possono determinare le incognite a secondo membro:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{equazioni del moto} \\ \text{(dis)equazioni dei vincoli} \\ \text{(eventualmente) leggi d'attrito} \end{array} \right. \xrightarrow{\text{risoluzione}} \left\{ \begin{array}{l} \text{moto (incluso il caso della quiete)} \\ \text{reazioni vincolari.} \end{array} \right. \quad (1.49)$$

Reazioni vincolari su un punto materiale

Per un punto materiale \mathcal{P} l'esempio più semplice di vincolo è che la sua posizione $P(t)$ rimanga fissa in un certo punto $P_0 \in \mathcal{E}_3$ come in Figura 1.7 sinistra, che si scrive $P(t) \equiv P_0$. Considereremo anche il caso di un punto materiale \mathcal{P} vincolato a non oltrepassare una superficie (vincolo di appoggio: esempio di vincolo unilaterale), o a rimanervi su (vincolo di appartenenza: esempio di vincolo bilaterale). Il vincolo di appartenenza si può realizzare come una sottile intercapedine come in Figura 1.6 destra. Per es., per la biglia sul tavolo il vincolo di appoggio è $z_P(t) \geq 0 \forall t$ (v. Fig. 1.6 sinistra). Il vincolo che \mathcal{P} rimanga su una

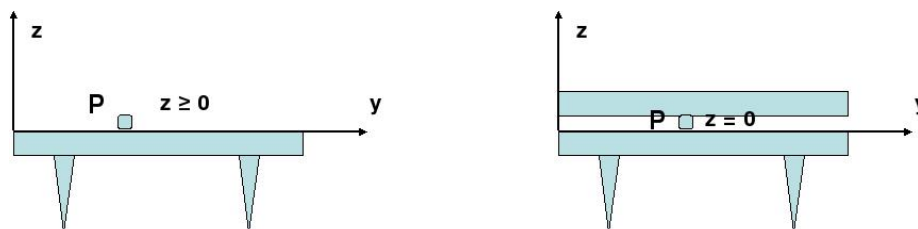


Figure 1.6:

curva si può pensare come un vincolo di appartenenza a due superfici, aventi per intersezione

la curva. Chiamiamo $\underline{\phi}, \underline{F}$ rispettivamente la reazione vincolare e la risultante delle forze attive cui è soggetto. La II legge dá

$$\underline{F} + \underline{\phi} = \begin{cases} \underline{0} & \text{statica,} \\ m\underline{a}_P & \text{dinamica.} \end{cases} \quad (1.50)$$

1. Vincolo di punto fisso $P(t) \equiv P_0$. V. Fig. 1.7 sinistra. In questo caso il moto è già noto; $\underline{a}_P = \ddot{P} = \underline{0}$ e la (1.50) dá $\underline{\phi} = -\underline{F}$: Lo schema (1.49) é verificato.
2. Vincolo di appoggio ad una superficie (è unilaterale). Siano \underline{n} la normale esterna alla



Figure 1.7:

superficie nel punto di contatto P , $\underline{\phi} = \underline{N} + \underline{A}$ la decomposizione della reazione vincolare nelle componenti $\underline{N}, \underline{A}$ normale e tangenziale alla superficie in P , v. Fig. 1.7 destra. Risulta $\underline{N} \cdot \underline{n} \geq 0$ (\underline{N} diretto verso l'esterno) e inoltre

$$\text{legge d'attrito statica:} \quad \underline{A} \leq f_s \underline{N} \quad (1.51)$$

$$\text{legge d'attrito dinamica:} \quad \underline{A} = -f_d \underline{N} \frac{v_P}{v_P}. \quad (1.52)$$

$f_s, f_d \geq 0$, sono detti coefficienti di attrito statico, dinamico e dipendono dalla natura delle superfici a contatto, con $f_s > f_d$ se $f_d > 0$. Indichiamo anche con $\underline{F}_n, \underline{F}_t$ i componenti di \underline{F} normale e tangenziale alla superficie in P .

Mettendo assieme le relazioni precedenti si potranno determinare (per assegnate condizioni iniziali) sia le 3 incognite $x_P^i(t)$, sia le 3 incognite ϕ^i :

- Caso statico Se inizialmente \mathcal{P} è in P con velocità $v_P = 0$, rimarrá fermo se è soddisfatta (1.51) o, equivalentemente [poiché la (1.50) implica $\underline{N} = -\underline{F}_n$, $\underline{A} = -\underline{F}_t$, da cui $\underline{A} = \underline{F}_t$, $\underline{N} = \underline{F}_n$] se

$$\underline{F}_n \cdot \underline{n} \leq 0 \quad \underline{F}_t \leq f_s \underline{F}_n; \quad (1.53)$$

in questo caso risulta

$$\underline{\phi} = -\underline{F}. \quad (1.54)$$

Riassumendo, se è soddisfatta (1.53) allora $P(t) = cost$ (\mathcal{P} rimane fermo) e $\underline{\phi}$ è determinato dalla (1.54): lo schema (1.49) é nuovamente verificato.

- Caso dinamico. Se inizialmente $\underline{v}_P \neq 0$, oppure $\underline{v}_P = 0$ ma (1.53) non è soddisfatta, abbiamo ugualmente a disposizione 6 equazioni per determinare completamente le 6 incognite $x_P^i(t), \phi^i(t)$. Se a $t = 0$ \underline{v}_P ha direzione non tangente alla superficie e verso esterno, allora il punto si stacca dalla superficie, ϕ si annulla per $t > 0$, e l'equazione da risolvere si riduce a quella $\underline{F} = m\underline{a}_P$ di una particella libera. Se la superficie è piana e a $t = 0$ \underline{v}_P è tangente ad essa, proiettando (1.50) su \underline{n} troviamo ancora $\underline{N} = -\underline{F}_n$, che implica $N = F_n$, che sostituita nella (1.52) dá $\underline{A} = -f_d F_n \frac{\underline{v}_P}{v_P}$. Sostituendo quest'ultima nella componente tangenziale della (1.50) si ottiene un'equazione che determina il moto del punto lungo il piano. Se la superficie non è piana, proiettando (1.50) su \underline{n} troviamo $\underline{N} = -\underline{F}_n + m\underline{a}_n$, ove $\underline{a}_n = \pm \frac{v_P^2}{R} \underline{n}$ è l'accelerazione centripeta, ed R è il raggio di curvatura della superficie nella posizione del punto. Sostituendo N nella (1.52) ed il risultato nella componente tangenziale della (1.50) di nuovo si ottiene un'equazione a due componenti tangenziali che determina il moto del punto lungo la superficie. Nel caso che ad un certo istante t_1 $\underline{v}_P(t_1) = 0$, da t_1 si ricade nel caso statico.

3. Vincolo di appartenenza ad una superficie (è bilaterale; v. Fig. 1.8 sinistra)

$\underline{N} \cdot \underline{n}$ è di segno arbitrario. Le (1.51), (1.52), (1.55) valgono come prima. Mettendo assieme come prima le relazioni precedenti si potranno determinare (per assegnate condizioni iniziali) sia le 3 incognite $x_P^i(t)$, sia le 3 incognite ϕ^i .

4. Vincolo di appartenenza ad una curva γ (è bilaterale; v. Fig. 1.8 destra) Ora si conosce

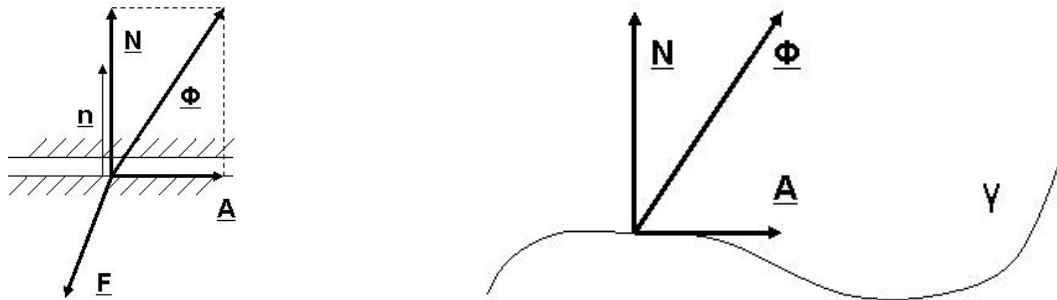


Figure 1.8:

a priori la direzione di $\underline{A} \parallel \underline{t}$ (ove \underline{t} è il versore tangente a γ in P), ma non di $\underline{N} \perp \underline{t}$! Inoltre sarà $\underline{v}_P \parallel \underline{t}$. Le (1.51), (1.52) (1.55) valgono come prima. Di nuovo, mettendo assieme le relazioni precedenti si potranno determinare (per assegnate condizioni iniziali) sia le 3 incognite $x_P^i(t)$, sia le 3 incognite ϕ^i .

Da (1.51) segue che la forza d'attrito statica massima è $A_{statica}^{max} = f_s F_n$, mentre da quanto detto segue che la forza d'attrito dinamica è $A_{dinamica} = f_d F_n$. Sperimentalmente risulta

$$f_d F_n = A_{dinamica} \leq A_{statica}^{max} = f_s F_n \quad \Leftrightarrow \quad f_d < f_s; \quad (1.55)$$

la spiegazione microscopica intuitiva è: nel caso statico le scabrosità delle due superfici a contatto si incastrano. La (1.55) spiega per esempio perché la frenata di un'auto è più efficace se la ruota rotola sulla strada senza strisciare.

È possibile dare una rappresentazione grafica delle leggi d'attrito (1.51), (1.53), (1.52) con i cosiddetti **coni d'attrito** (v. Fig. 1.9): Nel caso di vincolo di appoggio o appartenenza a una superficie,

$$\text{caso statico:} \quad \frac{A}{N} = \frac{F_t}{F_n} = \text{tg}\varphi \leq f_s \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \leq \varphi_s := \arctan f_s \quad (1.56)$$

$$\text{caso dinamico:} \quad \frac{A}{N} = \text{tg}\varphi = f_d \quad \Leftrightarrow \quad \varphi \leq \varphi_d := \arctan f_d \quad (1.57)$$

Quindi nel caso statico $\underline{\phi} = -\underline{F}$ è interno al cono statico, piú precisamente alla sua falda esterna nel caso unilaterale. Nel caso dinamico $\underline{\phi}$ giace sul cono dinamico, piú precisamente sulla sua falda esterna nel caso unilaterale (v. Fig. 1.9). Nel caso di vincolo di appartenenza ad una curva potremmo introdurre coni con asse \underline{t} .

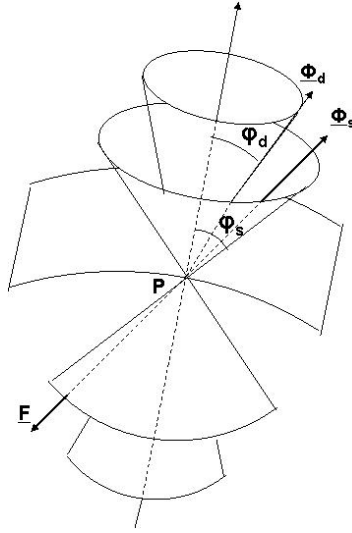


Figure 1.9:

Definizione. Diremo *vincoli lisci* quelli per cui $f_s = f_d = 0$, *scabri* gli altri.

Per i vincoli lisci appena visti risulta quindi $\underline{A} = \underline{0}$, $\underline{\phi} = \underline{N} \perp$ superficie/curva vincolare. Ovviamente i vincoli lisci sono un'idealizzazione, cui ci si può avvicinare levigando opportunamente le superfici di contatto. Se le forze attive agenti su \mathcal{P} sono conservative con energia potenziale $U^{(a)}$, la variazione dell'energia meccanica $E = T + U^{(a)}$ nell'intervallo temporale $[t, t+dt]$ è data da

$$dE = dT + dU^{(a)} = \underline{d}L^{(v)}. \quad (1.58)$$

Se la superficie è fissa il lavoro $\underline{d}L^{(v)}$ compiuto da $\underline{\phi}$ in $[t, t+dt]$ se P si sposta *lungo* la superficie/curva vincolare è

$$\delta L^{(v)} = \underline{d}L^{(v)} = \underline{\phi} \cdot dP = \underline{A} \cdot \underline{v} dt = -N f_d v dt \leq 0. \quad (1.59)$$

($\underline{N} \cdot dP = 0$ perché $\underline{N} \perp \underline{v}$). Conseguentemente, risulta sempre $dE \leq 0$, e $dE < 0$ se i vincoli sono scabri e $v, N \neq 0$ (se sono assenti forze attive queste diventano risp. $dT \leq 0$, e $dT < 0$). Perciò le reazioni di vincoli scabri sono *dissipative*, cioè dissipano energia.

1.9 Vincoli ideali e caratterizzazione dei vincoli lisci: il PRV

Indichiamo di seguito con $\Sigma^{(v)}$ il sistema delle forze vincolari agenti su \mathcal{S} , con $\delta L^{(v)}$ il lavoro virtuale compiuto dal sistema delle forze vincolari in corrispondenza di $\delta\mathcal{S}$.

Definizione. Diremo *ideale* un vincolo che può esplicare tutte e sole le reazioni vincolari soddisfacenti la condizione

$$\delta L^{(v)} \geq 0 \quad \forall \delta\mathcal{S}. \quad (1.60)$$

Ricordando la definizione di spostamenti (ir)reversibili, la relazione precedente implica

$$\delta L^{(v)} = 0 \quad \text{se } \delta\mathcal{S} \text{ è reversibile} \quad (1.61)$$

$$\delta L^{(v)} > 0 \quad \text{solo se } \delta\mathcal{S} \text{ è irreversibile} \quad (1.62)$$

Ricordando che, se i vincoli sono bilaterali, tutti gli spostamenti sono reversibili, troviamo che in questo caso $\delta L^{(v)} = 0 \quad \forall \delta\mathcal{S}$.

La (1.60) è facilmente verificabile dal punto di vista sperimentale per accertare che un vincolo sia ideale: dopo averlo reso fisso (in modo che spostamenti virtuali e spostamenti compatibili coi vincoli coincidano) e aver applicato solo forze attive conservative (in particolare, nulle) basta verificare che le variazioni ΔE a partire da una qualunque posizione iniziale non siano mai negative; per la (1.58) risulterà allora $\delta L^{(v)} \geq 0$ per ogni $\delta\mathcal{S}$ ($\delta L^{(v)} = 0$ per ogni $\delta\mathcal{S}$ reversibile). Basta effettuare questa verifica per velocità iniziali dirette in n direzioni indipendenti ($n = \text{grado di libertà}$), poiché, in termini di coordinate lagrangiane

$$q = (q^1, \dots, q^n) \text{ risulta } \delta P_i = \sum_{h=1}^n \frac{\partial P_i}{\partial q^h} \delta q^h \text{ e}$$

$$\delta L^{(v)} = \sum_{i=1}^N \underline{R}_i^{(v)} \cdot \delta P_i = \sum_{h=1}^n Q_h \delta q^h, \quad Q_h := \sum_{i=1}^N \underline{R}_i^{(v)} \cdot \frac{\partial P_i}{\partial q^h}.$$

Principio delle reazioni vincolari (PRV): *I vincoli lisci sono ideali.*

Dimostriamo il PRV innanzitutto per $\mathcal{S} = \{\mathcal{P}\}$ e i vincoli considerati nella sezione 1.8:

1. Vincolo di appoggio ad una superficie σ . $\delta L^{(v)} = \underline{\phi} \cdot \delta P = |\underline{\phi}| |\delta P| \cos \theta$. $\underline{\phi} \perp \sigma$ in P implica $\theta \leq \pi/2$, che implica $\delta L^{(v)} \geq 0$ (v. Fig. 1.10 sinistra). Vale anche il viceversa: supposto $\delta L^{(v)} \geq 0$, se non fosse $\underline{\phi} \perp \sigma$ potremmo trovare uno spostamento virtuale $\delta P'$ tale che $\delta L^{(v)} < 0$, contro l'ipotesi (v. Fig. 1.10 centro). Si noti che per il dP in Fig. 1.10 destra (compatibile con il vincolo mobile, ma non come se questo fosse fisso) risulta $dL^{(v)} < 0$; cioè solo il lavoro virtuale, non necessariamente anche quello effettivo, delle forze vincolari di vincoli lisci soddisfa la (1.60). Questo illustra l'importanza di aver definito gli spostamenti virtuali, nel caso di vincoli mobili, come quelli compatibili con i vincoli *come se fossero fissi*.
2. Vincolo di appartenenza ad una superficie/curva. $\forall \delta P$ è reversibile, $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\delta L^{(v)} = 0$.

Nel caso di 2 solidi a contatto in uno o più punti delle loro superfici esterne si applicano le considerazioni precedenti a ciascuno dei punti a contatto.



Vincolo mobile: come in figura, può capitare $dL^{(v)} = \underline{R}^{(v)} \cdot d\mathbf{P} < 0$, ma è sempre $\delta L^{(v)} = \underline{R}^{(v)} \cdot \delta \mathbf{P} \geq 0$

Figure 1.10:

La caratterizzazione (1.60) vale anche se i vincoli lisci sono interni, cioè vincolano tra loro due o più corpi di \mathcal{S} . Lo dimostriamo solo nel caso di due corpi $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ di \mathcal{S} (di cui almeno uno, diciamo \mathcal{C}_1 , sia un solido, mentre \mathcal{C}_2 potrebbe anche essere anche un punto materiale isolato) inizialmente a contatto, cioè le posizioni P_1, P_2 di una particella di \mathcal{C}_1 e di una di \mathcal{C}_2 coincidono ($P_1 = P_2$), e chiamiamo $\underline{R}_1, \underline{R}_2$ le reazioni vincolari esercitate su P_1, P_2 rispettivamente da $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_1$. Per il III principio $\underline{R}_1 + \underline{R}_2 = 0$. Se li prendiamo singolarmente, (al più) uno dei due contributi $\underline{R}_1 \cdot \delta P_1, \underline{R}_2 \cdot \delta P_2$ a $\delta L^{(v)}$ potrebbe essere negativo, perchè potrebbe essere ottuso l'angolo tra i vettori corrispondente (per esempio, nella Fig. 1.11 risulta $\underline{R}_1 \cdot \delta P_1 < 0$). Mostriamo tuttavia che la loro somma non è mai negativa, in accordo con il PRV; il punto è che, per costituire uno spostamento virtuale, $\delta P_1, \delta P_2$ non sono indipendenti, ma sono adattati l'uno all'altro.

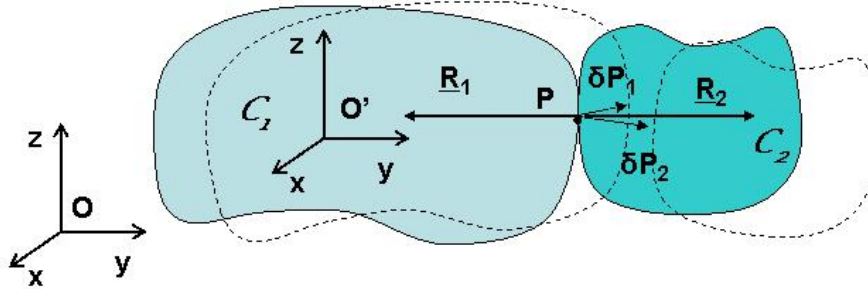


Figure 1.11:

Consideriamo il moto nel sistema di riferimento fisso $\mathcal{T} = (Oxyz)$ e in quello $\mathcal{T}' = (O'x'y'z')$ solidale a \mathcal{C}_1 . Per la formula dei moti relativi

$$\underline{v}_2 = \underline{v}'_2 + \underline{v}_1 \quad \Rightarrow \quad dP_2 = dP'_2 + dP_1 \quad \Rightarrow \quad \delta P_2 = \delta P'_2 + \delta P_1$$

(\underline{v}_1 gioca il ruolo di velocità di trascinamento), v. Fig. 1.11. Il contributo di $\underline{R}_1, \underline{R}_2$ al lavoro virtuale $\delta L^{(v)}$ totale sarà

$$\delta L_{12}^{(v)} = \underline{R}_1 \cdot \delta P_1 + \underline{R}_2 \cdot \delta P_2 = (\underline{R}_1 + \underline{R}_2) \cdot \delta P_1 + \underline{R}_2 \cdot \delta P'_2 \stackrel{III}{=} \underline{R}_2 \cdot \delta P'_2 \geq 0$$

La disuguaglianza vale perché nel moto relativo a \mathcal{C}_1 quest'ultimo appare come vincolo fisso. Quindi il corrispondente lavoro virtuale soddisferà anche in questo caso alla caratterizzazione (1.60), come volevamo dimostrare.

Nella sezione successiva dimostreremo il PRV per una classe di vincoli su un solido \mathcal{C} adottati comunemente in scienza delle costruzioni e delle macchine. Poi, giustificati da questi esempi e dal fatto che sperimentalmente non è mai stato sconfessato per alcun vincolo liscio, adotteremo il PRV come un Principio (Legge) fondamentale, al pari di quelle di Newton o delle equazioni cardinali.

Esistono anche vincoli ideali che non sono lisci, come il vincolo di puro rotolamento di un cilindro su un piano scabro: siccome le velocità, e quindi gli spostamenti virtuali, dei punti di contatto sono nulli, allora in base alla (1.59)₁ è soddisfatta (1.61), e quindi anche (1.60).

Analisi cinematica e dinamica di alcuni vincoli olonomi applicati ad un solido

Indichiamo con s il numero di equazioni indipendenti corrispondenti ad un vincolo, con n il grado di libertà del solido \mathcal{C} soggetto a quel vincolo, con C il suo centro istantaneo di rotazione (nel caso di moto rigido piano), con $\Sigma^{(a)}, \Sigma^{(v)}$ i sistemi delle forze rispettivamente attive o vincolari su \mathcal{C} , con $\underline{R}^{(a)}, \underline{R}^{(v)}$ le loro risultanti, con $\underline{M}_O^{(a)}, \underline{M}_O^{(v)}$ i loro momenti risultanti rispetto ad un polo O . Le ECD $_{\mathcal{C}}$ sono

$$\underline{R}^{(e)} = \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)} = m\underline{a}_G, \quad \underline{M}_A^{(e)} = \underline{M}_A^{(a)} + \underline{M}_A^{(v)} = \dot{\underline{L}}_A + (G-A) \times m\underline{v}_G. \quad (1.63)$$

Se \mathcal{C} è in equilibrio (caso statico) i secondi membri sono nulli e queste si riducono alle ECS $_{\mathcal{C}}$

$$\underline{R}^{(e)} = \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)} = \underline{0}, \quad \underline{M}_A^{(e)} = \underline{M}_A^{(a)} + \underline{M}_A^{(v)} = \underline{0}, \quad (1.64)$$

che permettono di ricavare immediatamente $\underline{R}^{(v)}, \underline{M}_A^{(v)}$ note $\underline{R}^{(a)}, \underline{M}_A^{(a)}$. Se $\Sigma^{(a)}$ è contenuto in un piano π , $\Sigma^{(a)} \subset \pi$, sarà $\underline{R}^{(a)} \parallel \pi$, $\underline{M}_A^{(a)} \perp \pi$ se scelgo $A \in \pi$, e per le (1.64) anche $\underline{R}^{(v)} \parallel \pi$, $\underline{M}_A^{(v)} \perp \pi$. Sceglieremo il sistema di riferimento $(Oxyz)$ sempre col piano Oxy coincidente col piano π del foglio.

1. **Incastro.** (Vincolo bilaterale; v. Fig. 1.12 sinistra) $s = 6$, $\delta A = \underline{0}$, $\delta \underline{\psi} = \underline{0}$: $\Rightarrow n = 0$.
 $C \equiv P \forall P \in \mathcal{E}_3$. In generale,

$$\Sigma^{(v)} \sim \{(A, \underline{R}^{(v)}) + \text{coppia di momento } \underline{M}_A^{(v)}\}.$$

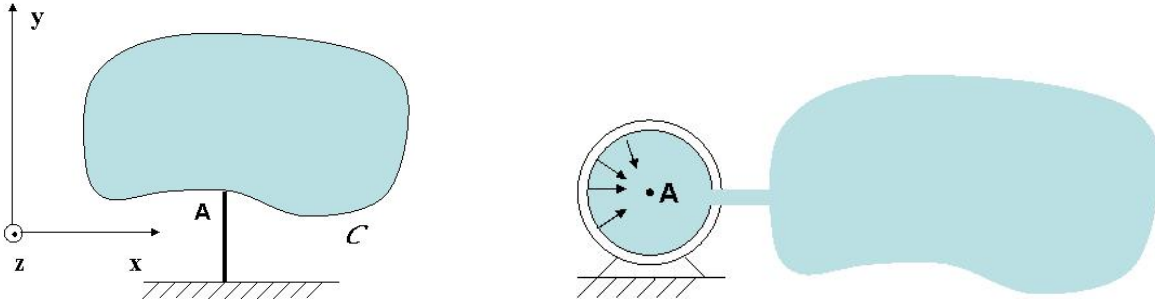


Figure 1.12:

2. **Cerniera sferica.** (Vincolo bilaterale; v. Fig. 1.12 destra) $s = 3$, $\delta A = \underline{0}$, $\delta \underline{\psi}$ qualsiasi: $\Rightarrow n = 3$. L'asse istantaneo di rotazione \mathcal{A}_t passa sempre per A . Se la cerniera è perfettamente liscia, la reazione vincolare esplicita in ogni punto di contatto dalla cavità sul pomo sferico (o viceversa) è normale alla superficie sferica, e quindi concorre nel suo centro A ; quindi $\underline{M}_A^{(v)} = \underline{0}$ e, in generale,

$$\Sigma^{(v)} \sim \{(A, \underline{R}^{(v)})\}.$$

Tutti i vincoli che seguono vincolano il solido a muoversi di moto piano, o vanno intesi nel senso di agire sul solido \mathcal{C} già vincolato, con altri vincoli, a muoversi di moto piano nel piano π del foglio (allora prima di imporre il vincolo già $n = 3$).

3. **Cerniera cilindrica.** (Vincolo bilaterale; lo rappresentiamo come in Fig. 1.13 sinistra) $s = 5$ nello spazio, $s = 2$ se \mathcal{C} è già vincolato a muoversi di moto piano. L'asse istantaneo di rotazione \mathcal{A}_t coincide con l'asse della cerniera, che in Figura 1.13 destra è $\perp \pi$. $C = A = \mathcal{A}_t \cap \pi$, $\delta A = \underline{0}$, $\delta \underline{\psi} \parallel \vec{z} \Rightarrow n = 1$.

Se la cerniera è perfettamente liscia, la reazione vincolare esplicita in ogni punto di contatto dalla cavità cilindrica sul cilindro interno (o viceversa) è normale alla superficie cilindrica (v. Fig. 1.12 destra intendendo A un punto dell'asse $\perp \pi$), e cioè concorre sull'asse \mathcal{A}_t ; quindi $M_A^{(v)z} = 0$ e, in generale,

$$\Sigma^{(v)} \sim \{(A, \underline{R}^{(v)}) + \text{coppia di momento } \underline{M}_A^{(v)} \parallel \pi\}.$$

Se $\Sigma^{(a)}$ è contenuto nel piano π allora deve essere $\underline{M}_A^{(v)} \perp \pi$; quindi la cerniera esercita un momento nullo, $\underline{M}_A^{(v)} = \underline{0}$, e la relazione precedente si semplifica in

$$\Sigma^{(v)} \sim \{(A, \underline{R}^{(v)})\}, \quad \text{con } R^{(v)z} = 0. \quad (1.65)$$

4. **Carrello.** (Vincolo unilaterale; lo rappresentiamo come in Fig. 1.13 destra). Detto anche appoggio scorrevole. Si suppone che il solido sia già vincolato in altro modo a muoversi di moto piano $\parallel \pi$. $s = 0$. Quindi $\delta \underline{\psi} \parallel \vec{z}$, $z_A = 0$, $y_A \geq 0$, x_A qualsiasi: \Rightarrow se $y_A = 0$ allora $\delta y_A \geq 0$; inoltre $\delta \psi^z$ qualsiasi. $\Rightarrow n = 3$. $C \in a$ se lo spostamento virtuale è reversibile. Se la cerniera cilindrica del carrello è perfettamente liscia e $\Sigma^{(a)} \subset \pi$, partendo dal risultato precedente si trova facilmente che $R_A^z = R_A^x = 0$

$$\Sigma^{(v)} \sim \{(A, R_{A\underline{j}}^y)\}, \quad \text{con } R_{A\underline{j}}^y \geq 0.$$

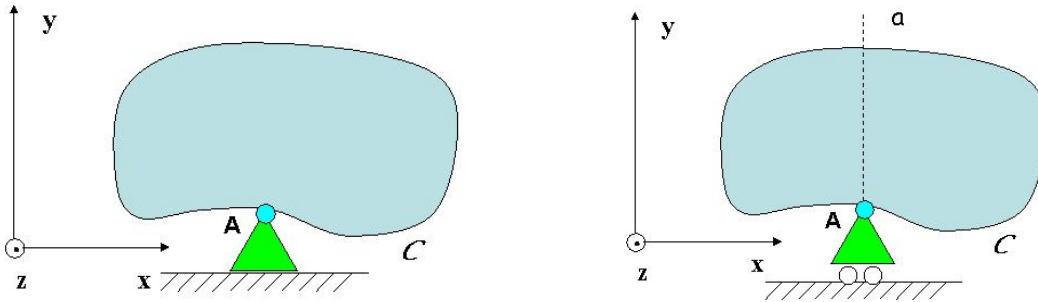


Figure 1.13:

5. **Due Carrelli in opposizione.** (Vincolo bilaterale). $s = 1$, $y_A = \delta y_A = 0$ altrimenti tutto come per il vincolo precedente, ma $R_{A\underline{j}}^y$, essendo somma di due contributi di segno opposto, può assumere entrambi i segni.
6. **Pendolo.** (Vincolo bilaterale; lo rappresentiamo come in Fig. 1.14 sinistra). $s = 4$ nello spazio, $s = 1$ se \mathcal{C} è già vincolato a muoversi di moto piano. La distanza $\|A - B\| = \text{costante}$. $\delta A \parallel \pi$ e $\perp a$ (\Rightarrow per il teorema di Chasles $C \in a$); $\delta \underline{\psi} \parallel \vec{z} \Rightarrow n = 2$.

Supponiamo $\Sigma^{(a)} \subset \pi$, e diciamo $\underline{R}_A, \underline{R}_B$ rispettivamente le reazioni del solido sull'asta del pendolo in A e della base sull'asta del pendolo in B . Se le cerniere in A, B sono perfettamente lisce, vale per entrambe la (1.65), da cui, applicando al pendolo le ECS

$$0 = \underline{M}_A^{(e)z} = [(B - A) \times \underline{R}_B]^z \quad \underline{0} = \underline{R}^{(e)} = \underline{R}_A + \underline{R}_B,$$

troviamo $\underline{R}_A = -\underline{R}_B \parallel (B - A) \parallel a$. Ma per il principio di azione e reazione $\underline{R}^{(v)} = -\underline{R}_A$ quindi, riassumendo,

$$\Sigma^{(v)} \sim \{(A, \underline{R}^{(v)})\}, \quad \text{con } \underline{R}^{(v)} \parallel a. \quad (1.66)$$

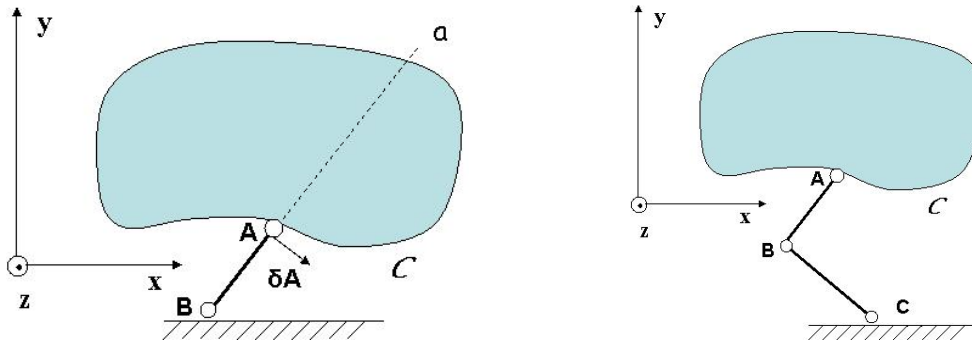


Figure 1.14:

7. **Bipendolo.** (Due pendoli in serie. Vincolo bilaterale; lo rappresentiamo come in Fig. 1.14 destra). $s = 3$ nello spazio. Lo citiamo solo come esempio di dispositivo che vincola il solido a muoversi di moto rigido piano, in un piano perpendicolare alla direzione degli assi delle cerniere, senza esplicitare ulteriori vincoli (eccetto che A, C non possono allontanarsi piú della somma delle lunghezze dei due pendoli).

8. **Doppio pendolo.** (vincolo bilaterale; lo rappresentiamo come in Fig. 1.15 sinistra). $s = 5$ nello spazio, $s = 2$ se C è già vincolato a muoversi di moto piano. I due pendoli vincolano $ABDC$ ad essere un parallelogramma e quindi impongono $AD \parallel BC$, $\Rightarrow \delta\psi = 0$; inoltre come nel caso del pendolo $\delta A \parallel \pi$ e $\perp a$: $\Rightarrow n = 1$. In altri termini il solido può muoversi solo di moto (piano) traslatorio, ed istante per istante $\forall P \in \mathcal{E}_3$ $\delta P = \delta A \parallel \pi$ e $\perp a$, e il centro istantaneo di rotazione è un punto improprio C_∞ , la direzione di a .

Supponiamo $\Sigma^{(a)} \subset \pi$ e le cerniere in A, B, C, D perfettamente lisce. Dalla composizione delle sollecitazioni dei due pendoli, che soddisfano la (1.66), troviamo

$$\Sigma^{(v)} \sim \{(A, \underline{R}^{(v)}) + \text{coppia di momento } \underline{M}_A^{(v)}\}, \quad \text{con } \underline{R}^{(v)} \parallel a, \quad \underline{M}_A^{(v)} \perp \pi. \quad (1.67)$$

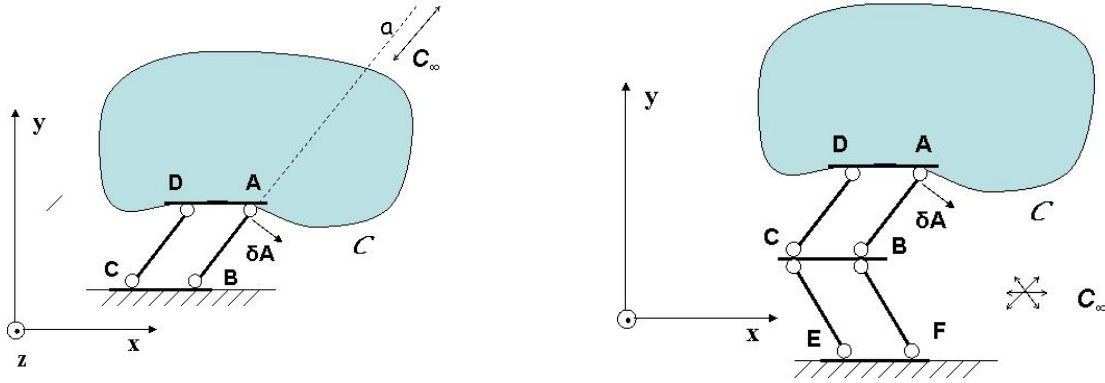


Figure 1.15:

9. **Doppio doppio pendolo.** (vincolo bilaterale; lo rappresentiamo come in Fig. 1.15 destra). $s = 4$ nello spazio, $s = 1$ se C è già vincolato a muoversi di moto piano. Applicando i risultati precedenti ai due doppi pendoli troviamo che esso impone $AD \parallel FE$, $\Rightarrow \delta\psi = \underline{0}$, mentre $\delta A \parallel \pi$: $\Rightarrow n = 2$. In altri termini il solido può muoversi solo di moto (piano) traslatorio in una qualsiasi direzione $\parallel \pi$ (almeno finché A, F hanno raggiunto la distanza massima possibile, somma delle lunghezze dei pendoli AB e BF), e il centro istantaneo di rotazione è un punto improprio, una direzione $\parallel \pi$ (quale, dipende dal particolare atto di moto).

Supponiamo $\Sigma^{(a)} \subset \pi$ e le cerniere in A, B, D, C perfettamente lisce. Applichiamo la IECS alla base BC . Dette $\underline{R}_1, \underline{R}_2$ risp. le reazioni su BC dei doppi pendoli $ABCD$ e $BCEF$, risulta

$$\underline{0} = \underline{R}^{(e)} = \underline{R}_1 + \underline{R}_2,$$

ma $\underline{R}_1 \parallel (A - B)$, $\underline{R}_2 \parallel (B - F) \not\parallel (A - B)$, e quindi necessariamente deve essere $\underline{R}_1 = \underline{R}_2 = \underline{0}$, affinché sia soddisfatta l'equazione precedente. Osservando che per la IECS applicata a $ABCD$, $\underline{R}^{(v)} = -\underline{R}_1 = \underline{0}$, troviamo infine

$$\Sigma^{(v)} \sim \{\text{coppia di momento } \underline{M}_A^{(v)} \perp \pi\}.$$

Per tutti i vincoli lisce sopra considerati è immediato verificare la caratterizzazione (1.60), applicando la formula (1.38),

$$\delta L^{(v)} = \underline{R}^{(v)} \cdot \delta O + \underline{M}_O^{(v)} \cdot \delta \underline{\psi}. \quad (1.38)$$

Viceversa, possiamo utilizzare la (1.38) assieme alla concisissima (1.60) come regola mnemonica per determinare la più generale $\Sigma^{(v)}$ esplicabile da un vincolo liscio.

Riassumiamo il **numero s di gradi di libertà sottratti dai vincoli** sopra illustrati:

$s =$	nello spazio	nel piano
Incastro	6	3
Cerniera sferica	3	2
Cerniera cilindrica	5	2
Pendolo	4	1
Bipendolo	3	0
Carrello		0
Due carrelli in opposizione	4	1
Doppio pendolo	5	2
Doppio doppio pendolo	4	1

2 Statica

La Statica è quella parte della meccanica che si occupa di studiare l'equilibrio dei sistemi materiali (cioè dei sistemi di corpi) in relazione alle forze (attive e vincolari) a cui sono soggetti. Qui ci limiteremo a considerare sistemi materiali \mathcal{S} costituiti da punti materiali isolati e/o corpi rigidi.

Una configurazione \mathcal{S}_0 di \mathcal{S} rispetto ad un sistema di riferimento \mathcal{T} si dice *di equilibrio* se rispetto a \mathcal{T} tutti i costituenti di \mathcal{S} rimangono indefinitamente in quiete in \mathcal{S}_0 , qualora \mathcal{S} sia posto nella configurazione \mathcal{S}_0 con atto di moto nullo all'istante iniziale t_0 , o equivalentemente se $\mathcal{S}(t) \equiv \mathcal{S}_0$ è soluzione delle equazioni del moto, ed è l'unica soddisfacente $\mathcal{S}(0) = \mathcal{S}_0$, $\dot{\mathcal{S}}(0) = 0$.

2.1 Scopi della statica dei punti e solidi vincolati

Essi sono:

1. La ricerca dell'equilibrio, cioè: 1.1) la ricerca di configurazioni di equilibrio per date forze attive; oppure 1.2) la ricerca di forze attive che rendano una data configurazione di equilibrio.
2. Il calcolo delle reazioni vincolari all'equilibrio.

Li illustriamo innanzitutto nel caso di un punto materiale \mathcal{P} soggetto ad una forza costante verticale \underline{F} posto al di sopra della superficie liscia in Fig. 2.1 e vincolato a non oltrepassarla:

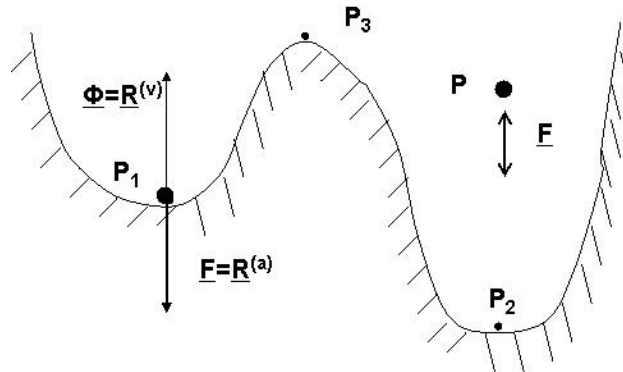


Figure 2.1:

Per quanto riguarda lo scopo 1., è chiaro che posizioni di equilibrio esisteranno solo se \underline{F} è diretto verso il basso (come nel caso che $\underline{F} = m\underline{g}$ sia la forza peso), e che, per quanto detto al paragrafo precedente, le posizioni di equilibrio sono solo P_1, P_2, P_3 (solo P_1, P_2 di equilibrio stabile). Per quanto riguarda lo scopo 2., la reazione vincolare in P_1, P_2, P_3 sarà $\underline{\phi} = -\underline{F}$ per la II legge della dinamica.

Nel caso che \mathcal{P} sia incastrato ad un vincolo in posizione P_0 , l'obiettivo 1. è banale (P_0 è evidentemente di equilibrio), mentre per quanto riguarda lo scopo 2. dalla II legge della dinamica seguirà ancora $\underline{\phi} = -\underline{F}$.

2.2 Le Equazioni Cardinali della Statica (ECS)

Consideriamo un sistema \mathcal{S} di punti materiali e corpi rigidi, sottoposto a forze esterne (cioè esercitate da corpi esterni a \mathcal{S}) ed interne (cioè esercitate tra i vari corpi di \mathcal{S}). Alcune di queste potranno essere vincolari.

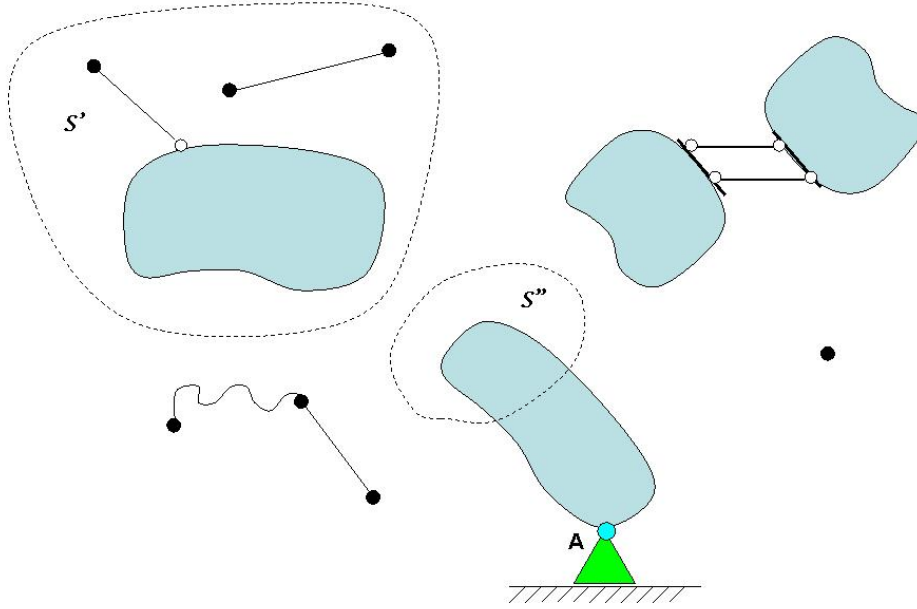


Figure 2.2:

Nell'ipotesi che \mathcal{S} sia posto fermo in una configurazione \mathcal{S}_0 di equilibrio, applicando le ECD (1.15) a un suo qualunque sottosistema $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ e osservando che $\underline{a}_j = 0$ per ogni j , troviamo la

Proposizione 3 *Condizione necessaria affinché una certa configurazione \mathcal{S}_0 rispetto a \mathcal{T} sia di equilibrio per \mathcal{S} è che sia equivalente a zero il sistema $\Sigma^{(e)}$ delle forze esterne (valutate in corrispondenza di questa configurazione e di atto di moto nullo) applicate ad ogni sua parte $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ (in particolare a \mathcal{S} stesso), cioè che, detti $\underline{R}^{(e)}, \underline{M}_O^{(e)}$ la risultante e il momento risultante di $\Sigma^{(e)}$ rispetto ad un qualunque polo O , valgano le due **Equazioni Cardinali della Statica***

$$\forall \mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S} \quad \begin{array}{ll} \underline{R}^{(e)} = \underline{R}^{(a)} + \underline{R}^{(v)} = \underline{0} & \text{I ECS}_{\mathcal{S}'} \\ \underline{M}_O^{(e)} = \underline{M}_O^{(a)} + \underline{M}_O^{(v)} = \underline{0} & \text{II ECS}_{\mathcal{S}'} \end{array} \quad (2.1)$$

Qui abbiamo anche scomposto il sistema $\Sigma^{(e)}$ nei due sottosistemi $\Sigma^{(a)}, \Sigma^{(v)}$ delle forze esterne agenti su $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ rispettivamente attive e vincolari, ed indicato con $\underline{R}^{(a)}, \underline{M}_O^{(a)}, \underline{R}^{(v)}, \underline{M}_O^{(v)}$ le loro risultanti e i loro momenti risultanti rispetto ad O .

Sottolineiamo che tra le forze esterne agenti su \mathcal{S}' ci sono anche quelle esercitate da $\mathcal{S} - \mathcal{S}'$, e inoltre quelle fittizie (forza di trascinamento, forza centrifuga, forza di Coriolis) se \mathcal{T} è non inerziale.

È chiaro che l'insieme delle (2.1) ottenuto al variare di tutti gli $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ è anche sufficiente a garantire l'equilibrio di \mathcal{S} , ammettendo che le leggi delle forze agenti su tutte le particelle costituenti siano sufficientemente regolari da garantire l'unicità della soluzione del problema di Cauchy associato a (1.12). Infatti, tra i vari sottosistemi \mathcal{S}' ci sono i sottosistemi $\mathcal{S}_j = \{\mathcal{P}_j\}$ per cui le ECD si riducono alle equazioni della dinamica. In realtà, poichè per ipotesi \mathcal{S} è costituito solo da un numero finito di corpi rigidi e punti materiali isolati, *per garantire l'equilibrio di \mathcal{S} basta un numero molto minore di equazioni, pari al numero totale di coordinate normali di \mathcal{S} .*

Proposizione 4 *Un sottosistema di equazioni sufficienti a garantire l'equilibrio di tutto \mathcal{S} è per esempio costituito dalle (2.1)₁ per tutti i punti materiali isolati di \mathcal{S} e da entrambe le (2.1) per tutti i solidi di \mathcal{S} . Altri sottosistemi si possono ottenere da questo applicando (una o piú volte) l'equivalenza (1.23).*

Che le due ECS per $\mathcal{S}' = \mathcal{C}$ siano sufficienti a garantire l'equilibrio di un solido \mathcal{C} è conseguenza dell'unicità della soluzione delle ECD per \mathcal{C} , che mostreremo piú avanti, nelle già menzionate ipotesi di regolarità delle leggi delle forze agenti su esso.

D'altro canto, le applicazioni delle ECS a *parti* di un solido (come \mathcal{S}'' nella Fig. 2.2) ci daranno informazioni sulle forze (interne) tra le parti del solido, come vedremo per esempio a proposito del cosiddetto metodo di Ritter.

2.3 Il principio dei lavori virtuali

Una condizione alternativa per l'equilibrio di un sistema di solidi e/o punti materiali isolati soggetti a vincoli fissi è il cosiddetto principio dei lavori virtuali. Supponiamo che \mathcal{S} sia costituito da M solidi, che denoteremo \mathcal{C}_i con $i = 1, 2, \dots, M$, e N punti materiali isolati, che denoteremo \mathcal{P}_i con $i = M+1, \dots, M+N$. Come già detto, soddisfare il sistema delle $2M$ (2.1) per $\mathcal{S}' = \mathcal{C}_i$ e delle N (2.1)₁

$$\begin{aligned} \underline{R}_i^{(e)} = \underline{R}_i^{(a)} + \underline{R}_i^{(v)} = \underline{0} & \quad \text{I ECS}_i \quad i = 1, 2, \dots, M+N \\ \underline{M}_{P_i}^{(e)} = \underline{M}_{P_i}^{(a)} + \underline{M}_{P_i}^{(v)} = \underline{0} & \quad \text{II ECS}_i. \quad i = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (2.2)$$

è condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di \mathcal{S} in una certa configurazione \mathcal{S}_0 ; qui P_i denota, per $i = 1, 2, \dots, M$, un punto dello spazio solidale a \mathcal{C}_i , la posizione di \mathcal{P}_i per $i = M+1, \dots, M+N$. Moltiplicando scalarmente la prima per δP_i e la seconda per $\delta \underline{\psi}_i$ e sommando su i troviamo

$$\delta L^{(a)} + \delta L^{(v)} = \delta L^{(e)} = \sum_{i=1}^{M+N} \underline{R}_i^{(e)} \cdot \delta P_i + \sum_{i=1}^N \underline{M}_{P_i}^{(e)} \cdot \delta \underline{\psi}_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta L^{(a)} = -\delta L^{(v)} \quad \forall \delta \mathcal{S} \text{ da } \mathcal{S}_0;$$

da cui, ricordando la (1.60), abbiamo dimostrato la necessità nel

Principio dei lavori virtuali (PLV)

Sia \mathcal{S} un sistema di solidi e/o punti materiali isolati soggetto a vincoli fissi e ideali (in particolare, lisci) ed a date forze attive. Condizione necessaria e sufficiente affinché una certa configurazione \mathcal{S}_0 di sia di equilibrio è che

$$\delta L^{(a)} \leq 0 \quad \forall \delta \mathcal{S}, \quad (2.3)$$

con $\delta\mathcal{S} \equiv$ spostamento virtuale a partire da \mathcal{S}_0 ; $\delta L^{(a)}$ denota il corrispondente lavoro virtuale compiuto dalle forze attive (per atto di moto nullo).

Dimostrazione della sufficienza: Come candidato a sistema $\Sigma^{(v)}$ delle reazioni vincolari consideriamo un sistema di vettori applicati del tipo

$$\Sigma^\phi = \left\{ (P_1, \underline{\phi}_1), \dots, (P_{M+N}, \underline{\phi}_{M+N}), \text{ coppia di mom. } \underline{M}_1^\phi \text{ su } \mathcal{C}_1, \dots, \text{ coppia di mom. } \underline{M}_M^\phi \text{ su } \mathcal{C}_M \right\}$$

(con dimensione di forze) definiti dalle condizioni $\underline{\phi}_i \stackrel{def}{=} -\underline{R}_i^{(a)}$, $\underline{M}_i^\phi \stackrel{def}{=} -\underline{M}_{P_i}^{(a)}$. Con un rapido calcolo simile a prima si trova che il lavoro compiuto da Σ^ϕ in corrispondenza di $\delta\mathcal{S}$ è $\delta L^\phi = -\delta L^{(a)}$, che per la (2.3) è ≥ 0 per ogni $\delta\mathcal{S}$ a partire da \mathcal{S}_0 ; allora in virtù della definizione di vincoli ideali (1.60) Σ^ϕ è un sistema di reazioni esplicabili dai vincoli, $\Sigma^{(v)}\tilde{\Sigma}^\phi$, cioè $\underline{R}_i^{(v)} = \underline{\phi}_i = -\underline{R}_i^{(a)}$, $\underline{M}_{P_i}^{(v)} = \underline{M}_i^\phi = -\underline{M}_{P_i}^{(a)}$, da cui seguono le ECS (2.2) e quindi l'equilibrio di \mathcal{S} .

Dalla (2.3) segue immediatamente il seguente **Corollario**

$$\delta L^{(a)} = 0 \quad \text{se } \delta\mathcal{S} \text{ è reversibile} \quad (2.4)$$

$$\delta L^{(a)} < 0 \quad \text{solo se } \delta\mathcal{S} \text{ è irreversibile} \quad (2.5)$$

Ricordando che, se i vincoli sono bilaterali, tutti gli spostamenti sono reversibili, troviamo che in questo caso $\delta L^{(a)} = 0 \forall \delta\mathcal{S}$.

Il PLV dice in modo generale un fatto molto intuitivo: se in una configurazione \mathcal{S}_0 i vincoli consentono al sistema di muoversi solo in una direzione che non asseconda quella in cui lo spingerebbero a muoversi le forze attive, allora \mathcal{S}_0 è di equilibrio. Nell'esempio della sezione 2.1, le posizioni P_1, P_2, P_3 sono di equilibrio perché la superficie vincolare consente a \mathcal{P} di muoversi solo in una direzione che forma un angolo retto o ottuso con direzione e verso della forza peso.

La particolare importanza del PLV deriva dal fatto che: 1) dá delle condizioni di equilibrio *pure*, cioè in esse non compaiono le incognite reazioni vincolari; 2) le potrà formulare di volta in volta nelle coordinate (lagrangiane) piú opportune.

Nel caso di vincoli scabri la (2.3) è comunque importante, perché fornisce una condizione *sufficiente*, anche se non necessaria, affinché \mathcal{S}_0 sia di equilibrio. Infatti, una reazione esplicabile da vincoli lisci (per es. \perp a vincolo=superficie) è esplicabile anche da vincoli scabri. Adottare anche per vincoli scabri una tale configurazione quale configurazione di equilibrio gioca a favore della sua stabilità; nella scienza delle costruzioni ciò si traduce in una maggior sicurezza. In presenza di vincoli scabri esistono poi in generale anche altre configurazioni di equilibrio di interesse. Nell'esempio della sezione 2.1, le posizioni di equilibrio formano *interi intorni* di P_1, P_2, P_3 ; nel caso di una scala carica, appoggiata ad una parete e un pavimento scabro (v. Fig.2.3), non esisterebbero posizioni di equilibrio non verticale né orizzontale se essi fossero lisci.

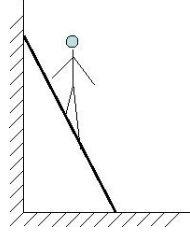


Figure 2.3:

2.4 Prime applicazioni di ECS e PLV a sistemi articolati piani

Si dice *trave* un solido con due dimensioni trascurabili rispetto alla terza, e quindi schematizzabile con una curva, in particolare *asta* un solido schematizzabile con un segmento.

2.4.1 Trave incastrata

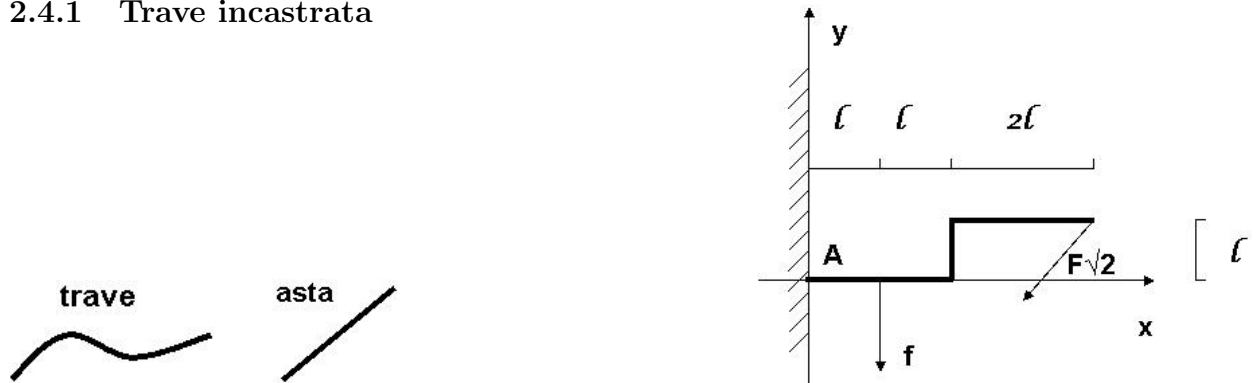


Figure 2.4:

Il numero di gradi di libertà è $n = 0$. Quindi la posizione indicata in Fig. 2.4 è sicuramente di equilibrio qualsiasi siano le forze attive applicate. Come visto, $\Sigma^{(v)} \sim \{(A, \underline{R}_A) + \text{coppia di momento } \underline{M}_A\}$. La $II ECS^z$ e le $IECS^x, IECS^y$ implicano $R_A^z = 0 = M_A^x = M_A^y$. Problema: calcolare R_A^x, R_A^y, M_A^z . Le ECS applicate alla trave danno:

$$\text{I su x: } R_A^x - F\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A^x = F$$

$$\text{I su y: } R_A^y - F - f = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A^y = F + f$$

$$\text{II su z, polo A: } M_A^z - fl + F\sqrt{2}\frac{\sqrt{2}}{2}l - F4l = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A^z = (f + 3F)l$$

2.4.2 Trave appoggiata

$n = 1$, $\Sigma^{(v)} \sim \{(A, \underline{R}_A), (B, R_B^y j)\}$. Le ECS applicate alla trave danno:

$$\text{I su x: } R_A^x + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A^x = -F\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{II su z, polo A: } -F\frac{\sqrt{2}}{2}l + 2fl + R_B^y 3l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B^y = \frac{1}{3}(F\frac{\sqrt{2}}{2} - 2f)$$

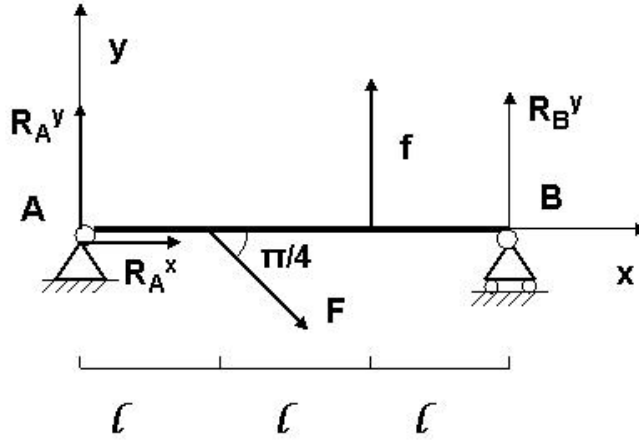


Figure 2.5:

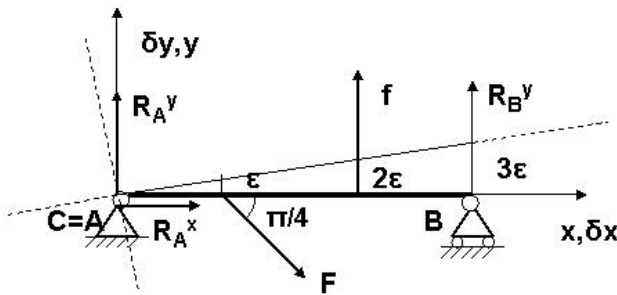
$$\text{I su } y: \quad R_A^y + R_B^y - F \frac{\sqrt{2}}{2} + f = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A^y = \frac{1}{3}(F\sqrt{2} - f)$$

La condizione che il vincolo in B è unilaterale, $R_B^y \geq 0$, si traduce quindi nella condizione di equilibrio

$$F \geq 2\sqrt{2}f, \quad (2.6)$$

che dice che F deve essere sufficientemente grande in rapporto a f , come è intuitivo aspettarsi. Se essa è soddisfatta, la trave è in equilibrio e le reazioni vincolari sono quelle trovate, altrimenti la trave non è in equilibrio. Se fosse $f < 0$, cioè il verso fisico della forza fosse anch'esso verso il basso, la condizione di equilibrio sarebbe sempre soddisfatta. Questa trave è *isostatica*, cioè le reazioni vincolari all'equilibrio sono univocamente determinate.

Possiamo ritrovare la condizione (2.6) anche con il PLV:



$$\begin{aligned} \delta L^{(a)} &= -F \frac{\sqrt{2}}{2} \varepsilon + f 2\varepsilon \leq 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \\ &\Downarrow \\ &-F \frac{\sqrt{2}}{2} + 2f \leq 0 \end{aligned}$$

Figure 2.6:

Se al posto del carrello c'è un pendolo verticale, o due carrelli in opposizione (v. Fig. 2.7), allora $n=0$ e la trave è in equilibrio per qualsiasi forze attive (la condizione $R_B^y \geq 0$ o equivalentemente (2.6) scompare), e le reazioni vincolari sono date dalle stesse formule.

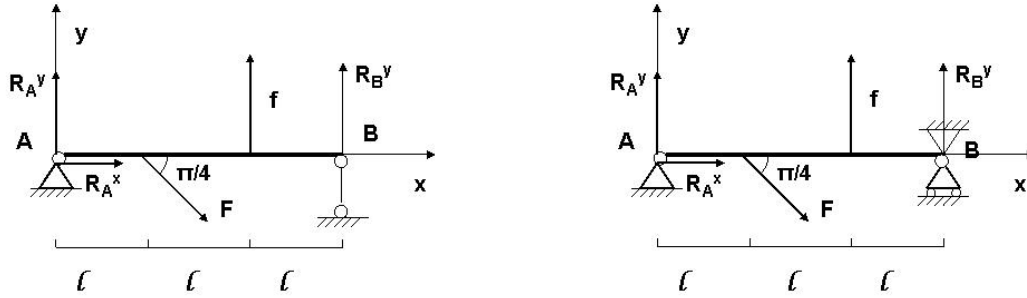


Figure 2.7:

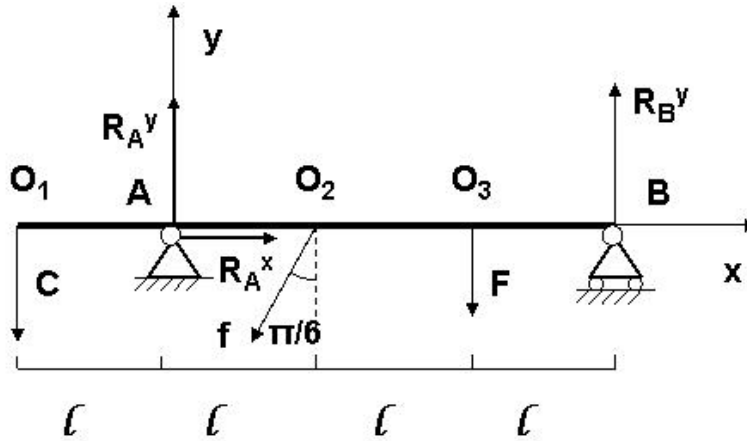


Figure 2.8:

2.4.3 Trave appoggiata a sbalzo. Esempio di calcolo delle reazioni vincolari (esterne) con il PLV

Come prima, $n = 1$, $\Sigma^{(v)} \sim \{(A, \underline{R}_A), (B, R_B^y \underline{j})\}$. Anche questa trave è isostatica. Le ECS applicate alla trave danno:

$$\text{I su } x: \quad R_A^x - \frac{f}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A^x = \frac{f}{2}$$

$$\text{II su } z, \text{ polo } A: \quad Cl - \frac{\sqrt{3}}{2}fl - F2l + R_B^y 3l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B^y = \frac{1}{3}(f\frac{\sqrt{3}}{2} + 2F - C)$$

$$\text{I su } y: \quad R_A^y + R_B^y - f\frac{\sqrt{3}}{2} - F - C = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A^y = \frac{1}{3}(F + f\sqrt{3} + 4C)$$

La condizione che il vincolo in B è unilaterale, $R_B^y \geq 0$, si traduce quindi nella condizione di equilibrio

$$C \leq f\frac{\sqrt{3}}{2} + 2F, \quad (2.7)$$

che dice che C non deve essere troppo grande in relazione a f, F . Se essa è soddisfatta, la trave è in equilibrio e le reazioni vincolari sono quelle trovate, altrimenti la trave non è in equilibrio. Come per la trave appoggiata, possiamo ritrovare la condizione (2.7) anche

con il PLV (v. Fig. 2.9 sinistra). Con il PLV possiamo ritrovare anche R_B^y stesso, con una piccola modifica che ora descriviamo (v. Fig. 2.9 destra). Se si leva il carrello in B

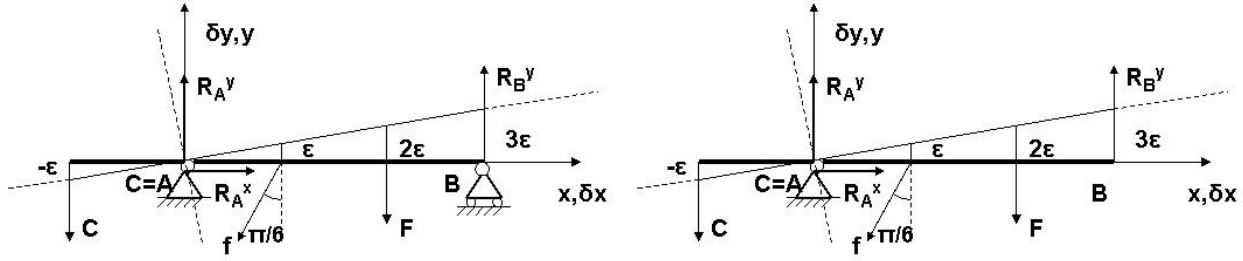


Figure 2.9:

e contemporaneamente vi si applica una forza attiva (B, R_B^y) le ECS rimangono ancora soddisfatte e la trave è ancora in equilibrio; così facendo la rotazione della trave attorno ad A diventa uno spostamento reversibile, per cui l'applicazione del PLV dá un'equazione che consente di determinare R_B^y :

$$\begin{aligned} \delta L^{(a)'} &= -f \frac{\sqrt{3}}{2} \varepsilon - F 2\varepsilon + C\varepsilon + R_B^y 3\varepsilon = 0 \quad \forall \varepsilon \\ &\Downarrow \\ R_B^y &= \frac{1}{3} \left(f \frac{\sqrt{3}}{2} + 2F - C \right) \end{aligned}$$

La condizione $R_B^y \geq 0$, che conduce a (2.7), viene ora imposta a mano. Enunciamo ora, piú in generale il

2.4.4 Calcolo delle reazioni vincolari con lo “svincolamento” ed il PLV

Per calcolare una componente Q_A della risultante \underline{R}_A o del momento risultante \underline{M}_A delle forze esercitate da un vincolo A si procede come segue. Si rimuove o riduce il vincolo in modo da consentire (solo) un nuovo spostamento virtuale reversibile indipendente δS , e contemporaneamente si aggiunge una forza (o una coppia) attiva pari proprio a Q_A ; in corrispondenza di δS essa compirá un lavoro virtuale non nullo. Applicando il PLV per spostamenti reversibili a questa nuova situazione si ricava un'equazione che consente di determinare Q_A .

Se prima di questa modifica $n = 0$, dopo questa modifica sará $n = 1$ e tutti gli ∞^1 spostamenti virtuali reversibili δS sono tra loro proporzionali. Se prima di questa modifica $n \geq 1$, dopo questa modifica sará $n \geq 2$ (per sistemi piani ciò comporta anche una certa libertá di scelta dei centri di rotazione), e si pone il problema di quale degli ∞^n spostamenti virtuali reversibili δS in cui Q_A compia lavoro convenga scegliere. Vanno tutti bene, ma tra questi, sono piú convenienti i δS in cui il $\delta L^{(a)'}$ complessivo ha meno termini. Per aiutarci a disegnare il corrispondente diagramma degli spostamenti a volte si suole introdurre degli altri vincoli, detti fittizi, che abbassino n al valore 1, in modo da consentire solo ∞^1 δS (tra loro proporzionali) per cui Q_A compia lavoro, cioè un unico spostamento virtuale indipendente.

2.4.5 Trave appoggiata ad un carrello e vincolata ad un doppio pendolo

$n = 1 = l$, $\Sigma^{(v)} \sim \{(A, R_A^y j), (B, R_B(i/2 + j\sqrt{3}/2)) + \text{coppia di momento } M_B^z\}$. Le ECS applicate alla trave danno:

$$\text{I su x: } \frac{1}{2}R_B + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = -F\sqrt{2}$$

$$\text{I su y: } R_A^y + R_B\frac{\sqrt{3}}{2} - F\frac{\sqrt{2}}{2} - f = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A^y = f + F\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1)$$

$$\text{II su z, polo B: } -R_A^y 3l + F\frac{\sqrt{2}}{2}2l + fl + M_B^z = 0 \quad \Rightarrow \quad M_B^z = l \left[2f + \frac{\sqrt{2}}{2}F(1 + 3\sqrt{3}) \right]$$

La condizione che il vincolo in A è unilaterale, che è la condizione di equilibrio, è automaticamente soddisfatta. Evidentemente anche questa trave è isostatica.

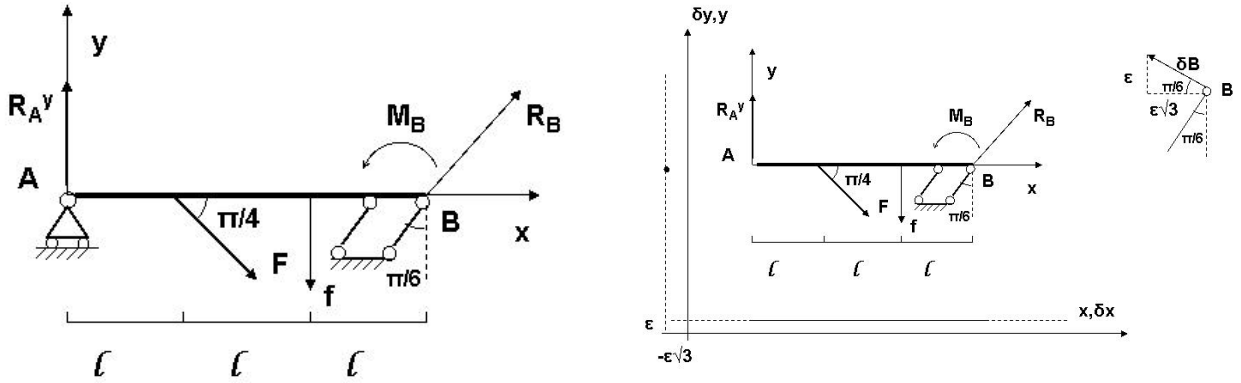


Figure 2.10:

Proviamo a ritrovare qualcuna delle reazioni vincolari, per es. R_A^y , con il PLV. Leviamo il carrello in A e contemporaneamente applichiamo una forza attiva $(A, R_A^y j)$ in modo da non alterare lo stato di equilibrio; la traslazione infinitesima della trave perpendicolarmente al doppio pendolo (fig. 2.10 destra) diventa reversibile, e il PLV dá

$$\begin{aligned} \delta L^{(a)'} &= -R_A^y \epsilon + F\frac{\sqrt{2}}{2}\epsilon + f\epsilon + F\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{3}\epsilon = 0 \quad \forall \epsilon \\ &\Downarrow \\ R_A^y &= f + F\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3} + 1) \end{aligned}$$

2.4.6 Trave iperstatica

Evidentemente $n = 0$, quindi la posizione indicata in figura 2.11 sinistra è sicuramente di equilibrio qualsiasi siano le forze attive applicate. $\Sigma^{(v)} \sim \{(A, \underline{R}_A), (B, \underline{R}_B)\}$. Le ECS applicate alla trave danno:

$$\text{I su x: } R_A^x + R_B^x + F\frac{\sqrt{2}}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A^x + R_B^x = -F\frac{\sqrt{2}}{2}$$

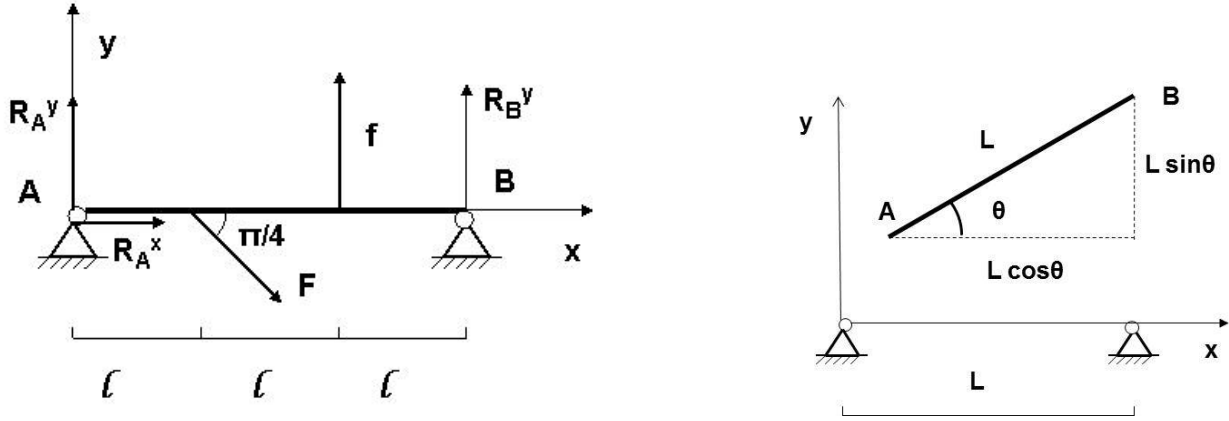


Figure 2.11:

$$\begin{aligned} \text{II su } z, \text{ polo A: } & -F \frac{\sqrt{2}}{2} l + 2fl + R_B^y 3l = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B^y = \frac{1}{3} \left(F \frac{\sqrt{2}}{2} - 2f \right) \\ \text{I su } y: & R_A^y + R_B^y - F \frac{\sqrt{2}}{2} + f = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A^y = \frac{1}{3} (F\sqrt{2} - f) \end{aligned}$$

Sono un sistema di 3 equazioni nelle 4 incognite $R_A^x, R_B^x, R_A^y, R_B^y$, che ammette ∞^1 soluzioni (piú precisamente, R_A^x, R_B^x non sono determinate singolarmente, ma lo è solo la loro somma): in altri termini questa trave è *iperstatica*, cioè le reazioni vincolari R_A^x, R_B^x all'equilibrio non sono univocamente determinate, e possono essere in modulo arbitrariamente grandi (ma di segno opposto). Ciò accade perché solo 3 delle 4 condizioni imposte dai vincoli sono indipendenti⁸. Quindi avere piú vincoli del necessario non è un vantaggio, perché essi per così dire entrano in conflitto di competenza e possono agire l'uno contro l'altro. Questa è una situazione che in sede di progettazione si preferisce evitare, perché non permette di calcolare le reazioni vincolari e quindi di prevedere se i vincoli sono in grado di resistere alle sollecitazioni esterne (le forze attive) che desideriamo applicare.

Se anziché schematizzare l'asta e i vincoli come perfettamente rigidi ammettessimo piú realisticamente che essi sono deformabili (anche di poco), come in effetti realmente accade, e che è possibile realizzare un'asta di lunghezza L solo approssimativamente uguale alla distanza d_{AB} tra A, B (sia per limiti di precisione al momento della fabbricazione, sia dopo per le loro diverse dilatazioni a causa delle variazioni di temperatura) si potrebbe scrivere un sistema di equazioni che permetterebbe di determinare univocamente tutte le reazioni vincolari. Limitandoci per semplicità al caso senza forze attive ($F = f = 0$), in modo che $R_A^x = -R_B^x$, trascurando la deformazione del vincolo e trattando l'asta come un'unica molla di lunghezza a riposo $L = 3l$ e costante elastica k molto grande troviamo $R_B^x = k(d_{AB} - L) =$

⁸Non potrebbe essere altrimenti perché la matrice jacobiana non può avere rango maggiore del numero di coordinate normali, cioè 3. Come coordinate normali dell'asta adottiamo x_A, y_A, θ (v. Fig. 2.11 destra); le coordinate di B sono collegate ad esse dalle relazioni $x_B = x_A + L \cos \theta, y_B = y_A + L \sin \theta$, ove $L = 3l$ è la lunghezza dell'asta. In termini delle coordinate normali le 4 equazioni $x_A = y_A = y_B = 0, x_B = L$ imposte dalle cerniere A, B si scrivono

$$\varphi_1(\bar{X}) := x_A = 0, \quad \varphi_2(\bar{X}) := y_A = 0, \quad \varphi_3(\bar{X}) := x_A + L(\cos \theta - 1) = 0, \quad \varphi_4(\bar{X}) := y_A + L \sin \theta = 0. \quad (2.8)$$

L'unica soluzione delle prime tre è $(x_A, y_A, \theta) = (0, 0, 0)$, che risolve anche la quarta. Questo mostra esplicitamente la dipendenza dei 4 vincoli.

$k(x_B - L)$, con cui possiamo calcolare singolarmente R_A^x, R_B^x . Questo tuttavia ha il prezzo di dover conoscere k e la piccola deformazione $d_{AB} - L$ (che si può misurare solo con strumenti di precisione). Con forze attive non nulle ci vorrebbe poi una descrizione notevolmente più complicata del sistema in questione (l'asta in generale si fletterà). Perciò, per evitare queste complicazioni, in sede di progettazione si preferisce adottare sistemi isostatici.

2.4.7 Pendolo/appoggio inclinato. Esempio di vincolo mal disposto

Consideriamo la trave appoggiata in Fig. 2.12 sinistra:

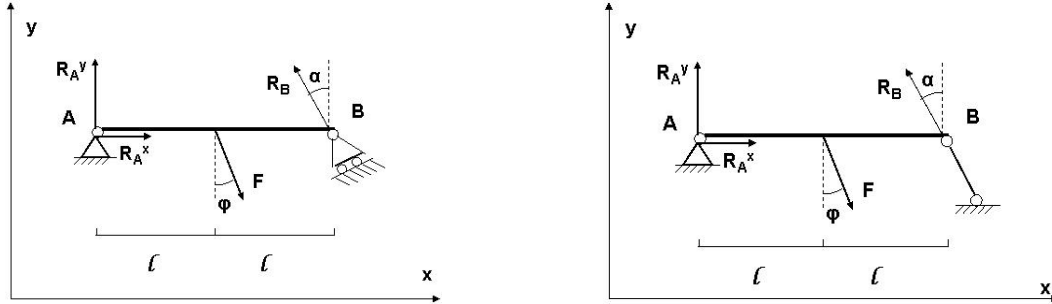


Figure 2.12:

Evidentemente, $n = l = 1$ ($\exists \delta \mathcal{S}$ irreversibile, la rotazione antioraria attorno ad A), $\Sigma^{(v)} \sim \{(A, \underline{R}_A), (B, R_B(-\underline{i} \sin \alpha + \underline{j} \cos \alpha))\}$. Le ECS applicate alla trave danno:

$$\begin{aligned} \text{II su } z, \text{ polo A:} \quad & -Fl \cos \varphi + R_B 2l \cos \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad R_B = F \frac{\cos \varphi}{2 \cos \alpha} \\ \text{I su } x: \quad & R_A^x + F \sin \varphi - R_B \sin \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A^x = F \left(-\sin \varphi + \frac{\cos \varphi \sin \alpha}{2 \cos \alpha} \right) \\ \text{I su } y: \quad & R_A^y + R_B \cos \alpha - F \cos \varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad R_A^y = \frac{F}{2} \cos \varphi. \end{aligned}$$

Queste soluzioni sono valide per $\alpha \neq \pi/2$. La condizione che impone la unilateraliá del vincolo in B, $R_B \geq 0$, è automaticamente soddisfatta. Per la trave vincolata tramite una cerniera ed un pendolo come in Fig. 2.12 destra (che possiamo vedere anche come un arco a tre cerniere, v. piú avanti) $n = l = 0$ ed il sistema è automaticamente in equilibrio; le equazioni ed i risultati per le reazioni vincolari sono le stesse, viene solo meno la richiesta $R_B \geq 0$.

Se $\varphi \neq \pi/2$, nel limite $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}^-$ R_B, R_A^y divergono, e per $\alpha = \pi/2$ le ECS non ammettono soluzioni: la trave non è in equilibrio; questa è la situazione rappresentata in Fig. 2.13. Se invece $\varphi = \pi/2$, il sistema ammette soluzioni anche per $\alpha = \pi/2$, in questo caso piú precisamente ∞^1 soluzioni, perché la IIECS risulta identicamente soddisfatta $\forall R_B$:

$$R_A^y = 0 \quad R_A^x - R_B = -F;$$

questa è la situazione rappresentata in Fig. 2.14. Cioè la trave cosí vincolata e sollecitata è iperstatica, caso che in sede di progettazione anche si preferisce evitare. Concludendo, la disposizione del pendolo o del carrello in B con $\alpha = \pi/2$ è un esempio di *vincolo mal disposto*.

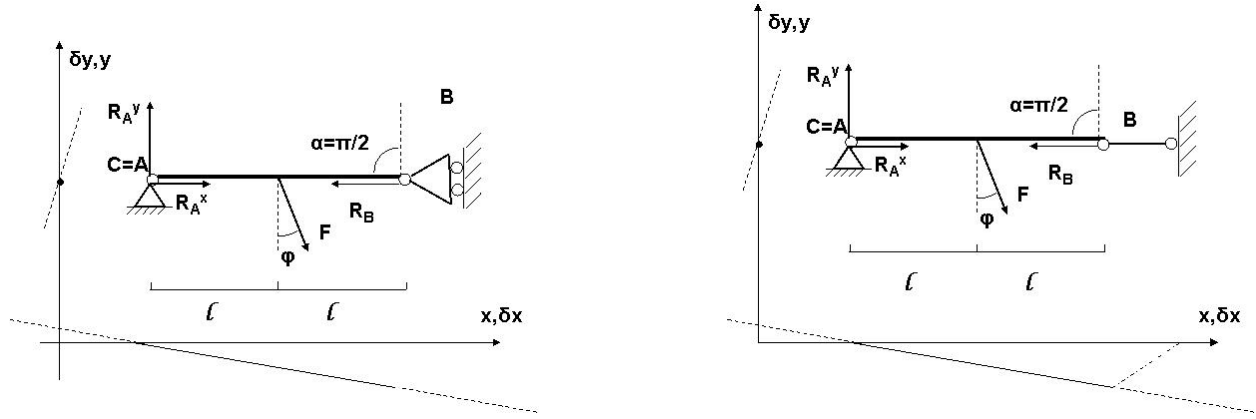


Figure 2.13:

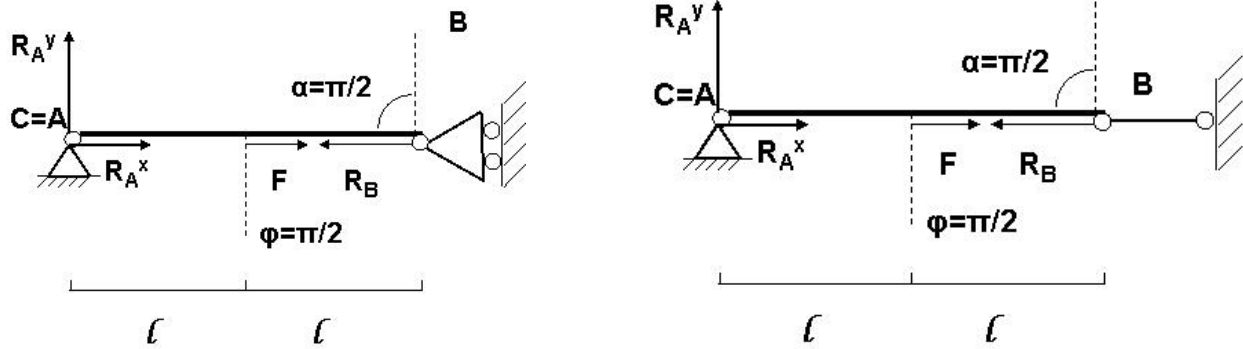


Figure 2.14:

Possiamo capire se i vincoli che adottiamo sono bene o mal disposti calcolando il rango della matrice jacobiana nelle configurazioni adottate, per valutare se il grado di labilit  l   maggiore di 1. Di nuovo, le coordinate di B si esprimono in termini delle coordinate normali dell'asta $\bar{X} := (x_A, y_A, \theta)$ (v. Fig. 2.15 sinistra) con le relazioni $x_B = x_A + L \cos \theta$, $y_B = y_A + L \sin \theta$, ove $L = 2l$. Nel caso del pendolo il vincolo su B   ora $\|B - D\|^2 = d^2$, ove d   la lunghezza del pendolo. In termini delle coordinate normali i vincoli in A, B si scrivono quindi

$$\varphi_1(\bar{X}) := x_A = 0, \quad \varphi_2(\bar{X}) := y_A = 0, \quad \varphi_3(\bar{X}) := (x_A + L \cos \theta - x_D)^2 + (y_A + L \sin \theta)^2 - d^2 = 0. \quad (2.9)$$

La soluzione   univocamente determinata, $(x_A, y_A, \theta) = (0, 0, \theta)$ ove $\theta := \pm \cos^{-1} \frac{L^2 + x_D^2 - d^2}{2Lx_D}$, quindi $n = 0$. $\theta = 0$ equivale a $x_D = L + d$. La matrice jacobiana ed il suo determinante sono

$$J = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_A} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial y_A} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_A} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial y_A} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \varphi_3}{\partial x_A} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial y_A} & \frac{\partial \varphi_3}{\partial \theta} \end{pmatrix}_{(0,0,\theta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2(x_A + L \cos \theta - x_D) & 2(y_A + L \sin \theta) & -2Lx_D \sin \theta \end{pmatrix},$$

che implica $\det J = -2x_D L \sin \theta$. Come anticipato, il rango   3, da cui $l = m - r = 0$ (vincoli ben disposti), se e solo se $\theta \neq 0$, cio  $x_D < L + d$. Per $\theta = 0$ (cio  $x_D = L + d$) esiste un δS ,

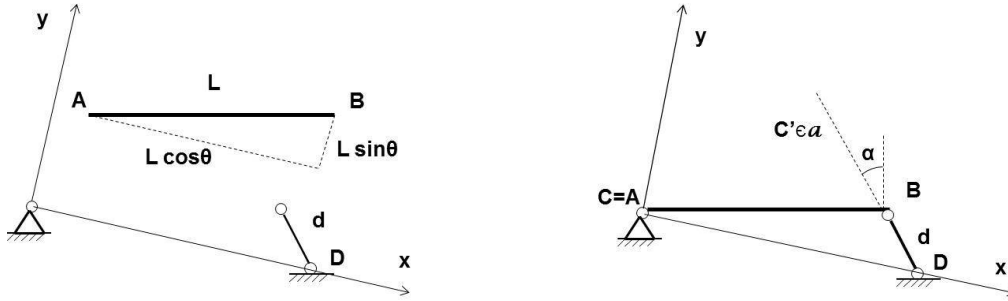


Figure 2.15:

la piccola rotazione attorno ad A di fig. 2.13, quindi $l = 1$, anche se $n = 0$: infatti per $\theta = 0$ l'equazione $J\delta\bar{X} = \bar{0}$ ammette la soluzione non banale $\delta\bar{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \delta\theta \end{pmatrix}$, una rotazione infinitesima attorno ad A .

Nel caso del carrello $n=l=1$ comunque.

La relazione tra l'esistenza di spostamenti virtuali e l'assenza di soluzioni, o la loro non unicit , constatata nell'esempio precedente   conseguenza di un fatto molto generale valido per vincoli lisci: la matrice $s \times m$ jacobiana dei vincoli J e la sua trasposta J^T compaiono rispettivamente nell'equazione (vettoriale con s componenti) che determina il vettore colonna $\delta\bar{X}$ degli spostamenti virtuali e in quella (vettoriale con m componenti) che determina il vettore colonna $\bar{\rho}$ delle reazioni vincolari incognite $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_s$ (componenti delle risultanti e dei momenti risultanti delle reazioni esercitate da tutti i vincoli) come combinazione lineare delle componenti delle forze attive f_1, \dots, f_m :

$$J \begin{pmatrix} \delta X_1 \\ \vdots \\ \delta X_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad J^T \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_s \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

Detto \bar{f} il vettore colonna delle f_1, \dots, f_m , il secondo sistema ammette soluzioni se il rango r_c della matrice completa $(J^T|\bar{f})$   pari al rango r di J^T (e di J); nel caso, esistono ∞^i soluzioni $\bar{\rho}$, ove $i = s - r$   il gi  introdotto grado di iperstaticit  (infatti, da r equazioni indipendenti posso ricavare r delle incognite ρ_a come combinazioni lineari delle i restanti). La soluzione esiste *per ogni* \bar{f} se il grado di labilit  $l = m - r$   zero; infatti, allora J^T   una matrice $m \times s$ di rango massimo $r = m \leq s$, mentre $(J^T|\bar{f})$   una matrice $m \times (s+1)$ e pertanto dello stesso rango. In particolare la soluzione esiste ed   unica *per ogni* \bar{f} se $r = m = s$, cio  $l = 0 = i$: la struttura si dice allora isostatica. Se invece   positivo il grado di labilit  $l = m - r$, allora esistono delle \bar{f} per cui $r_c > r$, in corrispondenza delle quali non esistono soluzioni $\bar{\rho}$ delle condizioni di equilibrio.

2.4.8 Analisi dei centri di rotazione e buona disposizione dei vincoli

Per sistemi gi  vincolati a muoversi di moto rigido piano, come quelli qui considerati, possiamo capire se gli ulteriori vincoli che adottiamo sono bene o mal disposti anche con l'analisi

dei centri di rotazione. Iniziamo dal sistema considerato nella sezione precedente. Un centro di rotazione per l'asta è sempre $C = A$, perché trattasi di punto fisso. Nel caso $\theta \neq 0$ (v. Fig. 2.15 destra), siccome $C = A$ non appartiene al prolungamento a del pendolo in B , per il teorema di Chasles ne deve esistere un altro $C' \in a$, e quindi l'asta non può compiere spostamenti virtuali ed è ben bloccata. Quando $\theta=0$, o equivalentemente $\alpha=\frac{\pi}{2}$, o $h=0$ (v. Fig. 2.14), allora $C = A \in a$ è l'unico centro, e quindi esiste uno spostamento virtuale, nella forma di una rotazione infinitesima dell'asta attorno a $C = A$ (questo viola i vincoli solo al secondo ordine nell'angolo di rotazione), cioè l'asta non è bloccata bene.

Altri esempi di vincoli maldisposti sono riportati in Fig. 2.16: siccome i prolungamenti dei 3 pendoli si incontrano in uno stesso punto C (proprio a sinistra, improprio a destra), C è l'unico centro e quindi l'asta può compiere uno spostamento virtuale (una rotazione infinitesima attorno a C nel caso a sinistra, un traslazione infinitesima perpendicolare ad essa nel caso a destra), cioè non è ben bloccata. Quindi $\delta L^{(a)} = M_C^{(a)z} \delta \psi^z$ nel primo caso, $\delta L^{(a)} = \underline{R}^{(a)} \cdot \delta P$ nel secondo, e $\delta L^{(a)} = 0$ se e solo se le forze attive soddisfano rispettivamente

$$M_C^{(a)z} = 0 \text{ (caso a sinistra),} \quad R^{(a)\perp} = 0 \text{ (caso a destra)}$$

altrimenti non c'è equilibrio. $R^{(a)\perp}$ è la componente $\perp C_\infty$ di $\underline{R}^{(a)}$. Queste condizioni discendono anche dalle ECS, quando si osservi che con questa disposizione dei vincoli si ha risp. $M_C^{(v)z} = 0$, $R^{(v)\perp} = 0$.

Se invece i prolungamenti dei 3 pendoli non si incontrano in uno stesso punto (proprio o improprio), come in Fig. 2.17, allora l'asta non può compiere spostamenti virtuali (è ben bloccata), ed automaticamente sono soddisfatti le ECS, o equivalentemente $\delta L^{(a)} = 0$: i vincoli sono ben disposti.

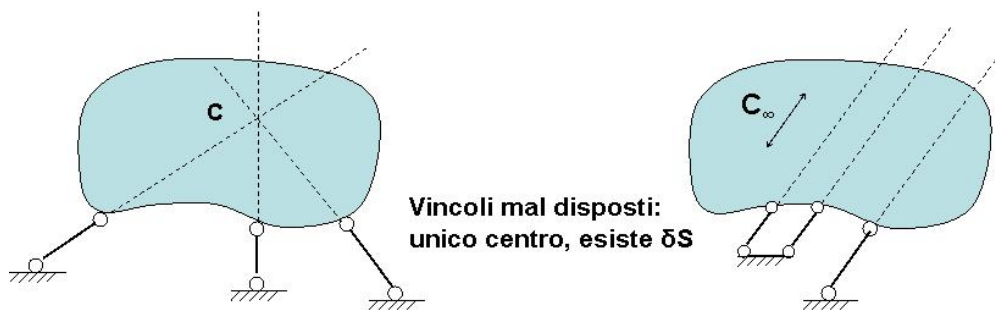


Figure 2.16:

2.4.9 Arco a tre cerniere

Un modo alternativo di riconoscere che se $\theta \neq 0$, o equivalentemente $h \neq 0$, i vincoli della struttura di Fig. 2.15 destra sono ben disposti, è vedere la struttura come costituita dalle due aste AD, BD (risp. solidi 1,2) e dalle tre cerniere A, B, D ; perciò essa viene detta *arco a tre cerniere*. La trattazione precedente è impossibile e questa schematizzazione diventa necessaria se le forze attive sono applicate anche su BD (in questo caso non è più vero che BD esercita su D una reazione parallela a BD). Effettuiamo prima il calcolo del grado di libertà: ciascuna delle 2 aste AD, DB nel piano ha 3 coordinate normali, ciascuno dei 3

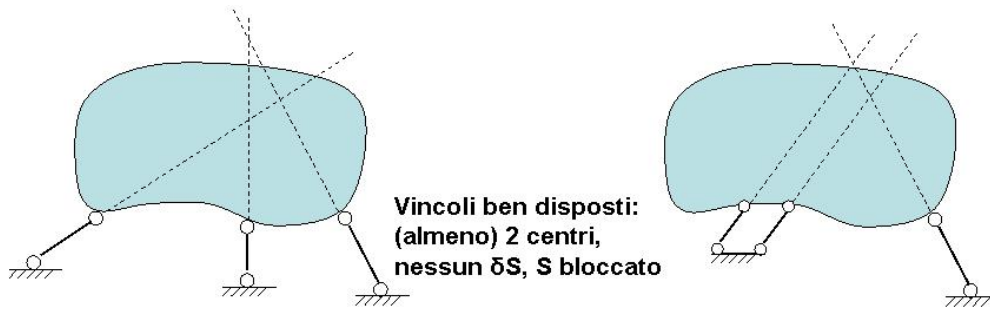


Figure 2.17:

nodì A, D, B nel piano leva 2 gradi di libertà, quindi troviamo $n = 2 \cdot 3 - 3 \cdot 2 = 0^9$. Per verificare che i vincoli siano ben disposti utilizziamo di nuovo l'analisi dei centri. In base a note proprietà $C_1 = A$, $C_2 = B$, $C_{12} = D$ (v. Fig. 2.18 sinistra). Siccome questi non sono allineati, il teorema dell'allineamento assicura che debba esistere un nuovo centro $C'_2 \in a$; per cui non esistono δS , cioè l'asta BD è bene bloccata, anche il suo punto D , che sarà un nuovo centro C'_1 , quindi anche AD è bene bloccata. Se invece $h = 0$ (v. Fig. 2.21 sinistra) allora $C_1 = A$, $C_2 = B$, $C_{12} = D$ sono già allineati e non esistono altri centri assoluti, e quindi esiste uno spostamento virtuale costituito da una rotazione infinitesima di AD attorno ad A e di una rotazione infinitesima di BD attorno ad B . Abbiamo ritrovato i risultati delle sezioni precedenti.

Determiniamo le reazioni vincolari nel caso specifico raffigurato in Fig. 2.18 destra. Sussiste evidentemente la relazione $h/l = \tan \alpha$. Inoltre la struttura e il sistema delle sollecitazioni attive sono simmetrici per riflessione rispetto all'asse \bar{y} . Questo implicherà che anche le reazioni vincolari hanno la stessa simmetria.

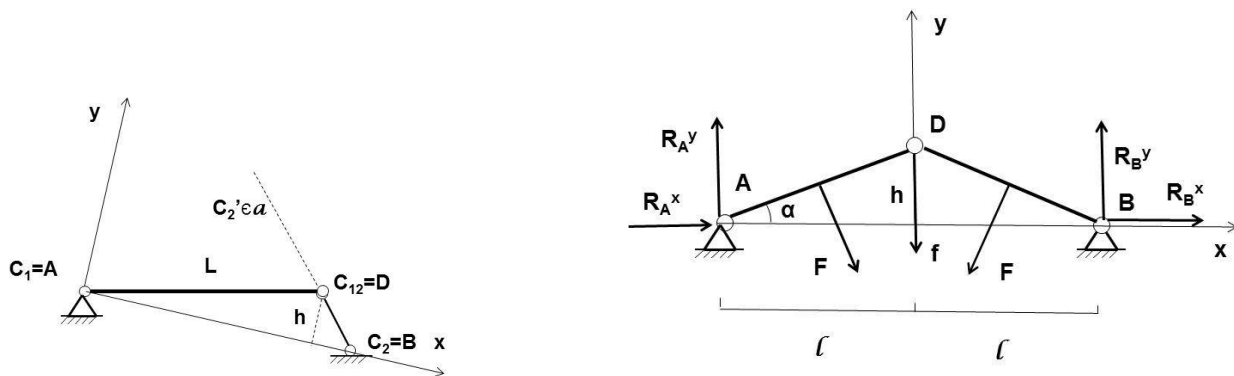


Figure 2.18:

Siano $\underline{\phi}, \underline{\psi}$ le reazioni che il nodo D esercita su AD e DB . I sistemi di forze agenti sui tre componenti AD, D, DB sono rappresentati in Fig. 2.19. L'applicazione delle ECS alle

⁹A $n = 0$ giungiamo ovviamente anche se pensiamo il sistema costituito dalle 2 aste AD, DB ed il nodo D (nel piano ha 2 coordinate normali). Infatti in questo caso aumentano di 2 le coordinate normali, ma anche le condizioni in D : non solo imponiamo che le coordinate x, y di due estremi delle aste sono uguali tra loro, ma anche che sono uguali alle coordinate del nodo D , e quindi $n = 2 \cdot 3 + 2 - 4 \cdot 2 = 0$.

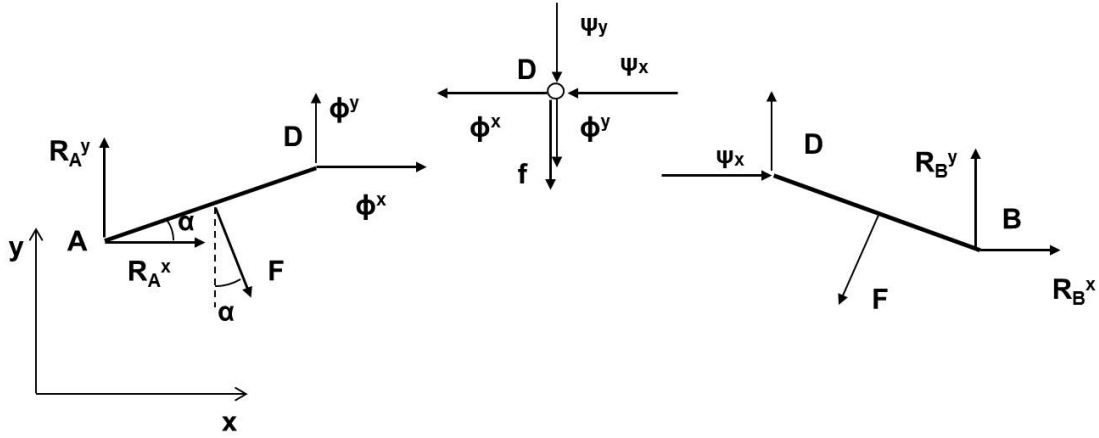


Figure 2.19:

travi AD, DB e al nodo D costituenti porta ad un sistema di 8 equazioni nelle incognite, $R_A^x, R_A^y, R_B^x, R_B^y, \phi^x, \phi^y, \psi^x, \psi^y$, accoppiate:

$$\begin{aligned}
 \text{IECS}_x \text{ per } AD: & \quad R_A^x + F \sin \alpha + \phi^x = 0 \\
 \text{IECS}_y \text{ per } AD: & \quad R_A^y - F \cos \alpha + \phi^y = 0 \\
 \text{IECS}_z \text{ per } AD, \text{ polo } D: & \quad R_A^x h - R_A^y l + \frac{Fl}{2 \cos \alpha} = 0 \\
 \text{IECS}_x \text{ per } DB: & \quad R_B^x - F \sin \alpha + \psi^x = 0 \\
 \text{IECS}_y \text{ per } DB: & \quad R_B^y - F \cos \alpha + \psi^y = 0 \\
 \text{IECS}_z \text{ per } DB, \text{ polo } D: & \quad R_B^x h + R_B^y l - \frac{Fl}{2 \cos \alpha} = 0 \\
 \text{IECS}_x \text{ per } D: & \quad -\phi^x - \psi^x = 0 \\
 \text{IECS}_y \text{ per } D: & \quad -\phi^y - \psi^y - f = 0
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Nell'applicare $-\phi, -\psi$ al nodo abbiamo utilizzato il principio di azione e reazione. Si noti che, se il carico f nel nodo D è nullo, la IECS per D implica sempre $\underline{\psi} = -\underline{\phi}$; considerando il nodo D come parte dell'asta DB possiamo eliminare $\underline{\psi}$ dalle equazioni, abbassando a 6 il numero delle equazioni (le ECS per le due aste) e delle incognite ($R_A^x, R_A^y, R_B^x, R_B^y, \phi^x, \phi^y$).

È piú semplice procedere direttamente al calcolo delle reazioni esterne con le seguenti equazioni già disaccoppiate dalle reazioni vincolari interne:

- R_A^y si ottiene immediatamente dalla sola II ECS per tutto il sistema $\mathcal{S} = ADB$ con polo B :

$$0 = -R_A^y 2l + fl + \frac{3}{2} Fl \cos \alpha + \frac{1}{2} Fl \cos \alpha \quad \Rightarrow \quad R_A^y = F \cos \alpha + \frac{f}{2}.$$

- Si trova $R_B^y = R_A^y = F \cos \alpha + f/2$ o ripetendo il calcolo precedente scambiando $A \leftrightarrow B$, o applicando la IECS_y per tutta la trave \mathcal{S} ,

$$R_A^y + R_B^y - f - 2F \cos \alpha = 0,$$

o in questo particolare caso ancora piú semplicemente partendo direttamente da quest'ultima equazione e dalla relazione $R_B^y = R_A^y$, conseguenza della summenzionata simmetria del sistema per riflessione rispetto all'asse \vec{y} .

- R_A^x ora si ottiene dalla (2.11):

$$R_A^x = \frac{1}{\sin \alpha} \left[F \left(\cos^2 \alpha - \frac{1}{2} \right) + \frac{f}{2} \cos \alpha \right]. \quad (2.12)$$

- Si trova $R_B^x = -R_A^x$ applicando la IECS $_x$ per tutta la trave \mathcal{S} ,

$$R_A^x + R_B^x + F \sin \alpha - F \sin \alpha = 0,$$

o in questo particolare caso ancora piú semplicemente invocando la summenzionata simmetria del sistema per riflessione rispetto all'asse \vec{y} .

Possiamo ricavare qualche reazione vincolare, per esempio R_A^y , anche con il PLV (v. Fig. 2.20):

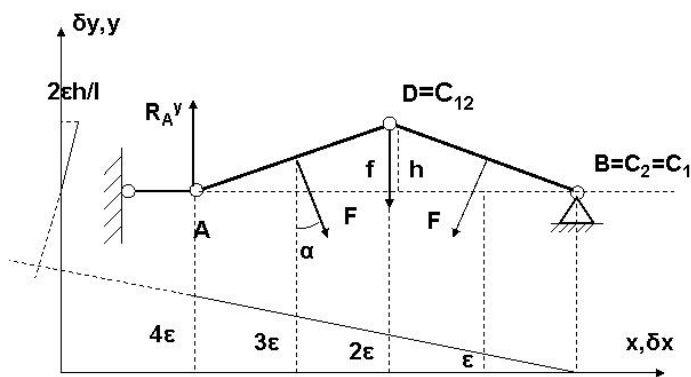


Figure 2.20:

$$\delta L^{(a)'} = R_A^y 4\varepsilon - f 2\varepsilon - F(1+3)\varepsilon \cos \alpha = 0 \quad \forall \varepsilon \quad \Rightarrow \quad R_A^y = F \cos \alpha + \frac{f}{2}.$$

2.4.10 Caso limite: le due aste sono allineate (vincoli mal disposti)

Per h sempre piú piccolo R_A^x, R_B^x in modulo diventano sempre piú grandi, e nel limite $h \rightarrow 0$ (o, equivalentemente, $\alpha \rightarrow 0$) divergono. Per $h = 0 = \alpha$ le ECS non ammettono soluzioni (o ne ammettono ∞^1 , se $2F + f = 0$): ritroviamo che la situazione ad aste allineate (Fig. 2.21 sinistra) è di vincolo mal disposto.

Cosa succede in realtà in questa situazione? In effetti né le aste, né i vincoli sono perfettamente rigidi; supponendo per semplicitá che i vincoli siano molto meno deformabili delle aste, cosicché si possa schematizzare con buona approssimazione che vari un poco la lunghezza L delle aste, ma non la distanza $2l$ tra A e B , e che il carico sia applicato solo al nodo D (cioè $F = 0$), in modo che le aste si allunghino ma non si flettano, si vede facilmente che

l'allungamento ΔL delle aste è un infinitesimo del secondo ordine in h (o equivalentemente in α):

$$\Delta L = \sqrt{l^2 + h^2} - l = l \left(\sqrt{1 + \frac{h^2}{l^2}} - 1 \right) = \frac{h^2}{2l} + O(h^4). \quad (2.13)$$

Quindi anche un ΔL minimo porterà un h apprezzabile, che allontanerà il sistema dalla spiacevole situazione di aste allineate (v. Fig. 2.21 destra); per es., $\Delta L/L = 1/200$ implica $h/l = 1/10$. Lo spostamento compiuto coincide, a meno di infinitesimi in h di ordine superiore, con uno spostamento virtuale consentito dall'arco ad aste allineate. Le reazioni

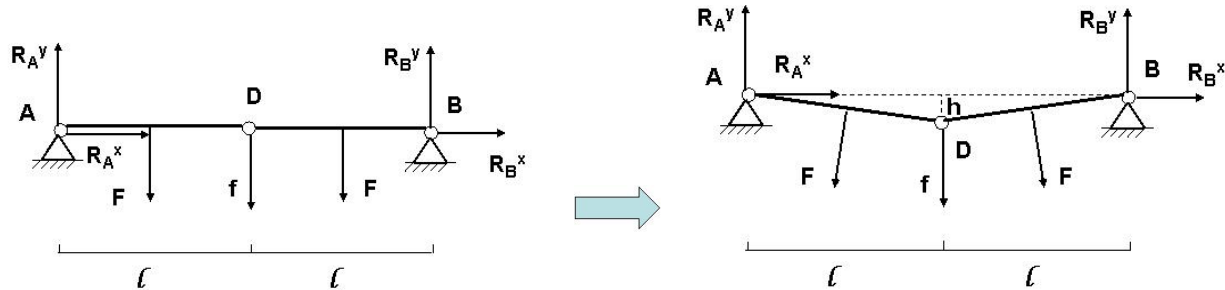


Figure 2.21:

vincolari saranno grandi, ma di nuovo finite e determinabili al prezzo di non considerare più le aste come perfettamente rigide, ma per esempio come delle molle con legge di forza del tipo $R_A = \kappa \Delta L/l$: sostituendovi la (2.13) ed la relazione $R_A = \frac{f}{2 \sin \alpha} = f \frac{l}{2h} + O(h)$, che segue facilmente dalle relazioni precedenti (o semplicemente dalla IECS applicata al nodo), si determinano completamente tutte le incognite: $h/l = \sqrt[3]{f/\kappa}$, $R_A = R_B = \sqrt[3]{f^2 \kappa}/2$, etc. Allora va verificato che R_A, R_B non superino i carichi di rottura (meglio, di sicurezza) dei vincoli A, B . Con F non nullo la descrizione si complica, perché bisogna includere nella descrizione la flessione delle aste. Per evitare queste complicazioni è bene progettare l'arco a tre cerniere in modo che $h \neq 0$.

2.4.11 Travi di tipo Gerber. Calcolo delle reazioni vincolari interne

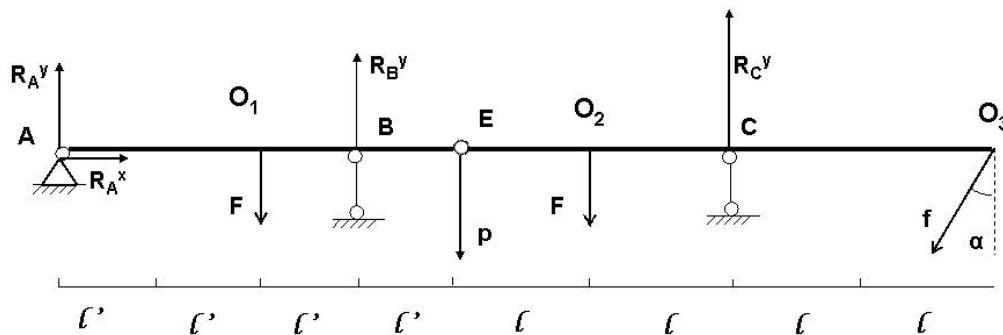


Figure 2.22:

Come visto nelle sezioni precedenti, un'asta vincolata in un punto con una cerniera ed in un altro con un pendolo perpendicolare (come in Fig. 2.7 o in Fig. 2.8) ha $n = 0$ ed è isostatica. Se ad un suo estremo E attacchiamo con una cerniera un estremo di un'altra asta, e inoltre vincoliamo un altro punto C di quest'ultima con un pendolo perpendicolare (v. Fig. 2.22), otterremo per lo stesso motivo di nuovo un sistema con $n = 0$ ed isostatico. Alla stessa conclusione giungeremo reiterando il procedimento (v. Fig. 2.23). Una struttura di questo tipo si chiama trave Gerber.

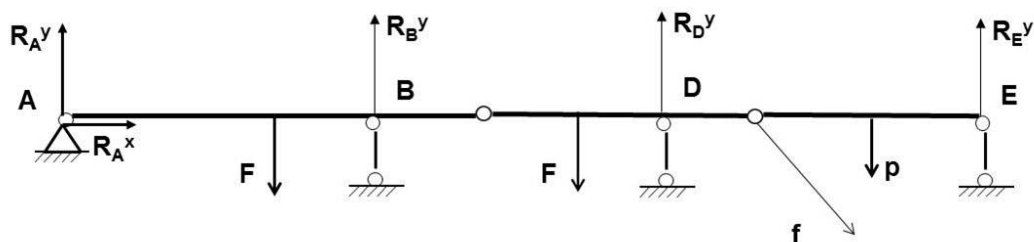


Figure 2.23:

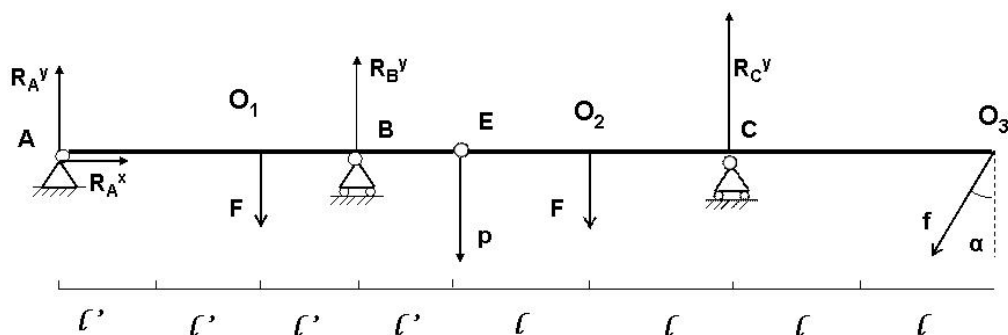


Figure 2.24:

Se sostituiamo uno o più pendoli con altrettanti carrelli (v. Fig. 2.24) il sistema avrà uno o più gradi di libertà, ma resterà in equilibrio se e solo se le reazioni dei pendoli sostituiti sono dirette verso l'alto, cioè sono esplicabili da carrelli; infatti per tale nuovo sistema le ECS, e quindi anche la loro soluzione, non cambia. Ad analoghe conclusioni giungeremo aggiungendo altre aste (v. Fig. 2.25).

Per il sistema 2.24 \mathcal{S}_0 è noto, ma l'equilibrio è possibile solo per f non troppo grande rispetto a F . Qual è esattamente la condizione di equilibrio sulle forze attive? Quali sono le reazioni vincolari all'equilibrio per i sistemi 2.22, 2.24 ?

Dapprima applichiamo le ECS a ciascuna asta ed al nodo. Siano ϕ, ψ le reazioni che E esercita su AE e EC . ECS per EO_3 (con polo C):

$$\begin{aligned}
 \psi^x - f \sin \alpha &= 0 & \Rightarrow & \psi^x = f \sin \alpha \\
 -\psi^y 2l + Fl - f \cos \alpha 2l &= 0 & \Rightarrow & \psi^y = \frac{F}{2} - f \cos \alpha \\
 \psi^y - F + R_C^y - f \cos \alpha &= 0 & \Rightarrow & R_C^y = \frac{F}{2} + 2f \cos \alpha
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

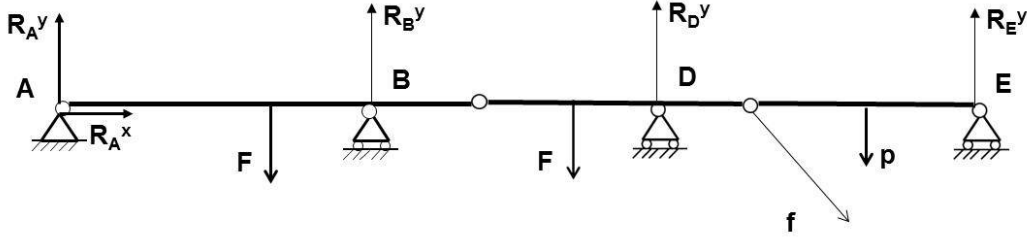


Figure 2.25:

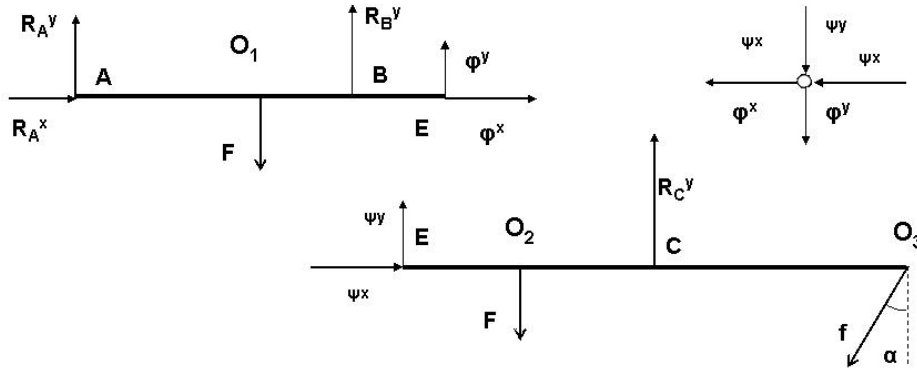


Figure 2.26:

La prima condizione di equilibrio, $R_C^y \geq 0$, è automaticamente soddisfatta. ECS per E :

$$\begin{aligned} -\psi^x - \phi^x = 0 & \Rightarrow \phi^x = -\psi^x = -f \sin \alpha \\ -\psi^y - \phi^y - p = 0 & \Rightarrow \phi^y = -\psi^y - p = -\frac{F}{2} + f \cos \alpha - p \end{aligned}$$

ECS per AE (con polo A):

$$\begin{aligned} -F2l' + R_B^y 3l' + \phi^y 4l' = 0 & \Rightarrow R_B^y = \frac{4}{3}[F + p - f \cos \alpha] \\ R_A^x + \phi^x = 0 & \Rightarrow R_A^x = -\phi^x = f \sin \alpha \\ R_A^y + R_B^y + \phi^y - F = 0 & \Rightarrow R_A^y = F + R_B^y + \phi^y = \frac{F}{6} + \frac{f}{3} \cos \alpha - \frac{p}{3} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Abbiamo risolto un sistema di 8 equazioni nelle 8 incognite $R_A^x, R_A^y, R_B^y, R_C^y, \phi^x, \phi^y, \psi^x, \psi^y$, accoppiate. Da $R_B^y \geq 0$ segue la condizione che l'equilibrio impone sulle forze esterne è

$$F + p \geq f \cos \alpha. \quad (2.16)$$

Alternativamente, per il calcolo delle sole reazioni esterne, possiamo scrivere delle equazioni già disaccoppiate dalle reazioni vincolari interne:

- R_C^y si riottiene dalla sola II ECS per EO_3 con polo E : $0 = -Fl + R_C^y 2l - f \cos \alpha 4l$. La scelta del polo proprio in E consente di sbarazzarci dell'incognita reazione vincolare ψ agente su EO_3 .

- R_B^y si riottiene ora dopo qualche calcolo dalla sola II ECS per tutto \mathcal{S} con polo A :

$$0 = -F2l' + R_B^y 3l' - p4l' - F(4l' + l) + R_C^y(4l' + 2l) - f \cos \alpha(4l' + 4l).$$

L'applicazione delle ECS a tutto il sistema \mathcal{S} ci consente di sbarazzarci delle incognite reazioni vincolari $\underline{\phi}, \underline{\psi}$ perché ora queste, essendo delle forze *interne* ad \mathcal{S} , non compaiono nelle ECS. Più semplice ancora è determinare R_B^y con il PLV modificato: Per

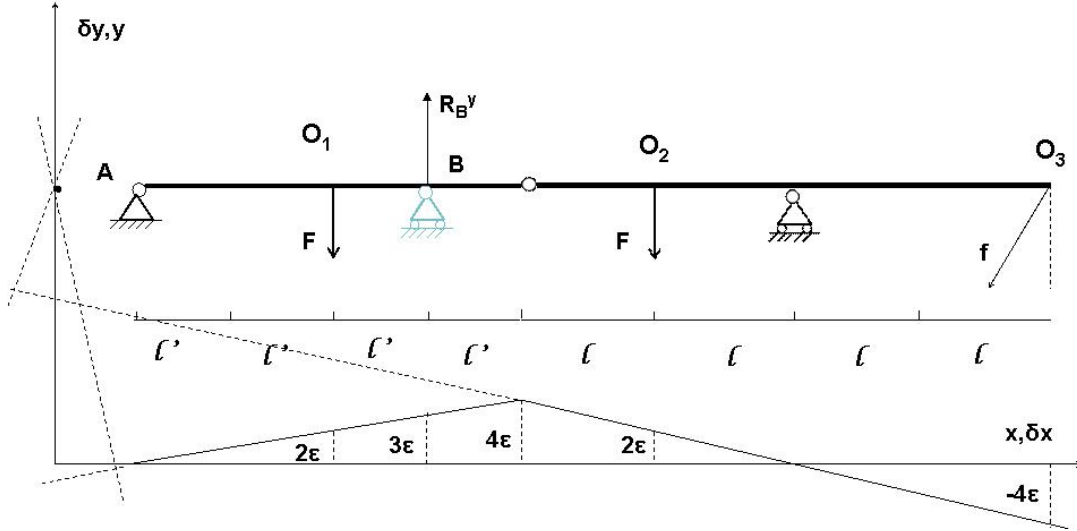


Figure 2.27:

un $\delta\mathcal{S}$ con C vincolato a muoversi (al più) orizzontalmente (v. Fig. 2.27) troviamo

$$\delta L^{(a)'} = \epsilon[R_B^y 3 - 4p - 2F - 2F + 4f \cos \alpha] = 0, \quad \forall \epsilon$$

da cui si ricava immediatamente il risultato (2.15)₁ per R_B^y .

- R_A^y si riottiene ora dopo qualche calcolo dalla sola I ECS_y per tutta la trave \mathcal{S} :

$$R_A^y - F + R_B^y - p - F + R_C^y - f \cos \alpha = 0$$

- R_A^x si riottiene dalla sola I ECS_x per tutta la trave \mathcal{S} : $R_A^x - f \sin \alpha = 0$

Per un $\delta\mathcal{S}$ con AE fisso mentre EO_3 ruota attorno a E (v. Fig. 2.28) il PLV modificato dá

$$\delta L^{(a)'} = \epsilon[2R_C^y - F - 4f \cos \alpha] = 0, \quad \forall \epsilon,$$

che ridá R_C^y . Infine, con il PLV modificato (v. Fig. 2.29) ritroviamo R_A^x da $R_A^x \epsilon - f \sin \alpha \epsilon = 0$.

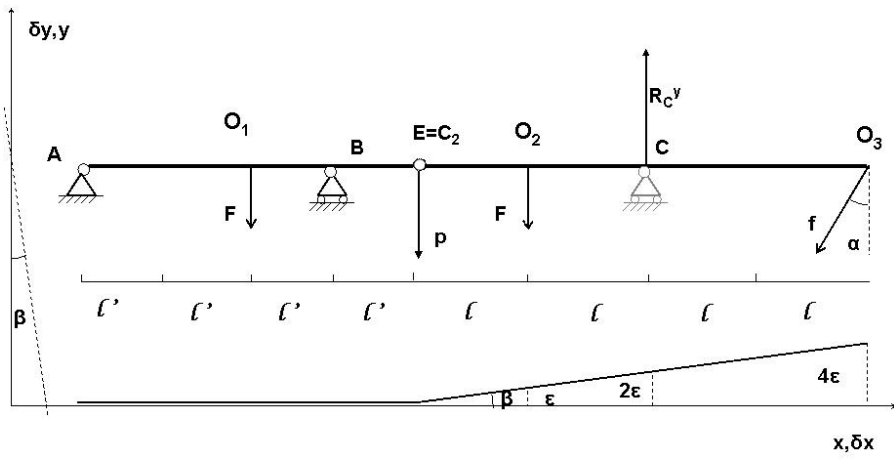


Figure 2.28:

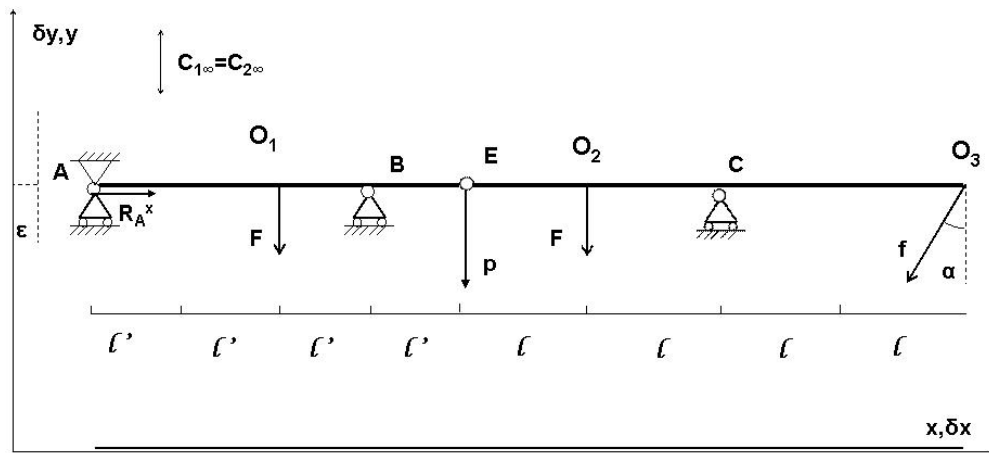
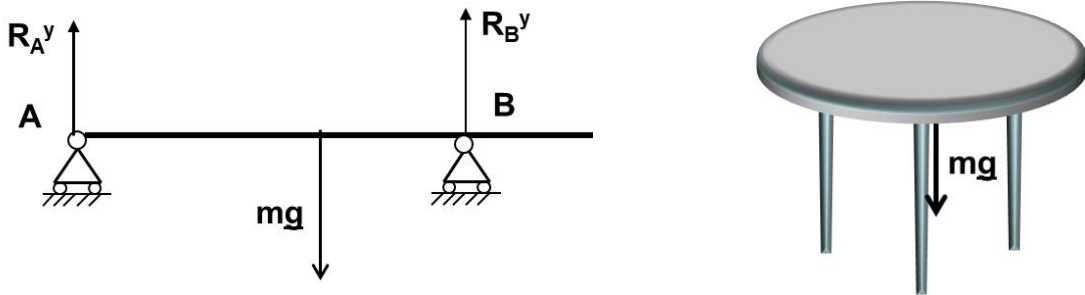


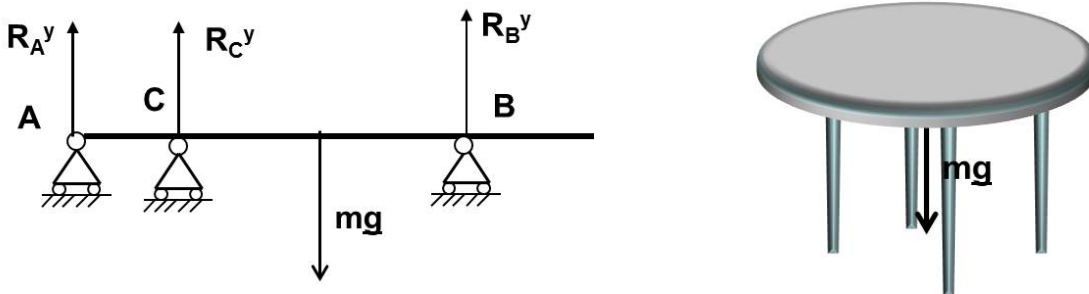
Figure 2.29:

2.5 Sistemi articolati

Un sistema \mathcal{S} di solidi vincolati in equilibrio si dice (*esternamente/internamente*) *isostatico* se le reazioni vincolari (esterne/interne) sono univocamente determinate dalle forze attive, (*esternamente/internamente*) *iperstatico* altrimenti (cioè quando \exists piú di un insieme di valori per le reazioni vincolari che dia luogo all'equilibrio). Nella sezione precedente ne abbiamo già incontrato vari esempi, eccone qualche altro. Un'asta pesante orizzontale con due appoggi lisci o un tavolo pesante con tre gambe sono esternamente isostatici.



La stessa asta con tre o piú appoggi o lo stesso tavolo con 4 o piú gambe sono esternamente iperstatici. Quando è presente, l'iperstaticità deriva dal considerare i corpi di \mathcal{S} e i vincoli come perfettamente rigidi. Si può eliminare considerandoli leggermente deformabili ed utilizzando la legge di forza elastica che lega le forze alle deformazioni.



Un sistema di travi e cerniere (sferiche o cilindriche) vincolate tra di loro e con l'esterno si dice un *sistema articolato*. Un sistema articolato connesso si dice semplicemente connesso se si può disconnetterlo sopprimendo una qualsiasi trave; molteplici connesso altrimenti.

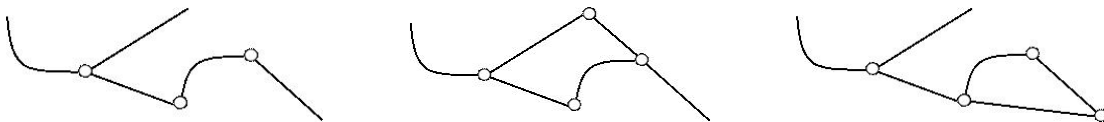


Figure 2.30: Sistema semplicemente (sinistra) e molteplici connesso (centro, destra)

Un sistema articolato molteplici connesso e non vincolato esternamente si dice *indeformabile* se è rigido (casi di fig. 2.31), *deformabile* altrimenti (casi di fig. 2.30). In particolare, *strettamente indeformabile* se esso diventa deformabile sopprimendo una qualsiasi trave (casi a, b, c), *ad aste/travi sovrabbondanti* altrimenti (caso d).

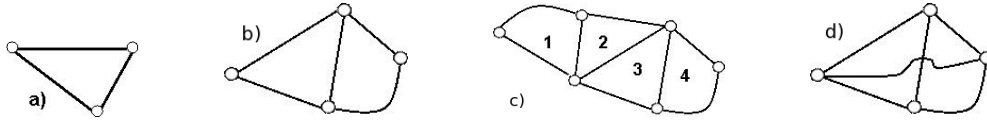


Figure 2.31: Sistemi strettamente indeformabili: a, b, c; a travi sovrabbondanti: d

Un sistema articolato si dice *piano* se tutte le sue travi sono vincolate a rimanere su un piano π . Ciò si può realizzare vincolandole tutte con cerniere cilindriche con assi $\perp \pi$. Queste si schematizzeranno con dei punti materiali, che chiameremo *nodi*.

Il “mattoncino” fondamentale dei sistemi strettamente indeformabili piani è la *capriata elementare*, cioè il triangolo (fig. 2.31 a), di quelli tridimensionali è il tetraedro.

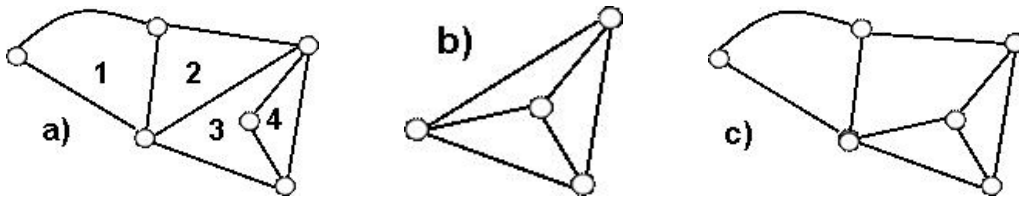


Figure 2.32:

Nel seguito ci limiteremo a considerare sistemi articolati piani

Tra i sistemi articolati piani strettamente indeformabili hanno particolare importanza i *tralicci triangolari semplici* (o *travature reticolari*), fig. 2.31 c). Essi sono costituiti da un’insieme di t triangoli ordinabili in una sequenza (il primo e l’ultimo triangolo sono individuati dall’avere un nodo in cui concorrono solo due aste) tali che

1. due triangoli consecutivi hanno in comune un’asta, hanno in comune anche i due relativi nodi e giacciono da parti opposte rispetto all’asta;
2. due triangoli non consecutivi hanno in comune al più un nodo, e questo deve appartenere anche ai triangoli compresi tra i due.

1. non è soddisfatto in fig. 2.32 a), mentre non sono sequenze di triangoli i sistemi in fig. 2.32 b),c).

Incidentalmente, detti t, a, n il numero dei triangoli, delle aste, dei nodi, è facile mostrare ricorsivamente a partire da $t = 1$ che

$$n = t + 2, \quad a = 2t + 1. \quad (2.17)$$

Sono utili le segg. proposizioni, che non dimostriamo.

Proposizione 5 *Un sistema articolato strettamente indeformabile ed esternamente isostatico è anche internamente isostatico.*

Proposizione 6 *Se si sostituisce una o più travi di un sistema articolato semplicemente connesso esternamente isostatico con altrettanti sistemi articolati strettamente indeformabili si ottiene un sistema articolato molteplicemente connesso esternamente isostatico.*

I sistemi ad aste sovrabbondanti, oltre a uno spreco di materiale, non permettono di valutare in fase di progettazione le caratteristiche di resistenza cui devono soddisfare le singole aste. Perfino un sistema a 2 nodi e 2 travi senza sollecitazioni attive può essere soggetto a reazioni vincolari interne insostenibili, v. fig. 2.33 sinistra, oppure la trave iperstatica della sezione 2.4.6.

Il passaggio dalla fig. 2.33 di centro a quella di destra illustra la sostituzione menzionata nella Prop. 6.

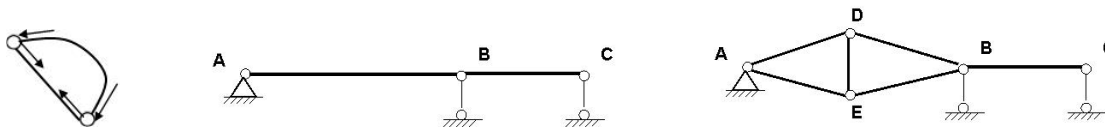


Figure 2.33:

2.5.1 Osservazioni sulle travi cariche e scariche.

Consideriamo una trave piana vincolata nel piano π solo tramite due nodi lisci A, B e carica, cioè soggetta ad un certo sistema $\Sigma^{(a)}$ di forze attive piane, v. fig. 2.34 sinistra. Fissiamo un sistema di riferimento come in figura ed applichiamo le ECS. Detti $\underline{R}^{(a)}, \underline{M}_A^{(a)}$ la risultante e il momento risultante di $\Sigma^{(a)}$ rispetto al polo A , troviamo

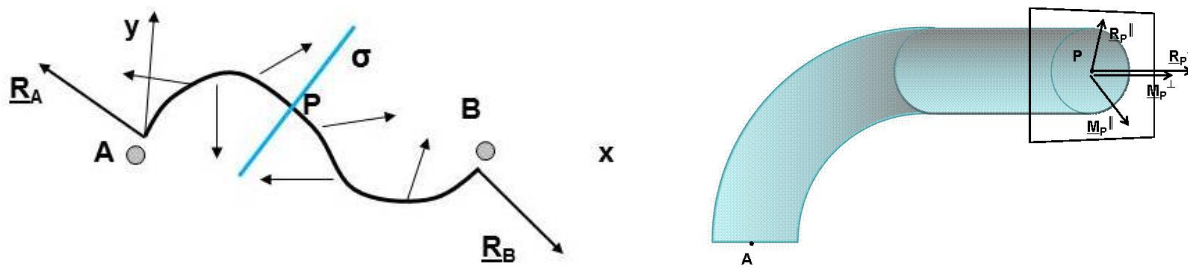


Figure 2.34:

$$\begin{aligned}
 \text{IECS con polo } A: \quad |AB|R_B^y + M_A^{(a)z} &= 0 & \Rightarrow & \quad R_B^y = -\frac{M_A^{(a)z}}{|AB|} \\
 \text{IECS}^y: \quad R_A^y + R_B^y + R^{(a)y} &= 0 & \Rightarrow & \quad R_A^y = -R_B^y - R^{(a)y}, \\
 \text{IECS}^x: \quad R_A^x + R_B^x + R^{(a)x} &= 0 & \Rightarrow & \quad R_A^x = -R_B^x - R^{(a)x},
 \end{aligned}$$

cioè $\underline{R}_A, \underline{R}_B$ sono completamente determinate a meno della componente $R_B^x \parallel (B - A)$. Se la trave è inserita in un sistema articolato, rimane quindi da determinare R_B^x (o R_A^x) considerando altre equazioni (p. es. la IECS nel nodo A , o B).

Se in particolare la trave è scarica (cioè non sottoposta a forze attive, v. fig. 2.35) risulta

$$R_B^y = 0 = R_A^y, \quad R_A^x = -R_B^x.$$

Consideriamo ora una parte \mathcal{S}' della trave (non necessariamente piana) compresa tra il nodo A ed una sezione normale σ (immaginaria) (v. fig. 2.34 destra). Detto P un punto della sezione, indichiamo con $\underline{R}_P, \underline{M}_P$ la risultante e il momento risultante del sistema Σ_P delle forze esercitate su \mathcal{S}' attraverso σ dalla parte compresa tra σ e il nodo B . Decomponiamoli ora secondo la componente perpendicolare e quella parallela a σ . Diremo $\underline{R}_P^\perp, \underline{R}_P^\parallel, \underline{M}_P^\perp, \underline{M}_P^\parallel$ risp. sforzo normale, sforzo di taglio, momento torcente, momento flettente. Applichiamo ora le ECS a \mathcal{S}' . Anche se la trave è scarica $\underline{R}_P^\perp, \underline{R}_P^\parallel, \underline{M}_P^\perp, \underline{M}_P^\parallel$ saranno in generale nonnulle.

Se tuttavia la trave è un'asta (cioè rettilinea) ed è scarica (v. fig. 2.35), la IIECS con polo P per \mathcal{S}' comporta $\underline{M}_P = \underline{0}$, perché sia $\underline{R}_A \parallel (A-P)$ sia \underline{R}_B hanno momento nullo rispetto a P , mentre la IECS implica che $\underline{R}_P^\parallel = 0$ e $\underline{R}_P^\perp = -\underline{R}_A = \underline{R}_B$.

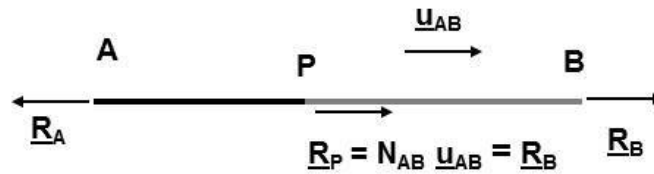


Figure 2.35:

Riassumendo, nel caso di un'asta scarica la sollecitazione tra le due parti in cui viene tagliata l'asta da una sezione normale risulta equivalente solo ad uno sforzo normale,

$$\Sigma_P \sim \{(P, \underline{R}_P = N_{AB} \underline{u}_{AB})\} \quad N_{AB} = R_B^x = -R_A^x$$

($\underline{u}_{AB} = (B-A)/\|B-A\|$) qualunque sia il punto P lungo l'asta dove passi la sezione. Scambiando le due parti, \underline{u}_{AB} cambia segno per lo scambio $A \leftrightarrow B$, \underline{R}_P cambia segno per il principio di azione e reazione, e quindi per confronto $N_{AB} = N_{BA}$, cioè lo sforzo normale non dipende dall'ordinamento dei nodi. Si noti che esso determina anche le reazioni $\underline{\phi}_{AB}, \underline{\phi}_{BA}$ dell'asta AB rispettivamente sui nodi A, B , che per il principio di azione e reazione sono date da $\underline{\phi}_{AB} = N_{AB} \underline{u}_{AB} = -\underline{\phi}_{BA}$. L'asta si dice un *tirante* se $N_{AB} > 0$, cioè se ciascuna parte tira l'altra verso il nodo che le appartiene, v. fig. 2.36, *puntone* se $N_{AB} < 0$, cioè se ciascuna parte spinge l'altra verso il nodo che non le appartiene. Nel primo caso i versi fisici delle forze sono proprio quelli disegnati in fig. 2.36, nel secondo caso sono tutti opposti.

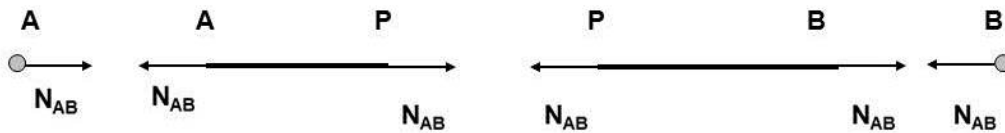


Figure 2.36:

2.5.2 Calcolo delle reazioni vincolari interne

Sono utili due metodi, il metodo dei nodi e il metodo di Ritter.

Metodo dei nodi. Si basa (oltre che su quanto abbiamo appreso riguardo alle aste cariche/scariche) sull'applicazione ripetuta delle (sole) IECS ai nodi, in una successione saggiamente scelta in modo che in ogni nuovo nodo P_i concorrano:

- al più 2 aste scariche esercitanti sforzi incogniti;
- oppure al più un'asta carica esercitante una reazione incognita.

Nell'esempio in fig. 2.37 applichiamo le IECS nell'ordine per i nodi 3,2,4,1:

$$\begin{array}{ll}
 IECS_x \text{ nodo 3} & \Rightarrow N_{23} = 0 \\
 IECS_y \text{ nodo 3} & \Rightarrow N_{34} = -F_2 \\
 IECS_x \text{ nodo 2} & \Rightarrow N_{24} = 0 \\
 IECS_y \text{ nodo 2} & \Rightarrow N_{21} = -F_1 \\
 IECS_x \text{ nodo 4} & \Rightarrow N_{14} = 0 \\
 IECS_y \text{ nodo 4} & \Rightarrow R_4^y = F_2 \\
 IECS_x \text{ nodo 1} & \Rightarrow R_1^x = 0 \\
 IECS_y \text{ nodo 1} & \Rightarrow R_1^y = F_1
 \end{array}$$

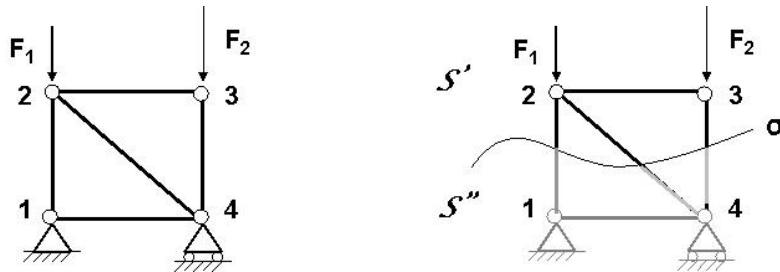


Figure 2.37:

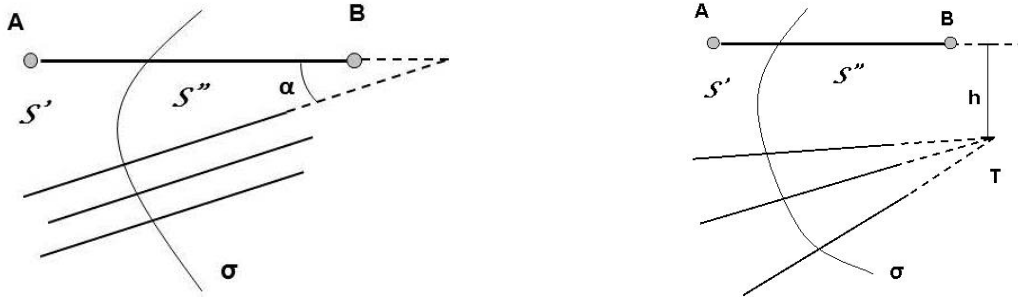
Metodo di Ritter. Serve a calcolare un N_{AB} di una particolare asta scarica AB . È applicabile se \exists una corrispondente *sezione di Ritter* σ , cioè tale che *disconnette* \mathcal{S} in due parti \mathcal{S}' , \mathcal{S}'' tagliando solo AB ed eventuali altre aste scariche $P_h P_k$ che devono essere

1. o \parallel tra loro, senza essere \parallel a AB ;
2. o concorrenti in uno stesso punto $T \notin AB$

(Queste due condizioni sono sintetizzabili nell'unica seguente: tutte le aste scariche tagliate, eccetto AB , devono concorrere in uno stesso punto, proprio o improprio.)

Nel caso 1., introdotto nel piano un sistema di riferimento (O, \vec{x}, \vec{y}) con $\vec{x} \parallel$ le aste tagliate, tranne AB , per calcolare N_{AB} basta applicare la $IECS_y$, ad una delle due parti, per es. \mathcal{S}' :

$$R'^y + N_{AB} \cos \alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{AB} = -\frac{R'^y}{\cos \alpha},$$



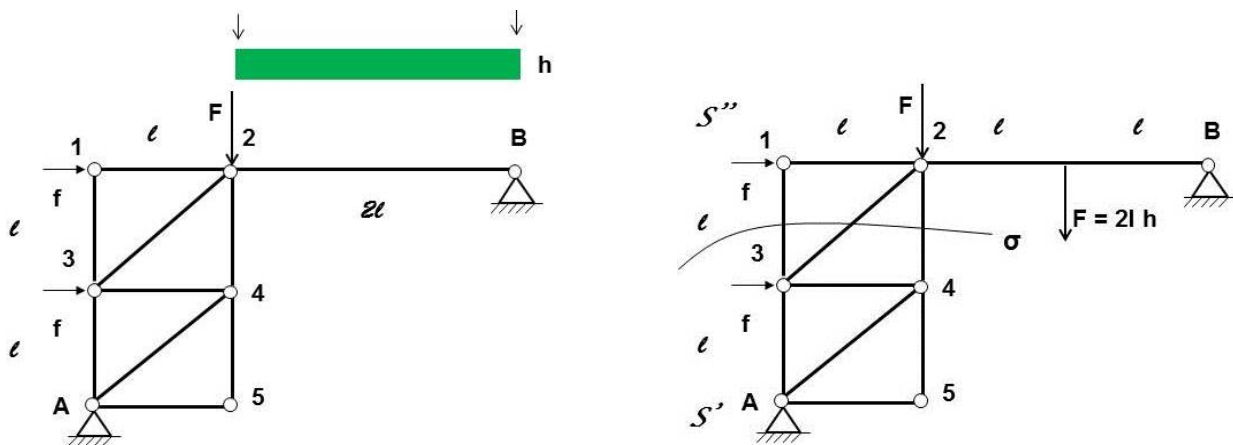
ove \underline{R}' denota la risultante di tutte le forze agenti su \mathcal{S}' , escluse quelle delle aste tagliate, e α l'angolo tra AB e \vec{y} . Nel caso 2., introdotto nello spazio un sistema di riferimento $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ con $\vec{z} \perp$ piano, per calcolare N_{AB} basta applicare la IIECS z , ad una delle due parti, per es. \mathcal{S}' , con polo T :

$$M'_T{}^z \pm N_{AB}h = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{AB} = \mp \frac{M'_T{}^z}{h},$$

ove \underline{M}'_T denota il momento risultante rispetto a T di tutte le forze agenti su \mathcal{S}' , escluse quelle delle aste tagliate, e h il braccio di AB rispetto a T . Il segno \pm si determina caso per caso dalla figura (è + se $N_{AB}\underline{u}_{AB}$ ruota in senso antiorario attorno a T , negativo altrimenti). Determiniamo per esempio nell'esercizio precedente N_{12}, N_{14} con il metodo di Ritter, v. fig. 2.37 destra

$$\begin{aligned} \text{IIECS per } \mathcal{S}' \text{, polo=nodo 4: } N_{12}l + F_1l = 0 & \quad \Rightarrow \quad N_{12} = -F_1 \\ \text{IECS}_x \text{ per } \mathcal{S}' & \quad \Rightarrow \quad N_{14} = 0 \end{aligned}$$

Confrontiamo ora i vari metodi finora esposti in alcune applicazioni. La struttura:

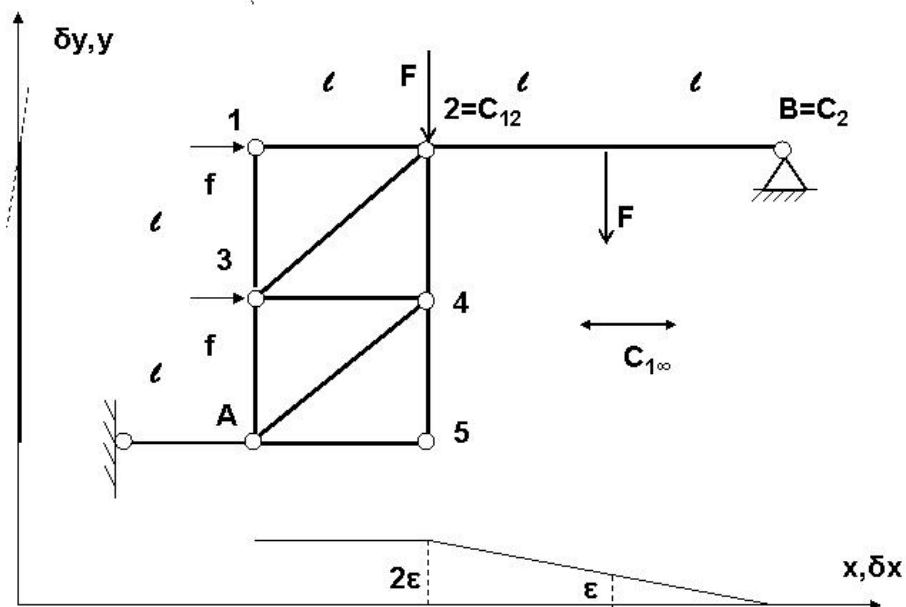
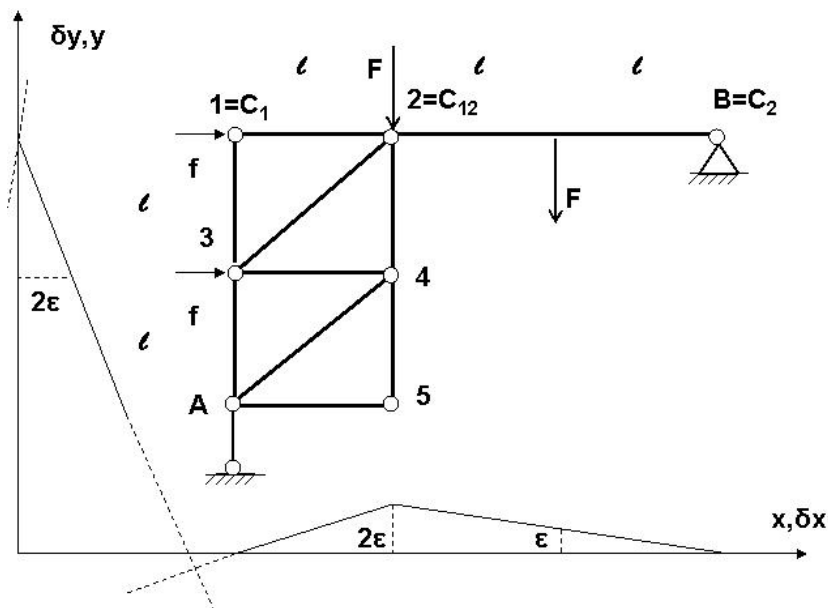


ha $n=l=0$ ed è isostatica (esternamente ed internamente); infatti si ottiene da un arco a tre cerniere (A,2,B) applicando le proprietà 5, 6. Ai fini del calcolo delle reazioni vincolari esterne ed interne tra nodi ed aste, il carico distribuito uniformemente sull'asta $2B$ (figura a sinistra), che è una distribuzione continua di vettori paralleli (con densità costante h), è equivalente alla sua risultante $F = 2lh$ (area del rettangolo) applicato al baricentro del rettangolo (che è il centro di questi vettori paralleli) o meglio sull'intersezione dell'asse centrale con l'asta,

cioè il punto medio dell'asta $2B$. In altri termini, la situazione a sinistra è equivalente a quella a destra. Ricaviamo le reazioni vincolari esterne con le ECS.

$$\begin{aligned}
 \text{IECS con polo 2 per } 2B: R_B^y 2l - Fl &= 0 & \Rightarrow & R_B^y = \frac{F}{2} \\
 \text{IECS}^y \text{ per tutto S: } R_A^y + R_B^y - 2F &= 0 & \Rightarrow & R_A^y = \frac{3}{2}F \\
 \text{IECS con polo 2 per } 12345A: R_A^x 2l - R_A^y l + fl &= 0 & \Rightarrow & R_A^x = \frac{3}{4}F - \frac{1}{2}f \\
 \text{IECS}^x \text{ per tutto S: } R_A^x + R_B^x + 2f &= 0 & \Rightarrow & R_B^x = -\frac{3}{4}F - \frac{3}{2}f
 \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ricalcoliamo ora con il PLV (modificato) R_A^x (fig. 2.5.2 sopra), R_A^y (fig. 2.5.2 sotto)



$$\begin{aligned}
 \text{PLV: } R_A^x 4\epsilon + f 2\epsilon - F 2\epsilon - F \epsilon &= 0 \\
 \Downarrow \\
 R_A^x &= \frac{3}{4}F - \frac{1}{2}f
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_A^y 2\epsilon - F 2\epsilon - F \epsilon &= 0 \\
 \Downarrow \\
 R_A^y &= \frac{3}{2}F
 \end{aligned}$$

Metodo nodi al nodo 1: $\underline{f} + N_{12}\underline{u}_{12} + N_{13}\underline{u}_{13} = 0 \Rightarrow N_{12} = -f < 0 \quad N_{13} = 0$;
 12 è un puntone. Metodo di Ritter per calcolare N_{32}, N_{42} ; IECS_x a \mathcal{S}' (v. fig. 2.5.2):

$$f + R_A^x + \frac{N_{32}}{\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow N_{32} = -\sqrt{2} \left(\frac{f}{2} + \frac{3}{4}F \right)$$

Quindi 23 è un puntone. IIECS con polo 3:

$$R_A^x l + N_{42}l = 0 \Rightarrow N_{42} = \frac{f}{2} - \frac{3}{4}F.$$

24 è un puntone o un tirante a seconda di f/F . Calcolo $\underline{\phi}_{2B}$ con il metodo dei nodi sul nodo 2

$$\begin{aligned} \text{IECS}_x : -N_{21} - \frac{N_{23}}{\sqrt{2}} + \phi_{2B}^x &= 0 & \Rightarrow & \phi_{2B}^x = -\frac{3}{2}f - \frac{3}{4}F \\ \text{IECS}_y : -F - N_{42} - \frac{N_{32}}{\sqrt{2}} + \phi_{2B}^y &= 0 & \Rightarrow & \phi_{2B}^y = -\frac{F}{2} \end{aligned}$$

Verifichiamo ora che 2B è in equilibrio: $-\underline{\phi}_{2B} + \underline{F} + \underline{R}_B = 0$, OK.

Infine, ricalcoliamo con il PLV (modificato) N_{23} (fig. 2.38 sopra), N_{24} (fig. 2.38 sotto; qui consideriamo come \mathcal{S}_2 l'asta 12 soltanto, e le aste 13,24 come formanti un doppio pendolo interno tra $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$).

$$\begin{aligned} \varepsilon(-F2 - F - N_{23}\sqrt{2} - f2 - N_{23}\sqrt{2}) &= 0 & \varepsilon(-N_{42}2 + f2 - N_{42}2 - F2 - F) &= 0 \\ \downarrow & & \downarrow & \\ N_{23} &= -\sqrt{2} \left(\frac{f}{2} - \frac{3}{4}F \right) & N_{24} &= \frac{f}{2} - \frac{3}{4}F \end{aligned}$$

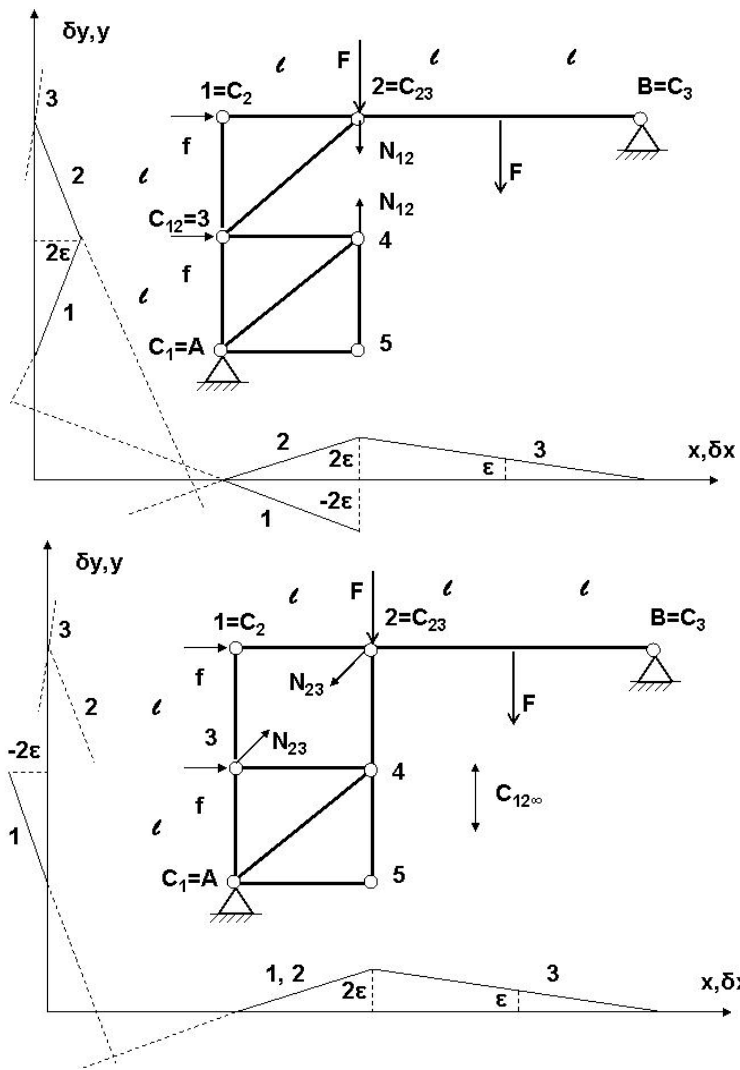


Figure 2.38: