# Il vettore nullo è elemento neutro

## Osservazione

Sia $\mathbf{v} = B - A$ un qualunque vettore libero. Abbiamo

$$\mathbf{0} + \mathbf{v} = (A - A) + (B - A) = B - A = \mathbf{v}$$

e anche $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$ per la proprietà commutativa.
Quindi il vettore nullo è l'elemento neutro per l'addizione tra vettori liberi.

# La somma col vettore opposto è il vettore nullo

## Osservazione

Sia $\mathbf{v} = B - A$ un qualunque vettore libero. Abbiamo

$$\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = (B - A) + (A - B) = A - A = \mathbf{0} \; .$$

e anche $-\mathbf{v} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ per la proprietà commutativa.

# Prodotto di un numero reale per un vettore libero

## Proposizione

Sia $\mathbf{v}$ un vettore libero e $x$ un numero reale $\geq 0$. Allora esiste un unico vettore $\mathbf{w}$ parallelo e concorde a $\mathbf{v}$ tale che

$$|\mathbf{w}| = x \cdot |\mathbf{v}| \ .$$

**Dimostrazione** (cenno).
Se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ allora $\mathbf{w} = \mathbf{0}$.
Se $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, sia $AB$ un suo rappresentante. Fissiamo sulla retta $r_{AB}$ il verso per cui $A \prec B$. C'è un unico punto $D \succeq A$ tale che $|\overline{AD}| = x \cdot |\mathbf{v}|$. Il voluto vettore $\mathbf{w}$ è (necessariamente) quello rappresentato dal segmento orientato $AD$. $\square$

# Prodotto di un numero reale per un vettore libero

## Definizione

Sia $\mathbf{v}$ un vettore libero e sia $k$ un numero reale.
Se $k \geq 0$, l'unico vettore parallelo e concorde a $\mathbf{v}$ tale che

$$|\mathbf{w}| = k \cdot |\mathbf{v}|$$

sarà detto *prodotto* di $k$ per $\mathbf{v}$ e sarà indicato con

$$k\,\mathbf{v}\ .$$

Se $k < 0$ definiamo il *prodotto* $k\mathbf{v}$ uguale a

$$(-k)\,(-\mathbf{v})\ .$$

# Prodotto di un numero reale per un vettore libero

Enunciamo nella seguente proposizione le proprietà fondamentali del prodotto di un numero per un vettore libero.

**Proposizione**

Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vettori liberi e siano $h$ e $k$ numeri reali. Si ha

1. $h(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = h\mathbf{v} + h\mathbf{w}$.
2. $(h+k)\mathbf{v} = h\mathbf{v} + k\mathbf{v}$.
3. $(hk)\mathbf{v} = h(k\mathbf{v})$.
4. $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Tralasciamo per ora la dimostrazione.

# Prodotto scalare tra vettori liberi

## Definizione

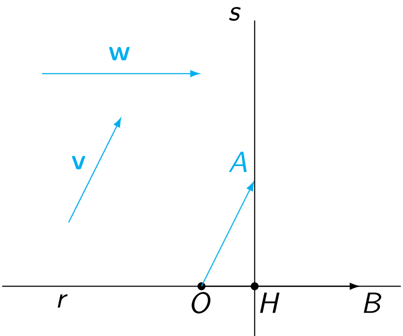
Due vettori liberi $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si dicono *ortogonali* se i segmenti che rappresentano $\mathbf{v}$ sono ortogonali ai segmenti che rappresentano $\mathbf{w}$.

## Osservazione

Il vettore nullo è ortogonale a qualunque vettore.

# Prodotto scalare tra vettori liberi

Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vettori liberi. Scelto un punto $O$, siano $OA$ e $OB$ i rispettivi rappresentanti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ aventi origine in $O$. Sia $r$ una retta contenente $O$ e $B$ e sia $\pi$ un piano contenente $O$, $A$ e $B$. Per una proposizione vista nel paragrafo di fondamenti, esiste un'unica retta $s$ contenuta in $\pi$, ortogonale ad $r$ e passante per $A$. Poiché $r$ ed $s$ sono ortogonali e contenute in $\pi$, esse si intersecano in un unico punto $H$.



# Prodotto scalare tra vettori liberi

Non sarebbe difficile dimostrare che il prodotto $|OB| \cdot |OH|$ non dipende dalla scelta di $O$, $r$ e $\pi$, cioè che vale la seguente proposizione.

## Proposizione

Siano $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $O$, $B$, $H$ come sopra. Sia $O'$ un qualunque punto, siano $O'A'$ e $O'B'$ i rispettivi rappresentanti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ aventi origine in $O'$, sia $r'$ è una retta contenente $O'$ e $B'$, sia $\pi'$ un piano contenente $O'$, $A'$ e $B'$, sia $s'$ la perpendicolare ad $r'$ passante per $A'$ e contenuta in $\pi'$, sia infine $H'$ l'intersezione di $r'$ ed $s'$. Allora si ha

$$|OB| \cdot |OH| = |O'B'| \cdot |O'H'| \ .$$

Inoltre si ha

$$OH \text{ concorde ad } OB \iff O'H' \text{ concorde ad } O'B' \ .$$

Tralasciamo per ora la dimostrazione.

# Prodotto scalare tra vettori liberi

## Definizione

Siano $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$, $O$, $B$, $H$ come prima. Definiamo il *prodotto scalare di* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ , rispetto ad una fissata unità di misura $u$, come il numero reale

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \begin{cases} |OB| \cdot |OH| \,, & \text{se } OB \text{ e } OH \text{ sono concordi;} \\ \\ -|OB| \cdot |OH| \,, & \text{se } OB \text{ e } OH \text{ sono discordi.} \end{cases}$$

Conserveremo la notazione $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}$ per il prodotto scalare di vettori liberi $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e l'unità di misura sarà di solito sottintesa.

# Prodotto scalare tra vettori liberi

## Proposizione

I vettori liberi $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono ortogonali se e solo se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$.

**Dimostrazione**.
Nel caso $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ si ha che le due condizioni sono entrambe vere (quindi equivalenti in questo caso).
Nel caso $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ basta osservare che, conservando le notazioni introdotte all'inizio, si ha

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ ortogonali} \iff \overline{OA} \subseteq s \iff H = O \iff |\overline{OH}| = 0 \iff \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0 .$$

$\square$.

# Prodotto scalare tra vettori liberi

## Proposizione

Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vettori liberi e sia $h \in \mathbb{R}$. Si ha

1. $$\mathbf{v} \cdot (h\mathbf{w}) = h(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}),$$
2. $$\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{v}|^2.$$

Tralasciamo per ora la (non difficile) dimostrazione.

# Prodotto scalare tra vettori liberi

## Osservazione

Dalla precedente proposizione, punto 2, si ricava subito:

- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0,$
- $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0 \iff \mathbf{v} = \mathbf{0}.$

# Prodotto scalare tra vettori liberi

## Definizione

Siano $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ due vettori liberi non nulli. Definiamo *angolo* tra $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ l'angolo tra due rette orientate rispettivamente parallele e concordi a $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.
L'angolo tra $\mathbf{u}$ ed $\mathbf{v}$ sarà a volte denotato con $\widehat{\mathbf{uv}}$.

## Proposizione

Siano $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ vettori non nulli. Si ha

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \widehat{\mathbf{vw}}.$$

# Prodotto scalare tra vettori liberi

**Dimostrazione**. Assumiamo le notazioni introdotte poco fa, che sono compatibili con quelle che abbiamo usato quando abbiamo definito seno e coseno. Nel caso $OH$ sia concorde ad $OB$ si ha

$$|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = |OA| \cdot |OB| \cdot \frac{|OH|}{|OA|} = |OB| \cdot |OH| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \ ,$$

e nel caso $OH$ non sia concorde con $OB$ si ha

$$|\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = |OA| \cdot |OB| \cdot \left( -\frac{|OH|}{|OA|} \right) = -|OB| \cdot |OH| = \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \ .$$

$\square$

# Versori

## Definizione

Un *versore* è un vettore di modulo 1.

Ovviamente la nozione di versore ha senso sempre che sia sottintesa un'unità di misura.

## Osservazione

Si ha

$$\mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ versori} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}} \ .$$

# Proprietà commutativa del prodotto scalare

## Proposizione

Siano $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vettori liberi. Allora si ha

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{w} \cdot \mathbf{v} \ .$$

**Dimostrazione.**
Se almeno uno tra $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ è nullo (o più in generale se sono ortogonali) allora abbiamo visto prima che deve essere $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ e $\mathbf{w} \cdot \mathbf{v} = 0$.
Se invece $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono entrambi non nulli, basta applicare la formula $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \cos \widehat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$. □

La proprietà ora vista può essere chiamata *commutativa* come al solito, anche se il prodotto scalare è un'operazione interna. La stessa cosa viene spesso espressa dicendo che il prodotto scalare è *simmetrico*.

# Prodotto scalare tra vettori liberi

## Osservazione

Dati dei vettori liberi $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, dalla proprietà commutativa e dal fatto che $\mathbf{v} \cdot (h\mathbf{w}) = h(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ (visto prima) segue subito che

- $$(h\mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = h(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}).$$

# Prodotto scalare tra vettori liberi

**Proposizione**

Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vettori liberi paralleli ad un piano $\pi$ (vedremo poi che questa ipotesi di parallelismo si può eliminare). Allora si ha

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot\mathbf{u}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}\ .$$