# Ortogonalità

## Definizione

Due segmenti si dicono *ortogonali* se sono rispettivamente contenuti in rette ortogonali.

## Osservazione

Se $s$ e $t$ sono segmenti non nulli ortogonali, ed $s'$ e $t'$ sono rispettivamente paralleli ad $s$ e $t$, allora anche $s'$ e $t'$ sono ortogonali.

# Ortogonalità

## Proposizione

Sia $r$ una retta contenuta in un piano $\pi$ e sia $P$ un punto di $\pi$.
Allora esiste una ed una sola retta contenuta in $\pi$ che passi per $P$ e sia perpendicolare ad $r$.

Tralasciamo la dimostrazione.
Se non ci vincoliamo a stare in un piano, allora possono esistere infinite perpendicolari ad una retta $r$ passanti per un punto $P$: questo accade se e solo se $P \in r$ (perché se $P \notin r$, c'è un solo piano che contiene $r \cup \{P\}$).
Le rette per $P$ ortogonali ad $r$ sono invece infinite, sia se $P$ appartiene ad $r$, sia se non vi appartiene.

# Misura di angoli

La misura di angoli, nozione anche questa molto nota, può essere formalmente definita in maniera simile alla misura di segmenti. La differenza sostanziale è che c'è un'ampiezza che non può essere oltrepassata. Dal punto di vista tecnico, abbiamo già visto che questo comporta che la somma di ampiezze non è sempre definita. Non è quindi sempre possibile definire il prodotto di un numero per un'ampiezza.

## Definizione

Sia $n \in \mathbb{N}$ e sia $a$ un'ampiezza. Se esiste l'ampiezza pari alla somma di $n$ ampiezze uguali ad $a$, assumendo questa uguale ad $a$ nel caso $n = 1$, la chiameremo *prodotto di $n$ per $a$*, e la indicheremo con $na$.

# Misura di angoli

**Proposizione**

Sia $a$ un'ampiezza. Allora c'è un $n \in \mathbb{N}$ tale che non esista il prodotto di $n$ per $a$.

La dimostrazione è accennata nel testo, ma per motivi di tempo non la esponiamo a lezione (non è oggetto di domande d'esame).

# Misura di angoli

Per ovviare al problema che la somma di ampiezze non è sempre definita, invece della comoda condizione "$mu < nl$" che abbiamo usato nella definizione della misura di lunghezze, useremo una tecnica di dimezzamento simile a quella usata per moltiplicare numeri per lunghezze. Per quella proposizione abbiamo avuto bisogno del punto medio di un segmento; in questo caso abbiamo bisogno della bisettrice di un angolo.

# Misura di angoli

## Proposizione

Sia $\alpha$ un angolo convesso proprio di ampiezza $a$ e origine $O$, e si scelgano un punto $A$ su uno dei lati e un punto $B$ sull'altro, in modo che $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$ siano non nulli (così che $\alpha = A\hat{O}B$) e anche congruenti:

$$\overline{OA} \equiv \overline{OB} \ .$$

Allora, detto $M$ il punto medio di $\overline{AB}$, abbiamo

$$A\hat{O}M \equiv M\hat{O}B$$

e, detta $b$ la loro ampiezza, abbiamo

$$a = 2b$$

(scrivendo $2b$, si vuole anche implicitamente affermare che questo prodotto esiste).

# Misura di angoli

**Dimostrazione** (cenno).
Usando uno degli assiomi sulla congruenza di angoli e segmenti, otteniamo che $B\hat{A}O \equiv A\hat{B}O$, che si può anche scrivere $M\hat{A}O \equiv M\hat{B}O$. In maniera simile otteniamo $A\hat{O}M \equiv M\hat{O}B$, come volevamo.
Per quanto riguarda le ampiezze, basta applicare la definizione di ampiezza somma tenendo presente che $M$ e $B$ stanno nello stesso semipiano tra quelli individuati da $r_{OA}$. □

# Misura di angoli

## Osservazione

Sia $u$ un'ampiezza non nulla e sia $a$ un'ampiezza qualsiasi. Dalla proposizione ora vista segue facilmente che per ogni $n \in \mathbb{N}_0$ c'è un ampiezza $u_n$ tale che $u = 2^n u_n$. Si consideri l'insieme

$$X = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid \exists m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}_0 : x = \frac{m}{2^n} \text{ e } mu_n \leq a\} .$$

Sappiamo che esiste $m \in \mathbb{N}_0$ tale che $mu$ non è definito, e non è difficile verificare che $m$ è un maggiorante di $X$. Dunque esiste l'estremo superiore di $X$.

# Misura di angoli

## Definizione

Nella situazione dell'osservazione ora fatta, l'estremo superiore di $X$ si dice *misura* di $a$ rispetto ad $u$.
Per *misura* di un angolo convesso proprio rispetto ad $u$ intenderemo la misura della sua ampiezza.

# Misura di angoli

Poiché c'è un limite superiore alle misure delle ampiezze rispetto ad una fissata ampiezza $u$ (che sarebbe la misura dell'angolo piatto, se lo avessimo definito), per stabilire per gli angoli una proposizione analoga a quella che consente il prodotto di numeri per lunghezze, bisogna tener conto di questa limitazione. Lo faremo tra poco, ma ometteremo la dimostrazione e ci restringeremo al caso di una particolare unità di misura, che è molto utile e molto nota: il radiante. Per la definizione formale del radiante abbiamo bisogno di un po' di preparazione, che ora facciamo rinunciando però ad esporre alcune dimostrazioni.

# Misura di angoli

**Proposizione**

Due angoli hanno la stessa misura rispetto ad una fissata ampiezza se e solo se sono congruenti.

Tralasciamo la dimostrazione, anche se è facile.

**Definizione**

Sia $\pi$ un piano, sia $O \in \pi$ e sia $l$ una lunghezza. L'insieme dei punti $P \in \pi$ tali che $\overline{OP}$ abbia lunghezza $l$ si dice *circonferenza* di centro $O$ e raggio $l$ in $\pi$.

# Misura di angoli

## Proposizione

Sia $\gamma$ una circonferenza di centro $O$ e raggio non nullo $l$ in un piano $\pi$ e sia $r$ una retta contenuta in $\pi$ e passante per $O$. Siano poi $s_1$, ..., $s_n$ ($n \in \mathbb{N}$) $n$ semirette di origine $O$, tutte contenute in uno stesso semipiano di $\pi$ individuato da $r$ e tali che comunque scegliamo tre numeri $i < j < k$ in $\{1, \dots, n\}$ allora $s_j \setminus \{O\}$ è contenuto nell'angolo convesso proprio che ha per lati $s_i$ ed $s_k$. Detti $P_1$, ..., $P_n$ i punti d'intersezione di $\gamma$ rispettivamente con $s_1$, ..., $s_n$, indichiamo con $m_{s_1,\dots,s_n}$ la somma delle misure dei segmenti $\overline{P_1P_2}$, ..., $\overline{P_{n-1}P_n}$ rispetto ad $l$. Infine indichiamo con $S$ l'insieme di tutti i numeri reali $m_{s_1,\dots,s_n}$ che possono essere ottenuti in questo modo.
Allora si ha:

- $S$ non dipende dalla scelta di $\pi$, $O$, $l$ ed $r$.
- $S$ ammette estremo superiore.

Tralasciamo la dimostrazione.

# Misura di angoli

**Definizione**

L'estremo superiore dell'insieme $S$ considerato nella precedente proposizione viene detto *pi greco*, ed indicato con $\pi$ (da non confondere col piano).

Al di là della forma un po' pesante, abbiamo sostanzialmente definito $\pi$ come la lunghezza di una semicirconferenza rispetto al raggio.

**Proposizione**

Esiste un'unica ampiezza tale che gli angoli retti misurino $\frac{\pi}{2}$ rispetto ad essa.

Tralasciamo la dimostrazione.

# Misura di angoli

**Definizione**

L'ampiezza tale che gli angoli retti misurino $\frac{\pi}{2}$ rispetto ad essa si dice *radiante*. La misura di un angolo $\alpha$ rispetto a tale ampiezza si dice *misura in radianti* di $\alpha$.

Non sarebbe difficile dimostrare (forse solo un po' noioso) che la misura in radianti di un angolo $\alpha$ esprime la misura di un arco di circonferenza sotteso da $\alpha$ rispetto al raggio (la quale può essere definita in maniera simile a quanto fatto per le semicirconferenze).

# Misura di angoli

**Proposizione**

Un numero reale $x$ è la misura in radianti di un angolo convesso proprio se e solo se

$$0 < x < \pi \ .$$

Tralasciamo la dimostrazione.

**Definizione**

Siano $\vec{r}$ e $\vec{s}$ due rette orientate.
Se $r$ ed $s$ non sono parallele, allora definiamo *angolo* tra $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ la misura in radianti dell'angolo individuato da due rette orientate incidenti $\vec{r'}$ e $\vec{s'}$, rispettivamente parallele e concordi ad $\vec{r}$ ed $\vec{s}$.
Se $r$ ed $s$ sono parallele, definiamo *angolo* tra $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ il numero 0 se $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ sono concordi, o il numero $\pi$ se sono discordi.
L'angolo tra $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ sarà a volte denotato con $\widehat{\vec{r}\vec{s}}$.

# Misura di angoli

Il fatto che angoli corrispondenti sono congruenti assicura che la definizione ora data non dipende dalla scelta di $\vec{r'}$ e $\vec{s'}$.
Il termine "angolo" tra $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ non è formalmente corretto, in quanto $\vec{r}$ ed $\vec{s}$ non danno luogo ad un angolo ma ad un'ampiezza, ed il numero da noi definito non è a stretto rigore un'ampiezza, ma la sua misura in radianti.
Comunque questo abuso di linguaggio è comodo e non dà luogo a problemi particolari.

# Cambio di unità di misura

**Proposizione**

Siano $x$ la misura di una lunghezza $l$ rispetto ad una lunghezza non nulla $u$, e sia $y$ la misura di $u$ rispetto ad una lunghezza non nulla $u'$. Allora la misura di $l$ rispetto ad $u'$ è il prodotto $xy$.

Rinunciamo a riportare la dimostrazione.

# Teorema di Talete

## Proposizione

Date tre rette parallele $r$, $r'$, $r''$ contenute in un piano $\pi$, con $r \neq r''$, date due rette $s$ e $t$ contenute in $\pi$ e non parallele alle precedenti, e detti $A$, $A'$ e $A''$ i punti di intersezione di $s$ rispettivamente con $r$, $r'$, $r''$, e analogamente $B$, $B'$, $B''$ le intersezioni di $t$, si ha

$$\frac{|AA'|}{|AA''|} = \frac{|BB'|}{|BB''|} \; .$$

# Teorema di Talete

Nella nostra impostazione questo teorema si può dimostrare senza particolari difficoltà (solo con un po' di fatica) tenendo presenti la definizione della misura di lunghezze e una proposizione vista in precedenza che è sostanzialmente un caso particolare del teorema stesso (quello in cui $|AA'| = |AA''|$). Rinunciamo però a riportare qui i dettagli.

# Seno e coseno

## Proposizione

Sia $\alpha$ un angolo (convesso proprio) individuato da due rette orientate $\vec{r}$ ed $\vec{s}$, e sia $\alpha'$ un angolo individuato da due rette orientate $\vec{r'}$ e $\vec{s'}$. Detti $O$ ed $O'$ i rispettivi vertici di $\alpha$ e $\alpha'$, sia $A$ un punto su $s$ seguente $O$ e $A'$ un punto su $s'$ seguente $O'$. Sia $H$ l'intersezione di $r$ con la perpendicolare ad $r$ stessa passante per $A$, e sia $H'$ l'intersezione di $r'$ con la perpendicolare ad $r'$ stessa passante per $A'$.

Se $\alpha$ ed $\alpha'$ sono congruenti allora si ha:

- $\dfrac{|OH|}{|OA|} = \dfrac{|O'H'|}{|O'A'|}$,
- $\dfrac{|AH|}{|OA|} = \dfrac{|A'H'|}{|O'A'|}$,
- $H \succ O \iff H' \succ O$.

Tralasciamo la dimostrazione.

# Seno e coseno

## Definizione

Siano $\alpha$, $O$, $A$, $H$, come nella proposizione ora vista.
Il numero reale dato da

$$\begin{cases} \dfrac{|OH|}{|OA|}\,, & \text{se } H \succeq O \\[2ex] -\dfrac{|OH|}{|OA|}\,, & \text{se } H \prec O; \end{cases}$$

si dice *coseno* di $\alpha$, e si indica con $\cos\alpha$.
Il numero reale

$$\frac{|AH|}{|OA|}$$

si dice *seno* di $\alpha$, e si indica con $\sin\alpha$.

La proposizione precedente assicura che la definizione è ben posta (non dipende dalla scelta di $A$).

# Seno e coseno

### Definizione

Se $x$ è la misura in radianti di un angolo $\alpha$, definiamo il *coseno* di $x$ (denotato con $\cos x$) ponendolo uguale al coseno di $\alpha$. Definiamo il *seno* di $x$ (denotato con $\sin x$) ponendolo uguale al seno di $\alpha$.

Ancora la proposizione vista prima, insieme al fatto che angoli congruenti hanno la stessa misura, assicurano che la definizione qui sopra è ben posta (il seno e il coseno di un numero $x$ non dipendono dalla scelta di un $\alpha$ che abbia misura $x$). D'altra parte, la definizione ora data ci dà il seno e il coseno solo per i numeri $x$ tali che $0 < x < \pi$.

# Valore assoluto

## Definizione

Definiamo il *valore assoluto* di un $x \in \mathbb{R}$ come

$$\begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x\ , & \text{se } x < 0; \end{cases}$$

Il valore assoluto di $x$ si denota con

$$|x|\ .$$

# Seno e coseno

## Definizione

Poniamo per definizione

$$\sin 0 = 0,\ \sin \pi = 0,\ \cos 0 = 1,\ \cos \pi = -1\ .$$

Se poi $x$ è un numero reale tale che $-\pi \leq x < 0$ poniamo per definizione

$$\sin x = -\sin |x|,\ \cos x = \cos |x|\ .$$

Infine, se $x$ è un numero reale non compreso tra $-\pi$ e $\pi$, detto $n$ il massimo numero intero tale che $x - 2\pi n \geq -\pi$, poniamo per definizione

$$\sin x = \sin(x - 2\pi n),\ \cos x = \cos(x - 2\pi n)\ .$$

Le notazioni $\sin x$ e $\cos x$ si leggono rispettivamente *seno* di $x$ e *coseno* di $x$.

# Inizio del programma d'esame

Terminiamo qui i richiami dei fatti fondamentali. Come abbiamo detto all'inizio, le domande d'esame vertono sulle definizioni, proposizioni e dimostrazioni. Quelle viste fin qui non sono però oggetto di domande dirette in sede d'esame, ma servono come riferimenti per il materiale d'esame vero e proprio, che comincia a partire dalla prossima diapositiva.