Modellistica e Simulazione

Sistemi elettrici ed elettromeccanici

Appunti delle lezioni del corso

nell'a.a. 2017/2018

III. MODELLISTICA DI SISTEMI ELETTRICI

In analogia a quanto fatto per i sistemi meccanici, in questo capitolo considereremo sistemi elettrici discreti o, come sono più frequentemente detti, a parametri concentrati. Tali sistemi sono costituiti da un insieme di componenti elementari tra loro variamente interconnessi. I componenti elettrici elementari possono essere divisi in utilizzatori e generatori. Gli utilizzatori sono di tre tipi: elementi resistivi o resistori, elementi capacitivi o condensatori, elementi induttivi o induttori. Nel seguito vengono date le relazioni costitutive che descrivono il comportamento causa-effetto di tali componenti. I generatori vengono invece divisi in generatori di tensione e generatori di corrente. Essi costituiscono le cosiddette alimentazioni del sistema elettrico reale, e forniscono le grandezze di ingresso del sistema astratto orientato.

III.1 Componenti elementari dei sistemi elettrici

Nella presentazione dei componenti elementari dei sistemi elettrici, per fornire le relazioni tra tensioni e correnti adotteremo la cosiddetta convenzione dell'utilizzatore: la corrente circolante in un utilizzatore è positiva se circola nel verso che va dal terminale assunto come positivo (indicato con una freccia) al terminale negativo; dualmente, con riferimento alla tensione ai capi di un utilizzatore, assumeremo come terminale positivo quello in cui la corrente è entrante.

Resistore. Il resistore è un componente elettrico ideale (privo di induttanza e capacità) in cui, tra la tensione *v(t)* ai suoi capi e la corrente *i(t)* in esso circolante nella direzione che va dal terminale positivo a quello negativo (vedi Figura 3.1), sussiste una relazione di proporzionalità.

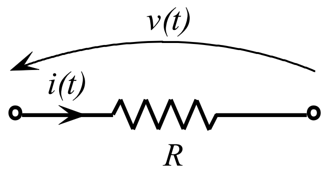

Fig.3.1

La relazione di proporzionalità tra tensione e corrente è data dalla legge di Ohm:

$$v(t) = Ri(t) \tag{3.1}$$

dove *R* è detta resistenza del resistore e si misura inOhm:

$$\text{ohm} = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampere}} \qquad \left(\Omega = \frac{\text{V}}{\text{A}}\right)$$

Un resistore, come risulta dalla (3.1), è un sistema istantaneo, ossia privo di memoria: esso, infatti, qunado è attraversato da corrente non immagazzina energia, anzi la dissipa sotto forma di calore per effetto Joule.

Condensatore. Il condensatore è un componente elettrico ideale (privo di resistenza e induttanza) in cui, tra la tensione *v(t)* ai suoi capi e la corrente *i(t)* in esso circolante nella direzione che va dal terminale positivo a quello negativo (vedi Figura 3.2), sussiste una relazione del tipo:

$$i(t) = C\frac{dv(t)}{dt} \tag{3.2}$$

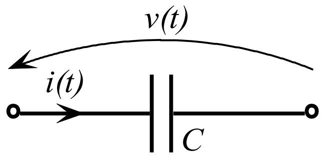

Fig.3.2

C è detta capacità del condensatore e si misura in Farad:

$$\text{Farad} = \frac{\text{Ampere}}{\text{Volt/s}} = \frac{\text{Ampere}\cdot\text{s}}{\text{Volt}} = \frac{\text{Coulomb}}{\text{Volt}} \qquad \left(\text{F} = \frac{\text{A}\cdot\text{s}}{\text{V}} = \frac{C}{\text{V}}\right)$$

Poiché il Farad indica un valore di capacità estremamente elevata, solitamente si ricorre a suoi sottomultipli quali il millifarad (1mF=10^{-3}F), il microfarad (1μF=10^{-6}F), il nanofarad (1nF=10^{-6}F), il picofarad (1pF=10^{-12}F).

Il condensatore è un sistema dinamico; infatti, come risulta dalla (3.2), la tensione ai suoi capi in un istante t ha memoria del suo valore precedente. La memoria di tale sistema si spiega con il fatto che il condensatore è un componente in grado di immagazzinare energia sotto forma di energia elettrostatica. Poiché tale energia, in un generico istante t, vale $\frac{1}{2}Cv(t)^2$, una sua misura è fornita direttamente dalla tensione ai capi del condensatore, che può pertanto essere assunta come variabile di stato nella descrizione i-s-u di tale componente.

Induttore. L'induttore è un componente elettrico ideale (privo di resistenza e capacità) in cui, tra la tensione *v(t)* ai suoi capi e la corrente *i(t)* in esso circolante nella direzione che va dal dal terminale positivo a quello negativo (vedi Figura 3.3), sussiste una relazione del tipo:

$$v(t) = L\frac{di(t)}{dt} \tag{3.3}$$

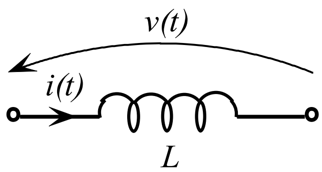

Fig.3.3

L è detta induttanza dell'induttore e si misura in Henry:

$$\text{Henry} = \frac{\text{Volt}}{\text{Ampere/s}} = \frac{\text{Volt}\cdot\text{s}}{\text{Ampere}} = \frac{\text{Weber}}{\text{Ampere}} \qquad \left(\text{H} = \frac{\text{V}\cdot\text{s}}{\text{A}} = \frac{\text{Wb}}{\text{A}}\right)$$

Anche per l'Henry si ricorre a suoi sottomultipli quali il millihenry (1mH=10^{-3}H).

L'induttore è un sistema dinamico; infatti, come risulta dalla (3.3), la corrente in esso circolante in un istante t ha memoria del suo valore precedente. La memoria di tale sistema si spiega con il fatto che l'induttore è un componente in grado di immagazzinare energia sotto forma di energia elettromagnetica. Poiché tale energia, in un generico istante *t*, vale $\frac{1}{2}Li(t)^2$, una sua misura è fornita direttamente dalla corrente circolante nell'induttore, che può pertanto essere assunta come variabile di stato nella descrizione i-s-u di tale componente.

Generatore ideale di tensione. Il generatore di tensione è un componente elettrico ideale che genera ai suoi capi una tensione, che può essere anche variante nel tempo, il cui valore è indipendente dalla corrente che in esso circola. La rappresentazione schematica di un generatore di tensione è mostrata in Figura 3.4. In esso il segno + indica il terminale morsetto positivo.

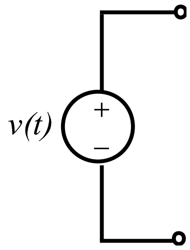

Fig.3.4

Generatore ideale di corrente. Il generatore di corrente è un componente elettrico ideale che fa circolare, nel ramo in cui è inserito, una corrente, che può essere anche variante nel tempo, il cui valore è indipendente dalle condizioni di carico e di funzionamento della parte rimanente del circuito. La rappresentazione schematica di un generatore di corrente è mostrata in Figura 3.5. In esso la freccia indica il verso di circolazione della corrente del generatore.

La resistenza interna di un generatore ideale di tensione è zero.

Generatore ideale di tensione. Il generatore di tensione è un componente elettrico ideale che genera ai suoi capi una tensione, che può essere anche variante nel tempo, il cui valore è indipendente dalla corrente che in esso circola. La rappresentazione schematica di un generatore di tensione è mostrata in Figura 3.4. In esso la punta della freccia indica il morsetto assunto come positivo: quando la tensione è positiva, il potenziale elettrico di tale morsetto è maggiore di quello dell'altro.

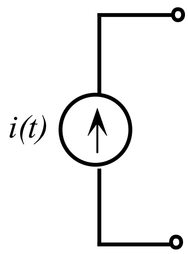

Fig.3.5

La resistenza interna di un generatore ideale di tensione è infinito.

III.2 Equazioni dei sistemi elettrici

Le leggi fisiche utilizzate per la scrittura delle equazioni del comportamento dinamico di un sistema elettrico sono i principi di Kirchhoff. Nel richiamare tali principi assumeremo note le definizioni di nodo, ramo e maglia.

Primo principio di Kirchhoff. Consideriamo un generico circuito e supponiamo di aver fissato, in maniera del tutto arbitraria, un verso positivo per la corrente che circola in ciascun ramo. In un qualsiasi istante *t* la somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è zero.

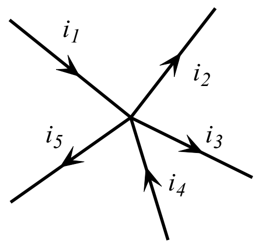

Fig.3.6

Pertanto, se conveniamo di assumere positive le correnti entranti in un nodo, con riferimento alla Figura 3.6 il primo principio di Kirchhoff stabilisce che:

$$i_1(t) - i_2(t) - i_3(t) + i_4(t) - i_5(t) = 0$$

Secondo principio di Kirchhoff. Consideriamo un generico circuito e, con riferimento ad una generica sua maglia, supponiamo di aver fissato, in maniera del tutto arbitraria, un verso positivo delle tensioni ai capi di ogni ramo. Fissato allora un verso di percorrenza nella maglia, in un qualsiasi istante t la somma algebrica delle tensioni ai capi dei vari componenti che si incontrano percorrendo la maglia nel verso prefissato è zero.

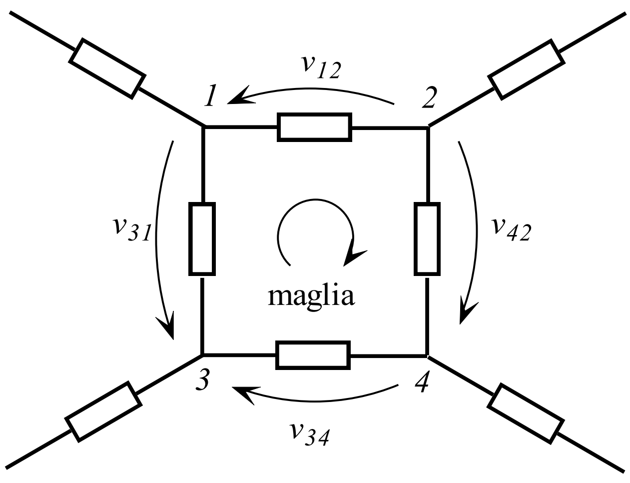

Fig.3.7

Pertanto, con riferimento alle tensioni indicate in Figura 3.7 e al verso di percorrenza della maglia, il secondo principio di Kirchhoff stabilisce che:

$$v_{12} - v_{42} - v_{43} + v_{31} = 0$$

III.3 Modelli i-s-u di sistemi elettrici

Dato un circuito elettrico, per la scrittura di un modello i-s-u, la prima operazione da effettuare consiste nella scelta delle variabili di stato. Queste, sulla base di quanto precedentemente detto, nella quasi totalità dei casi, possono essere assunte coincidenti con le tensioni ai capi dei condensatori e le correnti negli induttori, fatta eccezione per quei componenti in cui tali grandezze non siano imposte da qualche generatore di tensione o di corrente. Supponiamo di indicare con n il numero di tali variabili di stato.

Successivamente si passa alla scrittura delle relazioni fisiche tra tali grandezze, relazioni fornite dai principi di Kirchhoff e dalle relazioni costitutive dei vari componenti. Per la scrittura delle leggi di Kirchhoff, spesso è necessario introdurre, oltre alle variabili di stato, altre grandezze di comodo, come ad esempio correnti che circolano in alcuni resistori, oppure tensioni o correnti di interesse nello studio (variabili di uscita). Poiché ogni aggiunta di una variabile implica la scrittura di un'equazione in più, conviene cercare di ridurre il numero di tali variabili aggiuntive cercando di esprimerle direttamente in termini delle variabili di stato sfruttando sia le relazioni costitutive relative ai vari componenti sia le ben note proprietà relative ai collegamenti in serie e in parallelo, ossia "in componenti elettrici collegati in serie circola la stessa corrente", "ai capi di componenti elettrici collegati in parallelo vi è la stessa tensione". Supponiamo di indicare con z il numero di variabili aggiuntive.

A questo punto si tratta di scrivere $n+z$ equazioni indipendenti. Allo scopo di evitare errori, conviene ricordare che:

- in un sistema con N nodi, comunque si scelgano N-1 nodi si ottengono altrettante equazioni ai nodi tra loro indipendenti;
- ogni equazione aggiuntiva ad una maglia è indipendente dalle altre equazioni alle maglie purché in tale maglia vi sia almeno un ramo che non sia presente nelle precedenti.

Delle $n+z$ equazioni scritte, z saranno utilizzate per esprimere le variabili di comodo in funzione delle variabili di stato e delle loro derivate; le rimanenti, dopo aver effettuato le sostituzioni, dovranno essere manipolate per pervenire alla rappresentazione i-s-u cercata.

Esempio 3.1 Scrivere un modello i-s-u del circuito in Figura 3.8a che consenta di studiare l'andamento della tensione ai capi dell'induttanza L.

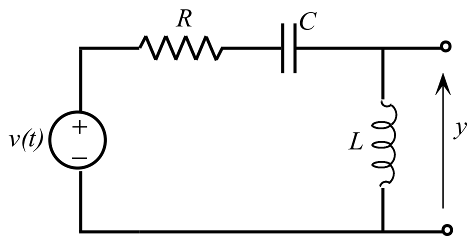

Fig.3.8a

In questo caso si può cominciare con l'osservare quanto segue:

- tutti i componenti del circuito sono disposti in serie, per cui in essi circola la stessa corrente;
- per la descrizione del sistema si utilizzeranno due variabili di stato: la tensione ai capi del condensatore e la corrente nell'induttore;
- per la scrittura delle equazioni con i principi di Kirchhoff conviene utilizzare le seguenti convenzioni:
    - scegliere come verso positivo per la corrente quello in accordo con la tensione di uscita ai capi dell'induttore (vedi Fig.3.8b);

- scegliere come verso positivo per la tensione ai capi del condensatore quello in accordo con la corrente in esso circolante, coincidente con quello della corrente nell'induttore.

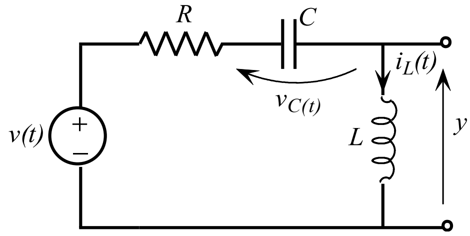

Fig.3.8b

Scegliendo come verso di percorrenza della maglia quello orario, e posto:

$$u(t) = v(t); \quad x_1(t) = v_C(t); \quad x_2(t) = i_L(t)$$

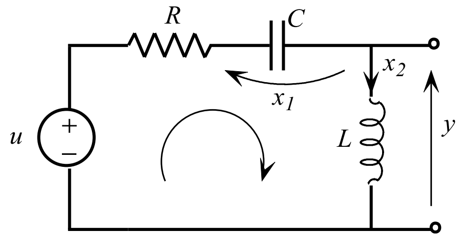

Fig.3.8c

tenendo presente che si hanno 3 variabili, di cui due di stato e una di uscita, saranno necessarie 3 equazioni. Dalla Figura 3.8c si ha: una può essere fornita dal secondo principio di Kirchoff , mentre altre due risultano di scrittura immediata:

- Secondo principio di Kirchhoff: $Rx_2 + x_1 + L\dot{x}_2 - u = 0$

- Condizione derivante dall'essere L e C in serie: $C\dot{x}_1 = x_2$

- Relazione costitutiva dell'induttore: $y = L\dot{x}_2$

Con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\dot{x}_1(t) = \frac{1}{C}x_2(t)$$
$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{L}x_1(t) - \frac{R}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}u(t)$$
$$y(t) = -x_1(t) - Rx_2(t) + u(t)$$

Come si vede, il sistema è lineare e stazionario. In forma matriciale si scrive:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} u$$
$$y = \begin{pmatrix} -1 & -R \end{pmatrix} x + (1)u$$

Esempio 3.2 Scrivere un modello i-s-u del circuito in Figura 3.9a che consenta di studiare l'andamento della corrente nella resistenza *R*.

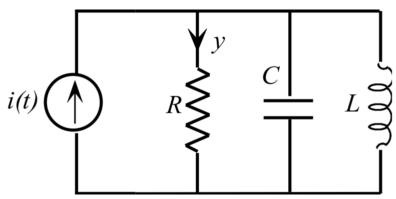

Fig.3.9a

Con la scelta delle variabili di stato indicata in Figura 3.9b, con considerazioni analoghe a quelle svolte nell'esempio 3.1, si ha:

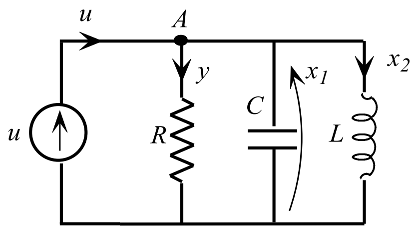

Fig.3.9b

- Primo principio di Kirchhoff al nodo A: $u = \frac{x_1}{R} + C\dot{x}_1 + x_2$

- Condizione derivante dall'essere *L* e *C* in parallelo: $L\dot{x}_2 = x_1$

- Condizione derivante dall'essere *R* e *C* in parallelo: $Ry = x_1$

Con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -\frac{1}{RC}x_1(t) - \frac{1}{C}x_2(t) + \frac{1}{C}u(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \frac{1}{L}x_1(t) \\
y(t) &= \frac{1}{R}x_1(t)
\end{aligned}$$

Come si vede, il sistema è lineare e stazionario. In forma matriciale si scrive:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} & 0 \end{pmatrix} x + (0)u$$

Esempio 3.3 Scrivere un modello i-s-u del circuito in Figura 3.10a che consenta di studiare l'andamento della tensione ai capi della resistenza R_2.

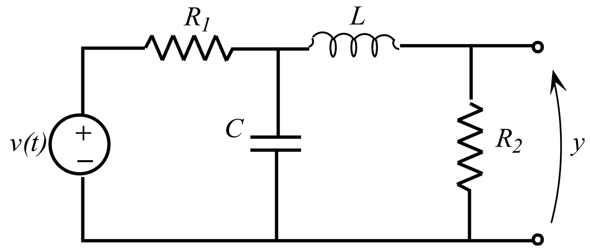

Fig.3.10a

Con la scelta delle variabili di stato indicata in Figura 3.10b, e tenendo presente che per la scrittura comoda del primo principio di Kirchhoff al nodo *A* conviene introdurre come variabile di comodo la corrente *z(t)* circolante nella resistenza R_1, si ha:

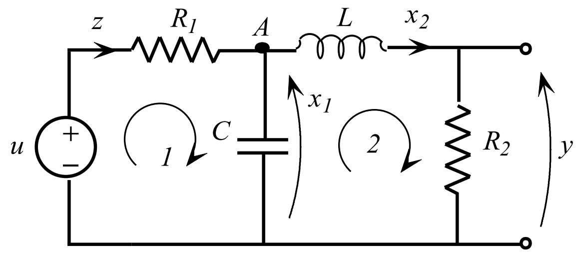

Fig.3.10b

- Primo principio di Kirchhoff al nodo A: $z = C\dot{x}_1 + x_2$

- Secondo principio di Kirchhoff alla maglia 1: $u = R_1 z + x_1$

- Secondo principio di Kirchhoff alla maglia 2: $x_1 = L\dot{x}_2 + y$

- Legge di Ohm alla resistenza R_2: $y = R_2 x_2$

Si noti che, allo scopo di evitare l'introduzione della corrente nel condensatore tra le incognite del sistema, la si è espressa direttamente come $C\dot{x}_1$. Ricavando *z* dalla prima equazione e sostituendo nelle altre, con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = -\frac{1}{R_1C}x_1(t) - \frac{1}{C}x_2(t) + \frac{1}{R_1C}u(t)\\
&\dot{x}_2(t) = \frac{1}{L}x_1(t) - \frac{R_2}{L}x_2(t)\\
&y(t) = R_2x_2(t)
\end{aligned}$$

Come si vede, il sistema è lineare e stazionario. In forma matriciale si scrive:

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1C} \\ 0 \end{pmatrix} u\\
y &= \begin{pmatrix} 0 & R_2 \end{pmatrix} x + (0)u
\end{aligned}$$

Esempio 3.4 Scrivere un modello i-s-u del circuito in Figura 3.11a che consenta di studiare l'andamento della corrente nella resistenza R_3.

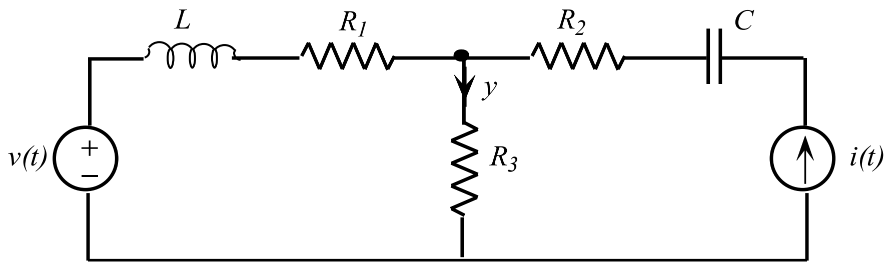

Fig.3.11a

Con la scelta delle variabili di stato indicata in Figura 3.11b si ha:

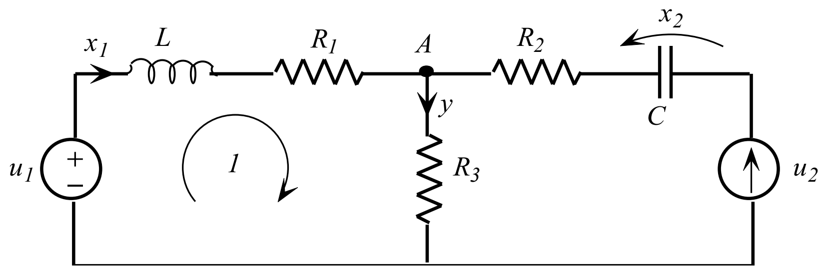

Fig.3.11b

- Primo principio di Kirchhoff al nodo A: $x_1 + u_2 = y$

- Secondo principio di Kirchhoff alla maglia 1: $u_1 = R_1 x_1 + L\dot{x}_1 + R_3 y$

- Condizione derivante dall'essere C in serie al g.c.: $C\dot{x}_2 = -u_2$

Ricavando y dalla prima e sostituendo nelle altre, con semplici manipolazioni si ottiene:

$$\dot{x}_1(t) = -\frac{(R_1 + R_3)}{L} x_1(t) + \frac{1}{L} u_1(t) - \frac{R_3}{L} u_2(t)$$

$$\dot{x}_2(t) = -\frac{1}{C} u_2(t)$$

$$y(t) = x_1 + u_2$$

Come si vede, il sistema è lineare e stazionario. In forma matriciale si scrive:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{R_1 + R_3}{L} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} & -\frac{R_3}{L} \\ 0 & -\frac{1}{C} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} u$$

IV. MODELLISTICA DI SISTEMI ELETTROMECCANICI

Un sistema elettromeccanico è un sistema in grado di trasformare potenza elettrica in potenza meccanica (motore) o viceversa (generatore).

Tra i vari sistemi elettromeccanici, quelli probabilmente più utilizzati in pratica sono i motori elettrici che convertono energia elettrica in energia meccanica di rotazione, e che pertanto vengono utilizzati per la movimentazione di carichi meccanici, e quindi largamente utilizzati nei sistemi di controllo per l'attuazione dei comandi di movimentazione. Vi sono diversi tipi di motori elettrici basati su diversi principi di funzionamento e dotati di caratteristiche diverse in termini di massima velocità di rotazione, massima coppia, e così via. L'argomento sarà trattato in dettaglio nel corso di Macchine Elettriche; in questa sede ci limiteremo a considerare il motore elettrico in corrente continua e a descriverne solo il principio di funzionamento allo scopo di ricavarne un modello matematico i-s-u.

IV.1 Motore elettrico in corrente continua

Il principio di funzionamento di un motore elettrico in corrente continua è basato su due leggi fisiche. La prima, diretta conseguenza della legge di Lorentz, dice che su un conduttore rettilineo di lunghezza ℓ percorso da una corrente i e immerso in un campo di induzione magnetica B agisce una forza meccanica F data da:

$$F = i\vec{\ell} \times \vec{B} \tag{4.1}$$

dove $\vec{\ell}$ è il vettore avente modulo ℓ, direzione e verso della corrente. Tale forza, pertanto, ha direzione ortogonale al piano formato da $\vec{\ell}$ e $\vec{B}$, verso ricavato con la regola del cavatappi, e modulo pari a:

$$F = i\ell B \sin \vartheta \tag{4.2}$$

dove ϑ è l'angolo tra il conduttore e il campo magnetico. In Figura 4.1 è riportata la forza agente nel caso particolare in cui il conduttore è ortogonale al campo.

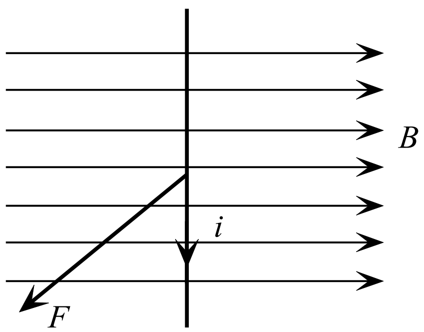

Fig. 4.1

La seconda, diretta conseguenza della legge di Lenz, dice che allorché un conduttore rettilineo di lunghezza ℓ si muove con velocità $\vec{v}$ in un campo magnetico di induzione $\vec{B}$, ai suoi capi si manifesta una forza elettromotrice indotta e il cui valore è dato da:

$$e = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{\ell} \tag{4.3}$$

dove il verso di ℓ è quello assunto come positivo per la determinazione della f.e.m. e.

L'effetto di tale forza elettromotrice è tale che, se il conduttore fosse chiuso su un circuito, essa farebbe circolare una corrente che, a sua volta, per la (4.1) svilupperebbe una forza meccanica che si opporrebbe al moto del conduttore. In maniera duale, se il moto del conduttore fosse dovuto ad una corrente in esso circolante, la forza elettromotrice indotta si opporrebbe a quella che genera la corrente. Per tale motivo la f.e.m. e dovuta alla (4.3) è detta *forza controelettromotrice (f.c.e.m.).* In Figura 4.2 è riportato il caso in cui la velocità, il campo e il conduttore sono tra loro ortogonali e costituiscono una terna levogira.

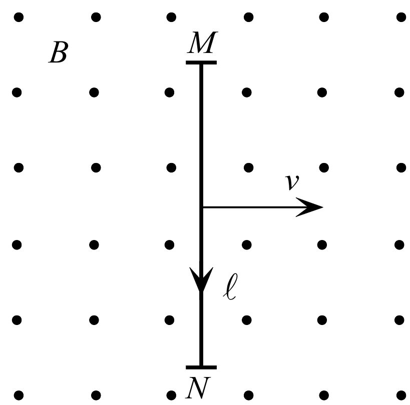

Fig. 4.2

In tal caso la (4.3) diventa:

$$e = V_{NM} = vB\ell \tag{4.4}$$

Come si può notare, essendo tale f.e.m. positiva tra N e M, chiudendo il conduttore su un circuito esterno farebbe circolare una corrente nel verso che va da M a N; la forza prodotta per la (4.1) da tale corrente avrebbe verso opposto a v.

Sulla base di tali leggi, supponiamo di disporre, nello spazio compreso tra i poli di un magnete permanente, una spira rettangolare libera di ruotare intorno al proprio asse come mostrato in Figura 4.3.

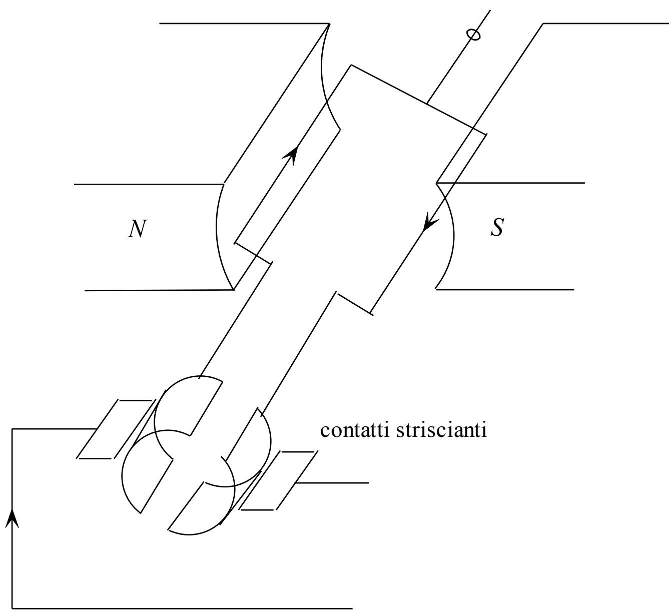

Fig. 4.3

Connettendo gli estremi di tale spira ad un dispositivo di commutazione collegato ad un circuito esterno in cui viene fatta circolare corrente, si ha che la spira tenderà a ruotare fino a disporre il suo piano perpendicolarmente al campo magnetico (vedi Figura 4.4) e con corrente circolante in maniera tale che le forze agenti sui due lati lunghi della spira siano orientate verso l'esterno della spira (posizione di equilibrio stabile).

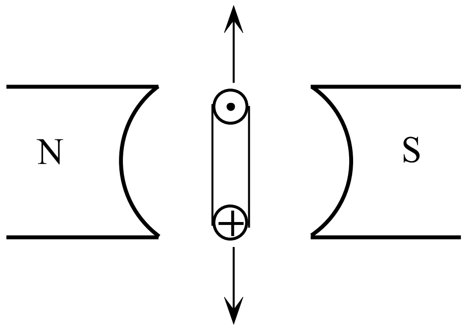

Fig. 4.4

Se, raggiunta tale configurazione, il commutatore inverte la corrente nella spira, le forze cambiano verso e la spira, superato per inerzia il punto morto in cui le forze sono uguali ed opposte, continuerà a ruotare.

In un generico istante t la coppia motrice che fa ruotare la spira è proporzionale, istante per istante, alla corrente che circola e varia al variare della posizione angolare della spira (vedi Figura 4.5).

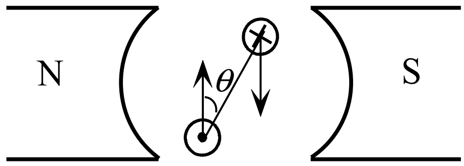

Fig. 4.5

Allo stesso modo la f.c.e.m. che si manifesta ai capi della spira varia al variare della velocità di rotazione della spira stessa.

Per eliminare gli inconvenienti derivanti dalla variazione di coppia e quindi di velocità angolare, si ricorre ad un sistema costituito da un unico avvolgimento formante più spire angolarmente distribuite intorno ad un cilindretto, così da avere una situazione del tipo mostrata in Figura 4.6.

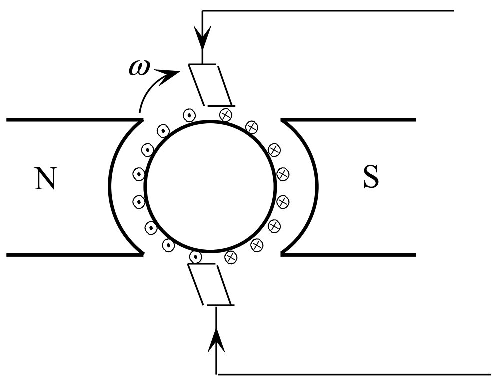

Fig. 4.6

Per tale sistema si ha:

$$C_m = k_c i \tag{4.5a}$$

$$e = k_v \omega \tag{4.5b}$$

dove:

C_m = coppia motrice agente sul cilindretto

k_c, k_v = costanti di proporzionalità

i = correnti nelle spire

e = forza controelettromotrice

ω = velocità angolare del cilindretto

In tale sistema il magnete permanente e il supporto esterno a cui il magnete è fissato prendono il nome di *statore* o *equipaggio fisso*; il tamburo (cilindretto) centrale e le spire su di esso avvolte prendono il nome di *rotore* o *equipaggio mobile*. A tale rotore è collegato un alberino che ruota con esso e che è detto *albero motore*. I contatti striscianti si chiamano *spazzole*. Il circuito elettrico costituito dalle spire, dai contatti striscianti e dai conduttori di collegamento esterni è detto *circuito di armatura.*

Nel funzionamento usuale il motore in corrente continua è comandato da un generatore di tensione che alimenta il circuito d'armatura: variando la tensione di comando viene fatta variare la velocità di rotazione.

Le equazioni di funzionamento del motore sono costituite da un'equazione di equilibrio elettrico e una di equilibrio meccanico. Nell'equazione di equilibrio elettrico bisogna portare in conto la resistenza e l'induttanza di armatura; nell'equazione di equilibrio meccanico bisogna portare in conto l'inerzia e il coefficiente di attrito dell'equipaggio mobile (rotore + albero motore + supporti esterni) del motore, oltre alle caratteristiche del carico meccanico. Questo, nel seguito, è schematizzato semplicemente come una coppia resistente, ma, in generale, potrebbe comprendere anche un momento di inerzia e una coppia di attrito viscoso. La schematizzazione grafica di un motore elettrico in c.c. è mostrata in Figura 4.7.

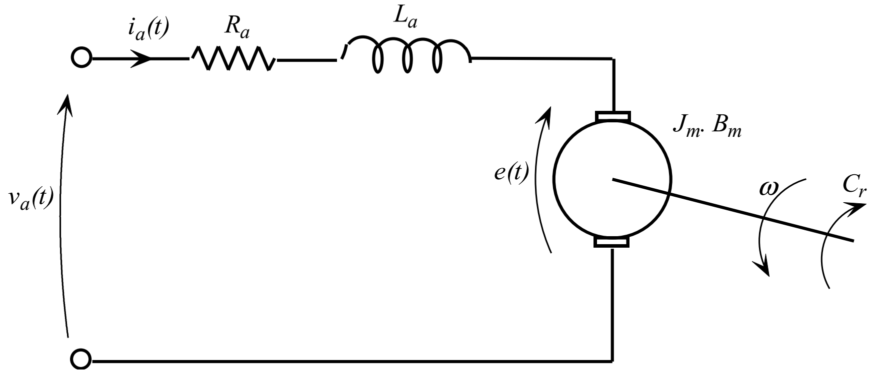

Fig. 4.7

In essa:

R_a = resistenza d'armatura

L_a = induttanza d'armatura

v_a = tensione d'armatura

i_a = corrente d'armatura

e = forza controelettromotrice

J_m , B_m = momento d'inerzia e coefficiente d'attrito del motore

ω = velocità angolare dell'albero motore

C_r = coppia resistente del carico

Si ha allora:

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e \qquad \text{(equilibrio elettrico)}$$

$$C_m = J_m \frac{d\omega}{dt} + B_m \omega + C_r \qquad \text{(equilibrio meccanico)}$$

In virtù delle (4.5) risulta:

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + k_v \omega \tag{4.6a}$$

$$k_c i_a = J_m \frac{d\omega}{dt} + B_m \omega + C_r \tag{4.6b}$$

Per ottenere una rappresentazione i-s-u, supponendo di essere interessati allo studio della velocità angolare, basta porre:

$$u_1 = v_a \qquad u_2 = C_r$$
$$x_1 = i_a \qquad x_2 = \omega$$
$$y = \omega$$

ottenendo:

$$u_1 = R_a x_1 + L_a \dot{x}_1 + k_v x_2$$

$$k_c x_1 = J_m \dot{x}_2 + B_m x_2 + u_2$$

da cui:

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_a}{L_a} x_1 - \frac{k_v}{L_a} x_2 + \frac{1}{L_a} u_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{k_c}{J_m} x_1 - \frac{B_m}{J_m} x_2 + \frac{1}{J_m} u_2$$

$$y = x_2$$

In forma matriciale:

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -\frac{R_a}{L_a} & -\frac{k_v}{L_a} \\ \frac{k_c}{J_m} & -\frac{B_m}{J_m} \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} \frac{1}{L_a} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J_m} \end{pmatrix} u$$

$$y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} u$$