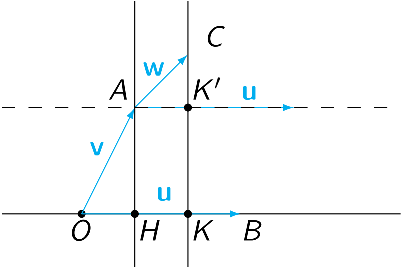
Prodotto scalare tra vettori liberi

Dimostrazione (cenno). Con riferimento alla figura



possiamo osservare che

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot\mathbf{u} = |OK|\cdot|\mathbf{u}| = |OH|\cdot|\mathbf{u}| + |HK|\cdot|\mathbf{u}|$$
$$= |OH|\cdot|\mathbf{u}| + |AK'|\cdot|\mathbf{u}| = \mathbf{v}\cdot\mathbf{u} + \mathbf{w}\cdot\mathbf{u}\ .$$

I casi in cui OH oppure HK non sono concordi ad OB si possono trattare in maniera simile. □

Prodotto scalare tra vettori liberi

Anche se la forma è quella di una proprietà distributiva, non è esattamente così perché le addizioni coinvolte sono diverse: quella in $\mathbb{R}$ e quella nell'insieme dei vettori liberi. L'idea fondamentale della dimostrazione ora accennata funziona anche nel caso di vettori non rappresentabili in uno stesso piano, solo che in questo caso la dimostrazione formale (fatta sulla base dei risultati precedenti) è più elaborata.
Facciamo vedere come il caso dei vettori complanari è già sufficiente per dimostrare immediatamente il teorema di Pitagora (che, se si vuole, potrà essere usato per dimostrare il caso generale dei vettori non complanari).

Teorema di Pitagora

Proposizione

Siano r ed s rette perpendicolari, sia O il loro punto comune, sia A un punto su r e B un punto su s. Allora si ha

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2.$$

Dimostrazione.
Poniamo $\mathbf{v} = A - O$, $\mathbf{w} = O - B$. I vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono rappresentati dai segmenti orientati OA e BO, che giacciono su rette ortogonali. Dunque $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono ortogonali. Inoltre si ha

$$\mathbf{v} + \mathbf{w} = A - B.$$

Quindi

$$\begin{aligned} |\overline{AB}|^2 &= (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 \quad \square \,. \end{aligned}$$

Prodotto scalare tra vettori liberi

La seguente proposizione è l'estensione della proprietà "distributiva" al caso generale di vettori non paralleli ad uno stesso piano.

Proposizione

Siano $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ vettori liberi. Allora si ha

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})\cdot\mathbf{u}=\mathbf{v}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{w}\cdot\mathbf{u}\ .$$

Tralasciamo per ora la dimostrazione.
Per la proprietà commutativa abbiamo anche

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{v}+\mathbf{w})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}+\mathbf{u}\cdot\mathbf{w}\ .$$

Vettori numerici e matrici

Operazioni su funzioni a valori reali

Definizione

Sia X un insieme.
Date delle funzioni $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : X \to \mathbb{R}$, la *somma di f e g* è la funzione $s : X \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in X$,

$$s(x) = f(x) + g(x) \; ;$$

questa funzione si può denotare con $f + g$.
Dato un $r \in \mathbb{R}$ ed una funzione $f : X \to \mathbb{R}$, il *prodotto di r per f* è la funzione $p : X \to \mathbb{R}$ tale che, per ogni $x \in X$,

$$p(x) = r \cdot f(x) \; ;$$

questa funzione si può denotare con rf.

Abbiamo quindi per definizione

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) \, , \qquad (rf)(x) = r \cdot f(x)$$

Operazioni su funzioni a valori reali

Naturalmente si può definire anche il prodotto fg tra funzioni, ma in questo corso è molto meno usato.
Ricordiamo che l'insieme di tutte le funzioni $X \to \mathbb{R}$ si può denotare con $\mathbb{R}^X$ e che questo insieme è anche uguale al prodotto cartesiano di una famiglia di insiemi tutti uguali ad X.

Definizione

Sia X un insieme.
L'operazione in $\mathbb{R}^X$ che ad ogni coppia di funzioni (f, g) associa $f + g$ si dice *addizione in* $\mathbb{R}^X$.
Un numero reale può anche essere detto *scalare*, e l'operazione esterna in $\mathbb{R}^X$ con operatori in $\mathbb{R}$ che ad ogni coppia $(r, f) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^X$ associa il prodotto rf si dice *moltiplicazione per scalari in* $\mathbb{R}^X$.

Operazioni su funzioni a valori reali

Osservazione

Siano $r \in \mathbb{R}$ e $(a_i)_{i \in I}$, $(b_i)_{i \in I}$ famiglie di numeri reali con indici in un insieme I. Poiché abbiamo definito le famiglie come funzioni, in base alla definizione data poco fa la *somma* di $(a_i)_{i \in I}$ e $(b_i)_{i \in I}$ è la famiglia $(s_i)_{i \in I}$ data da

$$s_i := a_i + b_i \ , \quad \forall i \in I \ ,$$

e il *prodotto* $r\,(a_i)_{i \in I}$ è la famiglia $(p_i)_{i \in I}$ data da

$$p_i := r a_i \ , \quad \forall i \in I \ .$$

Nel caso particolare $I = \mathbb{N}_0$, restano così definite la somma di successioni di numeri reali e il prodotto di un numero reale per una successione di numeri reali.

Operazioni su funzioni a valori reali

Proposizione

Sia X un insieme, denotiamo con $\mathbf{0}$ la funzione $X \to \mathbb{R}$ che associa 0 ad ogni $x \in X$, e per ogni $f : X \to \mathbb{R}$ denotiamo con $-f$ la funzione che associa $-f(x)$ ad ogni $x \in X$.
Allora per ogni $f, g, h \in \mathbb{R}^X$ ed $r, s \in \mathbb{R}$ si ha

- $(f + g) + h = f + (g + h)$ (proprietà associativa);
- $f + \mathbf{0} = f$ e $\mathbf{0} + f = f$ ($\mathbf{0}$ è elemento neutro);
- $f + (-f) = \mathbf{0}$ e $(-f) + f = \mathbf{0}$;
- $f + g = g + f$ (proprietà commutativa);
- $r(f + g) = rf + rg$;
- $(r + s)f = rf + sf$;
- $(rs)f = r(sf)$;
- $1f = f$.

Operazioni su funzioni a valori reali

Dimostrazione.

Sia x un qualunque elemento di X. Tenendo presenti le proprietà dell'addizione e della moltiplicazione in $\mathbb{R}$, per ogni $f, g, h \in \mathbb{R}^X$ ed $r, s \in \mathbb{R}$ si ha

- $\big((f+g)+h\big)(x) = (f+g)(x)+h(x) = (f(x)+g(x))+h(x) = f(x)+(g(x)+h(x)) = f(x)+(g+h)(x) = \big(f+(g+h)\big)(x)$;
- $\big(f+\mathbf{0}\big)(x) = f(x)+0 = f(x)$;
- $\big(f+(-f)\big)(x) = f(x)+(-f)(x) = f(x)+(-f(x)) = 0 = \mathbf{0}(x)$;
- $\big(f+g\big)(x) = f(x)+g(x) = g(x)+f(x) = \big(g+f\big)(x)$;
- $\big(r(f+g)\big)(x) = r\cdot(f+g)(x) = r\cdot(f(x)+g(x)) = r\cdot f(x)+r\cdot g(x) = (rf)(x)+(rg)(x) = (rf+rg)(x)$;
- $\big((r+s)f\big)(x) = (r+s)\cdot f(x) = r\cdot f(x)+s\cdot f(x) = (rf)(x)+(sf)(x) = (rf+sf)(x)$;
- $\big((rs)f\big)(x) = (rs)\cdot f(x) = r\cdot(s\cdot f(x)) = r\cdot(sf)(x) = \big(r(sf)\big)(x)$;
- $(1f)(x) = 1\cdot f(x) = f(x)$.

Operazioni su funzioni a valori reali

Questo dimostra le proprietà volute ad eccezione di

$$\mathbf{0} + f = f \qquad \text{e} \qquad (-f) + f = \mathbf{0} \,,$$

che però seguono subito da

$$f + \mathbf{0} = f \qquad \text{e} \qquad f + (-f) = \mathbf{0}$$

per la proprietà commutativa. $\square$

Vettori numerici

Definizione

Sia $n \in \mathbb{N}_0$. Un elemento di $\mathbb{R}^n$, cioè una n-pla di numeri reali, viene anche detto *vettore numerico (reale)* di *ordine n*.

Per un vettore numerico $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ si usa spesso la comoda notazione

$$(a_1, \ldots, a_n) \ ,$$

(formalmente si ha $a_i = \mathbf{a}(i-1)$ per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}$).

Operazioni su vettori numerici

Osservazione

Siano $r \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, con $n \in \mathbb{N}_0$. Poiché abbiamo definito le n-uple come funzioni, e poiché sappiamo sommare e moltiplicare per scalari funzioni a valori reali, la *somma* $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ è il vettore (numerico) $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^n$ dato da

$$\mathbf{s}(i) := \mathbf{a}(i) + \mathbf{b}(i) \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \ ,$$

e il *prodotto* $r\mathbf{a}$ è il vettore (numerico) $\mathbf{p}$ dato da

$$\mathbf{p}(i) = r\mathbf{a}(i) \quad \forall i \in \{0, \dots, n-1\} \ .$$

Operazioni su vettori numerici

In altri termini (un po' meno precisi, ma più semplici), possiamo anche scrivere

$$(a_1, \ldots, a_n) + (b_1, \ldots, b_n) := (a_1 + b_1, \ldots, a_n + b_n)$$

e

$$h(a_1, \ldots, a_n) := (ha_1, \ldots, ha_n).$$

Vettore numerico nullo e vettore numerico opposto

Definizione

Il vettore numerico che ha tutte le componenti uguali a zero, viene detto *vettore (numerico) nullo* e viene denotato con $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{0} = (0, \ldots, 0) \, .$$

Sia $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$. Il vettore

$$(-1)\mathbf{a}$$

si chiama l'*opposto* di $\mathbf{a}$ e viene denotato con

$$-\mathbf{a}.$$

Vettore numerico nullo e vettore numerico opposto

In altri termini,

$$-(a_1, \ldots, a_n) := (-a_1, \ldots, -a_n) \, .$$

Molto spesso una somma

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$$

viene denotata semplicemente con

$$\mathbf{a} - \mathbf{b}$$

e viene chiamata *differenza* tra **a** e **b**.

Osservazione

Per i vettori numerici di dato ordine n valgono le proprietà elencate poco fa per le operazioni tra funzioni, perché siamo nel caso particolare in cui $X = \{0, \ldots, n-1\}$.

Prodotto scalare standard di vettori numerici

Definizione

Siano $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ e $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ vettori numerici in $\mathbb{R}^n$.
Definiamo il *prodotto scalare standard* di $\mathbf{a}$ per $\mathbf{b}$ come il numero reale

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \ .$$

(o, in termini meno precisi, $a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n$). Tale prodotto sarà indicato con

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \ .$$

Prodotto scalare standard di vettori numerici

Proposizione

Siano $n \in \mathbf{N}_0$, $r \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$. Si ha

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
2. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$;
3. $(h\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = h(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$;
4. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$;
5. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0 \iff \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Tralasciamo per ora la (facile) dimostrazione.

Matrici sui reali

Definizione

Siano $m, n \in \mathbf{N}_0$. Una *matrice di tipo* $m \times n$ *sui reali* è una matrice di tipo $m \times n$ sull'insieme $\mathbb{R}$ (secondo la definizione vista nel paragrafo di fondamenti), cioè un elemento di $\mathbb{R}^{m \times n}$.

Nei vari libri che trattano le matrici, sono anche usate differenti notazioni, oltre $\mathbb{R}^{m \times n}$, per l'insieme delle matrici di tipo $m \times n$ sui reali, come ad esempio $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$, $M(m, n; \mathbb{R})$ o simili.

Matrici sui reali

Per una matrice sui reali si usa spesso la comoda notazione del tipo

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} .$$

Quando non dà luogo ad ambiguità, si può usare anche la notazione breve del tipo

$$\left(a_{ij}\right) .$$

Matrici sui reali

Indicheremo con $\mathbf{a}_i$ la riga

$$(a_{i1}, \ldots, a_{in})$$

di (a_{ij}), e la chiameremo *i-esima riga*.
Indicheremo con $\mathbf{a}^j$ la colonna

$$(a_{mj}, \ldots, a_{mj})$$

di (a_{ij}), e la chiameremo *j-esima colonna*.

Operazioni su matrici sui reali

Osservazione

Siano $m, n \in \mathbb{N}_0$ e $(a_{ij}), (b_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Poiché abbiamo definito le matrici di tipo $m \times n$ come famiglie, e poiché sappiamo sommare e moltiplicare per scalari famiglie di numeri reali, la *somma* $(a_{ij}) + (b_{ij})$ è la matrice $(s_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ data da

$$s_{ij} := a_{ij} + b_{ij} \ , \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\} \ ,$$

e il *prodotto (per scalari)* $r\,(a_{ij})$ è la matrice $(p_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ data da

$$p_{ij} := r a_{ij} \ , \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\} \ .$$

Operazioni su matrici sui reali

In altri termini (un po' meno precisi, ma più semplici), possiamo anche scrivere

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

e

$$r \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ra_{11} & \cdots & ra_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ ra_{m1} & \cdots & ra_{mn} \end{pmatrix} ;$$

o anche $(a_{ij}) + (b_{ij}) := (a_{ij} + b_{ij})$ e $r\,(a_{ij}) := (ra_{ij})$.

Matrice nulla e matrice opposta

Definizione

Una matrice sui reali che ha tutti i termini uguali a zero viene detta *matrice nulla* e viene a volte denotata con O:

$$O = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la matrice

$$(-1)\, A$$

si chiama l'*opposta* di A e viene denotata con

$$-A\,.$$

Matrice nulla e matrice opposta

Una somma

$$A + (-B)$$

viene spesso denotata semplicemente con

$$A - B$$

e viene chiamata *differenza* tra A e B.

Osservazione

Per le matrici di tipo $m \times n$ valgono le proprietà elencate poco fa per le operazioni tra funzioni, perché siamo nel caso particolare in cui $X = \{0, \ldots, m-1\} \times \{0, \ldots, n-1\} = \{(0,0), \ldots, (0, n-1), (1,0), \ldots, (1, n-1), \ldots, (m-1, 0), \ldots, (m-1, n-1)\}$ (formalmente, se $A = (a_{ij})$ si ha $A(i,j) = a_{i+1,j+1}$).

Prodotto righe per colonne

Definizione

Siano $m, n, p \in \mathbb{N}_0$, $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ e $B = (b_{jk}) \in \mathbb{R}^{n\times p}$.
Definiamo il *prodotto* (righe per colonne) di A per B come la matrice $(c_{ik}) \in \mathbb{R}^{m\times p}$ data da

$$c_{ik} := \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}^k \qquad \forall i \in \{1, \dots, m\}, k \in \{1, \dots, p\}$$

(più semplicemente $c_{ik} = a_{i1}b_{1k} + \cdots + a_{in}b_{nk}$). Tale prodotto sarà denotato con AB.

Non commutatività del prodotto righe per colonne

Esempio

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Abbiamo

$$AB = \begin{pmatrix} 14 & 15 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 22 \end{pmatrix}$$

Quindi

$$AB \neq BA.$$

Questo esempio mostra che il prodotto di matrici non ha la proprietà commutativa. D'altra parte, come ulteriore esempio, possiamo osservare che se A è una matrice di tipo 3×2 e B è una matrice di tipo 2×4, allora il prodotto AB è definito, mentre il prodotto BA non è definito.

Prodotto righe per colonne

Naturalmente, in casi particolari può succedere che un prodotto AB sia uguale a BA, ma questo avviene molto raramente.
Per fortuna il prodotto di matrici, anche se non è commutativo, ha comunque altre utili proprietà.

Proposizione

Siano A e A' matrici di tipo $m \times n$, siano B e B' matrici di tipo $n \times p$, sia C una matrice di tipo $p \times q$ e sia h un numero reale. Si ha

1. $A(B + B') = AB + AB'$;
2. $(A + A')B = AB + A'B$;
3. $(AB)C = A(BC)$;
4. $(hA)B = h(AB) = A(hB)$.

Tralasciamo per ora la dimostrazione.

Matrice identica

Ricordiamo che una matrice *quadrata di ordine n* è semplicemente una matrice di tipo $n \times n$.

Definizione

Sia A la matrice quadrata di ordine n data da

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} .$$

Tale matrice si dice *matrice identica* di ordine n, e si indica generalmente con I_n (o a volte anche solo con I). I suoi termini si indicano spesso con δ_{ij} (o δ_i^j), e vengono detti *simboli di Kronecker*.

Quindi il simbolo di Kronecker δ_{ij} indica semplicemente il numero 1 se $i = j$, o il numero 0 se $i \neq j$.

Matrice identica

La matrice identica ha la seguente importante proprietà.

Proposizione

Si ha:

- $\forall A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \qquad AI_n = A,$
- $\forall B \in \mathbb{R}^{n \times p}, \qquad I_n B = B.$

Dimostrazione.
Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$.
Poniamo $C := (c_{ik}) := AI_n$ e dimostriamo che $C = A$.
Per definizione di prodotto righe per colonne, C è una matrice di tipo $m \times n$ (come A) e per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}, k \in \{1, \ldots, n\}$ si ha

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\delta_{jk} \ .$$

Matrice identica

In questa somma l'unico δ_{jk} diverso da 0 è quello con $j = k$, quindi $c_{ik} = a_{ik}\delta_{kk} = a_{ik}$ (perché $\delta_{kk} = 1$). Avendo verificato che per ogni $i \in \{1, \ldots, m\}, k \in \{1, \ldots, n\}$ abbiamo $c_{ik} = a_{ik}$, concludiamo che $C = A$, come volevamo.
Poniamo poi $D := (d_{ik}) := I_n B$ e dimostriamo che $D = B$. Per definizione di prodotto righe per colonne, D è una matrice di tipo $n \times p$ (come B) e per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \{1, \ldots, p\}$ si ha

$$d_{ik} = \sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} b_{jk} \ .$$

In questa somma l'unico δ_{ij} diverso da 0 è quello con $i = j$, quindi $d_{ik} = \delta_{ii} b_{ik} = b_{ik}$ (perché $\delta_{ii} = 1$). Avendo verificato che per ogni $i \in \{1, \ldots, n\}, k \in \{1, \ldots, p\}$ abbiamo $c_{ik} = b_{ik}$, concludiamo che $D = B$, come volevamo. $\square$

Matrici antisimmetriche

Ricordiamo che A^{t} indica la matrice trasposta di una matrice A e che A è simmetrica quando $A = A^{\mathrm{t}}$. Per matrici sui reali si può definire anche la seguente nozione.

Definizione

Una matrice A sui reali si dice *antisimmetrica* se

$$A = -A^{\mathrm{t}} \ .$$

Matrici antisimmetriche

Osservazione

Una matrice antisimmetrica deve essere per forza quadrata. Una matrice quadrata di ordine n è antisimmetrica se e solo se si ha

$$a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j \in \{1, \ldots, n\} \ .$$

In particolare, per una matrice antisimmetrica (sui reali) dobbiamo avere che $a_{ii} = -a_{ii}$, quindi i termini del tipo a_{ii} devono essere tutti nulli.

Esempio

La matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 & 5 \\ -2 & -4 & 0 & 6 \\ -3 & -5 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

è antisimmetrica.

Permutazioni

Definizione

Sia X un insieme. Una *permutazione* su X è un'applicazione biettiva

$$X \to X.$$

Definizione

Sia σ una permutazione dell'insieme $\{1, \dots, n\}$ e siano $i, j \in \{1, \dots, n\}$ indici tali che

$$i < j \quad \text{e} \quad \sigma(i) > \sigma(j).$$

Allora la coppia (i, j) sarà detta una *inversione* in σ. Definiamo poi il *segno* di σ, come il numero 1 oppure -1, a seconda che il numero delle inversioni in σ sia pari oppure dispari. Il segno di σ sarà denotato con ϵ_σ.

Permutazioni

Esempio

Le inversioni della permutazione di $\{1, 2, 3, 4\}$ definita da

$$\begin{aligned} 1 &\mapsto 3\ , \\ 2 &\mapsto 4\ , \\ 3 &\mapsto 2\ , \\ 4 &\mapsto 1\ . \end{aligned}$$

sono $(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4), (3, 4)$. Dunque il segno di questa permutazione è -1.

Determinante

Definizione

Sia A una matrice quadrata di ordine n sui reali. Indicato con S_n l'insieme di tutte le permutazioni su $\{1, \ldots, n\}$, definiamo il *determinante* di A come il numero

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_n} \epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$$

cioè la somma di tutti i possibili prodotti $\epsilon_\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, con $\sigma \in S_n$. Per indicare il determinante di A conserveremo la notazione $|A|$; a volte si usa anche la notazione $\det A$. Se la matrice è scritta per esteso o nella forma (a_{ij}), allora nella notazione per il determinante di solito si omettono le parentesi tonde (ad esempio, si scrive $|a_{ij}|$).

Determinante

Esempio

Il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

è dato da

$$a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} \ .$$

Il determinante di una matrice di ordine due è

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ .$$

Il determinante di una matrice di ordine 1 è semplicemente uguale all'unico termine della matrice.

Determinante

Esempio

Siano

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si ha

$$|A| = 1\,, \qquad |B| = 0, \qquad |A+B| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3\,.$$

Quindi

$$|A+B| \neq |A| + |B|\,.$$

Naturalmente, in alcuni casi il determinante di una somma può essere uguale alla somma dei determinanti, ma questo capita molto raramente. Per fortuna il determinante, anche se non è “compatibile” con la somma, ha molte importanti proprietà. Prima di esporle, stabiliremo prima (nei prossimi paragrafi) un’utile formula per il calcolo del determinante.

Sottomatrici

Definizione

Sia A una matrice di tipo $m \times n$, sia I un sottoinsieme di $\{1, \ldots, m\}$ e sia J un sottoinsieme di $\{1, \ldots, n\}$. Possiamo assumere

$$I = \{i_1, \ldots, i_r\}, \text{ con } i_1 < i_2 < \cdots < i_r$$

e

$$J = \{j_1, \ldots, j_s\}, \text{ con } j_1 < j_2 < \cdots < j_s.$$

Definiamo la *sottomatrice* di A individuata dagli insiemi di indici I, J come la matrice B di tipo $r \times s$ tale che

$$b_{hk} = a_{i_h j_k} \quad \forall h \in \{1, \ldots, r\}, \forall k \in \{1, \ldots, s\}.$$

Tale matrice sarà denotata con

$$A_{I,J} \ .$$

Sottomatrici

Esempio

Sia

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 0 & -3 & 2 & -2 & -1 \end{pmatrix},$$

$I = \{2, 4\}$, $J = \{2, 3, 5\}$. La sottomatrice individuata da I e J è

$$A_{I,J} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 5 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Sottomatrici

In maniera meno precisa ma più intuitiva, possiamo dire che la sottomatrice $A_{I,J}$ si ottiene cancellando tutte le righe eccetto $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ e tutte le colonne eccetto $\mathbf{a}^{j_1}, \dots, \mathbf{a}^{j_s}$. O anche, si può dire che $A_{I,J}$ è formata dai quei termini che sono "all'incrocio" delle righe $\mathbf{a}_{i_1}, \dots, \mathbf{a}_{i_r}$ e delle colonne $\mathbf{a}^{j_1}, \dots, \mathbf{a}^{j_s}$.

Minori

Definizione

Sia A una matrice sui reali. Un *minore* di A è il determinante di una qualunque sottomatrice quadrata di A.

Talvolta per abuso di linguaggio ci si riferisce al minore volendo parlare della sottomatrice; ad esempio, si dice "minore di ordine h" per significare che il minore è il determinante di una sottomatrice di ordine h.

Minori

Esempio

I minori di ordine 2 della matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

sono

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -3 \qquad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -12 \qquad \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15.$$

I minori di ordine 1 sono dati dai singoli termini della matrice.