Equipollenza

Definizione

Due segmenti orientati si dicono *equipollenti* se sono congruenti, paralleli e concordi.
Due coppie ordinate di punti (A, B) e (A', B') si dicono *equipollenti* se i segmenti orientati AB e $A'B'$ sono equipollenti.

Osservazione

Poiché segmenti equipollenti sono in particolare congruenti, essi hanno lo stesso modulo (rispetto ad una fissata unità di misura u).

Equipollenza

Siccome poi due rette sono parallele se e solo se hanno la stessa direzione, se definiamo la direzione di un segmento non nullo come la direzione dell'unica retta che lo contiene, abbiamo anche che due segmenti non nulli sono paralleli se e solo se hanno la stessa direzione.
Infine, se definiamo un "verso su una direzione", come una classe di equivalenza di versi concordi sulle rette (tutte parallele tra loro) che hanno quella direzione, allora possiamo anche dire che due segmenti orientati non nulli sono concordi se e solo se hanno lo stesso verso.
Riassumendo: due segmenti orientati sono equipollenti se e solo se hanno lo stesso modulo, direzione e verso.

Equipollenza

Proposizione

La relazione di equipollenza nell'insieme X delle coppie ordinate di punti, cioè la relazione $\mathcal{E}$ in X definita da

$$(A, B)\, \mathcal{E}\, \left(A', B'\right) \ :\Longleftrightarrow \ (A, B) \text{ è equipollente ad } \left(A', B'\right) \ ,$$

ha la proprietà riflessiva.

Dimostrazione.
Sia (A, B) una qualunque coppia ordinata di punti. Presa una retta r contenente $\overline{AB}$, questa è impropriamente parallela a sé stessa. Quindi AB è parallelo a sé stesso. Siccome poi un verso su r rispetto a cui $A \preceq B$ è concorde con sé stesso , abbiamo che AB è concorde con sé stesso. Siccome $\overline{AB}$ è congruente a sé stesso, il segmento orientato AB è congruente a sé stesso.

Equipollenza

Dunque AB, essendo congruente, parallelo e concorde con sé stesso, è equipollente a sé stesso . Ma se il segmento orientato AB è equipollente ad AB, allora la coppia ordinata (A, B) è equipollente alla coppia ordinata (A, B). $\square$

D'ora in poi, negli enunciati e nelle dimostrazioni, non ci preoccuperemo di fornire i dettagli su cose che sono ovvie o che sono formalizzabili in maniera automatica.

Proposizione

L'equipollenza dà luogo ad una relazione di equivalenza nell'insieme delle coppie ordinate di punti (e nell'insieme dei segmenti orientati).

Dimostrazione.

Basta dimostrare la transitività nel caso dei segmenti orientati.

Supponiamo che AB sia equipollente ad $A'B'$, e che $A'B'$ sia equipollente ad $A''B''$. Poiché la congruenza tra segmenti è una relazione d'equivalenza, AB è congruente ad $A''B''$.

Equipollenza

Se $A = B$, allora anche $A'' = B''$ e i due segmenti orientati sono paralleli e concordi perché un segmento nullo è parallelo a qualunque segmento, e su di esso c'è un unico verso (coincidente con l'opposto).
Se $A \neq B$, allora anche $A' \neq B'$ e $A'' \neq B''$. In questo caso r_{AB} è parallela ad $r_{A''B''}$ perché devono essere entrambe parallele ad $r_{A'B'}$ e il parallelismo tra rette è una relazione di equivalenza (quindi transitiva). Inoltre, il verso su r_{AB} tale che $A \prec B$ è concorde al verso su $r_{A''B''}$ tale che $A'' \prec B''$, perché sono entrambi concordi al verso su $r_{A'B'}$ tale che $A' \prec B'$, e la relazione di "concordanza" tra versi su rette parallele è una relazione d'equivalenza.
In conclusione, AB e $A''B''$, essendo congruenti, paralleli e concordi, sono equipollenti. $\square$

Osservazione

I segmenti orientati nulli costituiscono una classe di equivalenza rispetto alla relazione di equipollenza tra segmenti orientati.

Vettori liberi

Definizione

Definiamo un *vettore libero (ordinario)* come una classe d'equivalenza di coppie ordinate di punti, rispetto alla relazione di equipollenza. Se (A, B) è una coppia ordinata di punti, il vettore da esso individuato (cioè l'insieme delle coppie ad essa equipollenti) sarà indicato con $B - A$. In tal caso si dirà che la coppia (A, B), o anche il segmento orientato AB, è un *rappresentante* di $B - A$.

La definizione classica di vettore libero lo identifica con una classe di equipollenza di *segmenti orientati*. Tale definizione è sostanzialmente equivalente alla nostra. Abbiamo preferito usare le coppie ordinate, per "allontanare" il concetto di vettore da quello di segmento. È molto conveniente pensare che un vettore libero sia una differenza di punti (un po' come i numeri interi negativi sono differenze di numeri naturali).

Vettori liberi

Definizione

Il vettore rappresentato dai segmenti orientati nulli si dice *vettore nullo* e si indica con $\mathbf{0}$.

Osservazione

Due segmenti orientati sono equipollenti se e solo se i loro opposti sono equipollenti.

Definizione

Sia $\mathbf{v}$ un vettore libero. Il vettore libero rappresentato dai segmenti opposti ai segmenti che rappresentano $\mathbf{v}$ sarà detto *opposto* a $\mathbf{v}$ e sarà indicato con $-\mathbf{v}$.

Vettori liberi

Definizione

Sia $\mathbf{v}$ un vettore libero. Il modulo dei segmenti che rappresentano $\mathbf{v}$ si dirà *modulo di* $\mathbf{v}$, e si indicherà con

$$\left|\mathbf{v}\right| .$$

Parallelismo per i vettori liberi

Proposizione

Siano s ed s' segmenti orientati equipollenti, sia r una retta, π un piano e sia t un qualunque segmento.
Si ha:

$$\begin{aligned} s \text{ parallelo ad } r \quad &\Longleftrightarrow \quad s' \text{ parallelo ad } r\ , \\ s \text{ parallelo a } \pi \quad &\Longleftrightarrow \quad s' \text{ parallelo a } \pi\ , \\ s \text{ parallelo a } t \quad &\Longleftrightarrow \quad s' \text{ parallelo a } t\ . \end{aligned}$$

Tralasciamo la (facile) dimostrazione.

Parallelismo per i vettori liberi

Definizione

Sia $\mathbf{v}$ un vettore libero.
Il vettore $\mathbf{v}$ si dice *parallelo* ad una retta r se i segmenti orientati che lo rappresentano sono paralleli ad r.
Il vettore $\mathbf{v}$ si dice *parallelo* ad un piano π se i segmenti orientati che lo rappresentano sono paralleli a π.
Il vettore $\mathbf{v}$ si dice *parallelo* ad un vettore libero $\mathbf{w}$ se i segmenti orientati che rappresentano $\mathbf{v}$ sono paralleli ai segmenti orientati che rappresentano $\mathbf{w}$.

Parallelismo per i vettori liberi

Osservazione

Il vettore nullo è parallelo a qualsiasi retta, a qualsiasi piano e a qualsiasi vettore.

Proposizione

Siano s, s', t, t' segmenti orientati paralleli tra loro e tali che s ed s' sono equipollenti e t e t' sono equipollenti. Allora

$$s \text{ è concorde a } t \quad \Longleftrightarrow \quad s' \text{ è concorde a } t'$$

Tralasciamo la facile dimostrazione.

Parallelismo per i vettori liberi

Definizione

Due vettori paralleli $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ si dicono *concordi* se i segmenti orientati che rappresentano $\mathbf{u}$ sono concordi ai segmenti orientati che rappresentano $\mathbf{v}$.

Somma di un punto con un vettore libero

Proposizione

Dato un punto A ed un vettore libero $\mathbf{v}$, esiste un unico punto B tale che

$$\mathbf{v} = B - A \, .$$

Dimostrazione.
Sia $A'B'$ un rappresentante di $\mathbf{v}$, sia r una retta che contiene A' e B', e sia $\prec$ un verso per cui $A' \preceq B'$.
C'è un'unica retta passante per A e parallela ad r, e fissiamo su questa il verso concorde a $\prec$.
Abbiamo $\mathbf{v} = B - A$ se e solo se AB è equipollente ad $A'B'$, e questo accade se e solo se B segue o è uguale ad A su r, ed $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$.
Ma sappiamo che esiste un'unico punto con queste proprietà. $\square$

Somma di un punto con un vettore libero

Definizione

Nella situazione della precedente proposizione, il punto B si dice *somma* di A e $\mathbf{v}$, e si denota con

$$A + \mathbf{v}.$$

Osservazione

Per definizione di somma di A e $\mathbf{v}$, si ha

$$B = A + \mathbf{v} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbf{v} = B - A\,.$$

Tali uguaglianze sono entrambe equivalenti all'affermazione che il segmento orientato AB rappresenta il vettore libero $\mathbf{v}$.

Vettori applicati

Osservazione

Ogni coppia $(A, \mathbf{v})$ determina un segmento orientato AB (quello con $B = A + \mathbf{v}$). Ogni segmento orientato AB proviene da un'unica coppia $(A, \mathbf{v})$ (quella con $\mathbf{v} = B - A$). Dunque c'è una naturale applicazione biettiva tra l'insieme delle coppie del tipo $(A, \mathbf{v})$ e l'insieme dei segmenti orientati. Un *vettore applicato* può essere formalmente definito sia come una coppia $(A, \mathbf{v})$, sia come un segmento orientato AB (o addirittura come una coppia di punti (A, B)).

La definizione forse più popolare dei vettori applicati li identifica con i segmenti orientati. La nostra preferita è invece la seguente.

Definizione

Definiamo un *vettore applicato in un punto A* come una coppia $(A, \mathbf{v})$, dove $\mathbf{v}$ è un vettore libero.

Addizione tra vettori liberi

Proposizione

Siano A, A', B, B' punti. Si ha

$$B - A = B' - A' \quad \Longleftrightarrow \quad A' - A = B' - B\,.$$

Dimostrazione.
Se dimostriamo l'implicazione $\Rightarrow$, scambiando A' con B otteniamo anche l'altra. Supponiamo quindi che $B - A = B' - A'$ e passiamo a dimostrare che $A' - A = B' - B$.
Facciamo prima il caso che A, A', B, B' siano allineati, sia quindi r una retta che li contiene, e fissiamo un verso tale che $A \preceq B$. Siccome AB e $A'B'$ sono concordi, si deve avere anche $A' \preceq B'$. Se ci mettiamo nel caso $A \preceq A'$, l'altro caso si ottiene semplicemente scambiando A con A' e B con B'. Quindi assumiamo che

$$\boxed{A \preceq A'}\,.$$

Addizione tra vettori liberi

I segmenti orientati AA' e BB' sono ovviamente paralleli.
Se $B \preceq A'$ abbiamo $A \preceq B \preceq A' \preceq B'$, e quindi AA' e BB' sono anche concordi. Inoltre, abbiamo

$$\left|AA'\right| = |AB| + \left|BA'\right| = \left|A'B'\right| + \left|BA'\right| = \left|BB'\right| \ .$$

Quindi AA' e BB' sono anche congruenti, e in conclusione equipollenti. In altre parole, $A' - A = B' - B$ come volevamo.
Se invece $A' \prec B$, deve essere $B \preceq B'$ altrimenti
$|AB| = |AA'| + |A'B'| + |B'B|$ con $|B'B| \neq 0$ e quindi sarebbe
$|AB| > |A'B'|$, mentre sono uguali. Allora si ha ancora che AA' e BB' sono concordi. Inoltre, abbiamo

$$\left|AA'\right| + \left|A'B\right| = |AB| = \left|A'B'\right| = \left|A'B\right| + \left|BB'\right| \ ,$$

da cui $|AA'| = |BB'|$ e come prima concludiamo che $A' - A = B' - B$ come volevamo.

Addizione tra vettori liberi

Facciamo ora il caso in cui i punti A, A', B, B' non siano allineati. Dunque $A \neq A'$, $B \neq B'$, e le rette r_{AB} ed $r_{A'B'}$ sono distinte. Siccome AB ed $A'B'$ sono paralleli, r_{AB} ed $r_{A'B'}$ sono propriamente parallele, e sono quindi contenute in un unico piano π. Siccome AB ed $A'B'$ sono concordi, B e B' sono sullo stesso semipiano tra quelli individuati in π da $r_{AA'}$. Inoltre $\overline{AB} \equiv \overline{A'B'}$. Per una proposizione vista nel paragrafo dei fondamenti, abbiamo che $r_{AA'}$, $r_{BB'}$ sono parallele e $\overline{AA'} \equiv \overline{BB'}$. Quindi $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ sono paralleli e congruenti. Chiaramente A' e B' stanno sullo stesso semipiano individuato in π da r_{AB}: quello contenente la retta propriamente parallela $r_{A'B'}$. Dunque $\overline{AA'}$ e $\overline{BB'}$ sono equipollenti e concludiamo che $A' - A = B' - B$ come volevamo. $\square$

Addizione tra vettori liberi

Proposizione

Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vettori liberi e siano A e A' punti. Si ha

$$((A+\mathbf{u})+\mathbf{v})-A \;=\; \big((A'+\mathbf{u})+\mathbf{v}\big)-A' \,.$$

Dimostrazione.
Ponendo

$$B=A+\mathbf{u}, \quad C=B+\mathbf{v}, \quad B'=A'+\mathbf{u}, \quad C'=B'+\mathbf{v} \,,$$

il nostro obiettivo diventa dimostrare che $C-A=C'-A'$.
Siccome $B-A$ e $B'-A'$ sono entrambi uguali a $\mathbf{u}$, la proposizione vista poco fa implica che

$$A'-A=B'-B \,.$$

Siccome $C-B$ e $C'-B'$ sono entrambi uguali a $\mathbf{v}$, abbiamo anche

$$B'-B=C'-C \,.$$

Addizione tra vettori liberi

Quindi

$$A' - A = C' - C \ .$$

Applicando ancora la solita proposizione abbiamo

$$C - A = C' - A' \ ,$$

come volevamo. $\square$

Addizione tra vettori liberi

Definizione

Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ vettori liberi. Il vettore

$$((A+\mathbf{u})+\mathbf{v})-A\,,$$

(che è sempre lo stesso comunque si scelga il punto A), si dice *somma* di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$, e si indica con $\mathbf{u}+\mathbf{v}$.
Detto V l'insieme dei vettori liberi, l'operazione in V che ad ogni coppia $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ associa la loro somma $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ si chiama *addizione* in V.

Osservazione

Dalla definizione di somma di vettori liberi ricaviamo che comunque prendiamo tre punti A, B, C si ha

$$(B-A)+(C-B)=C-A.$$

Associatività dell'addizione tra vettori liberi

Proposizione

L'addizione tra vettori liberi ha la proprietà associativa; cioè, dati dei vettori liberi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ si ha

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \, .$$

Dimostrazione.

Dati dei vettori liberi $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, scelto un qualunque punto A e posto

$$B=A+\mathbf{u}, \quad C=B+\mathbf{v}, \quad D=C+\mathbf{w} \, ,$$

si ha

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\big((B-A)+(C-B)\big)+(D-C)=(C-A)+(D-C)=D-A$$

e

$$\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})=(B-A)+\big((D-C)+(C-B)\big)=(B-A)+(D-B)=D-A \, .$$

Quindi $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=D-A=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$, come volevamo. $\square$

Associatività dell'addizione tra vettori liberi

Dalla proprietà associativa segue che la somma di molti vettori

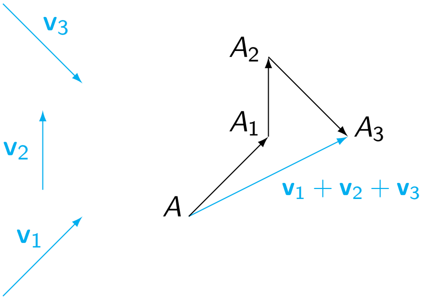
$$\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n$$

non dipende da come si mettono le parentesi. Inoltre, se si fissa un punto A qualunque, e si pone $A_1 = A + \mathbf{v}_1$, $A_2 = A_1 + \mathbf{v}_2$, ..., $A_n = a_{n-1} + \mathbf{v}_n$, si ha

$$\mathbf{v}_1 + \cdots + \mathbf{v}_n = A_n - A$$

Associatività dell'addizione tra vettori liberi

(la figura qui sotto mostra un caso con $n = 3$).



Questo modo di calcolare la somma di più vettori, in qualche testo viene informalmente chiamato "regola della poligonale".

Commutatività dell'addizione tra vettori liberi

La somma di più vettori non dipende nemmeno dall'ordine in cui i vettori vengono scritti; vale cioè, come ora vediamo, la proprietà commutativa.

Proposizione

Se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ sono vettori liberi qualsiasi, si ha

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = \mathbf{v} + \mathbf{u} \, .$$

Dimostrazione.
Scelto un punto A, poniamo

$$B = A + \mathbf{u} \, , A' := A + \mathbf{v} \, , \quad B' := A' + \mathbf{u} \, .$$

Quindi $B - A = \mathbf{u} = B' - A'$, da cui $A' - A = B' - B$. Dunque

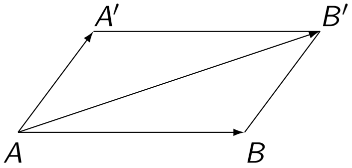
$$B' - B = A' - A = \mathbf{v} \, .$$

Allora abbiamo

$$\mathbf{u} + \mathbf{v} = (B - A) + (B' - B) = B' - A = (A' - A) + (B' - A') = \mathbf{v} + \mathbf{u}$$

come volevamo. $\square$

Commutatività dell'addizione tra vettori liberi



Parlando informalmente, la figura "delimitata" dai quattro segmenti considerati qui sopra può essere chiamata *parallelogramma*. Dunque la somma $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ di due vettori non paralleli è rappresentata dalla diagonale (orientata) AB' del parallelogramma che ha per lati i rappresentanti AB e AA' di $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Questo fatto viene chiamato informalmente "regola del parallelogramma", ed è utile quando si vogliono rappresentare i vettori con segmenti orientati aventi la stessa origine.