Appunti di Metodi

Rodolfo Figari

22 marzo 2017

Indice

1 Analisi Complessa **5**

1.1 Richiami sui numeri complessi 5

1.1.1 Algebra 5

1.1.2 Geometria 7

1.2 Funzioni olomorfe 12

1.2.1 I polinomi 15

1.2.2 La funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche . 17

1.2.3 La funzione logaritmo 20

1.2.4 Potenze e radici in notazione esponenziale 20

1.3 Teorema e Formula di Cauchy 22

1.3.1 Teorema di Cauchy 23

1.3.2 Formula di Cauchy 30

1.4 Funzioni analitiche 33

1.5 Singolarità isolate e Serie di Laurent 39

1.6 Classificazione delle Singolarità Isolate 40

1.6.1 Il teorema dei residui 42

1.6.2 Calcolo di Integrali 44

A Successioni, serie numeriche e serie di potenze **47**

A.1 Definizioni sulle successioni numeriche a valori reali 47

A.2 Successioni 48

A.3 Serie 48

A.4 Convergenza uniforme 50

A.5 Serie di potenze 50

Capitolo 1

Analisi Complessa

1.1 Richiami sui numeri complessi

1.1.1 Algebra

All'insieme $\mathbb{R}^2$ delle coppie di numeri reali si può dare la struttura di campo[1] introducendo le due seguenti operazioni:

somma $z_1 \equiv (x_1, y_1)$, $z_2 \equiv (x_2, y_2)$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$

$$z_1 + z_2 \equiv (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

prodotto $z_1 \equiv (x_1, y_1)$, $z_2 \equiv (x_2, y_2)$, $x_1, y_1, x_2, y_2 \in \mathbb{R}$

$$z_1 z_2 \equiv (x_1\, x_2 - y_1\, y_2,\ x_1\, y_2 + x_2\, y_1)$$

La commutatività, associatività e la distributività tra le due operazioni di somma e prodotto di numeri complessi sono provate riportandole alle analoghe proprietà valide per i numeri reali. È un utile esercizio provarle

commutatività $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$; $z_1\, z_2 = z_2\, z_1$

associatività $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3 \equiv z_1 + z_2 + z_3$

$z_1\,(z_2\, z_3) = (z_1\, z_2)\, z_3 \equiv z_1\, z_2\, z_3$

distributività $(z_1 + z_2)\, z_3 = z_1\, z_3 + z_2\, z_3$

[1] per la definizione di campo vedi per esempio ([2])

L'elemento neutro per la somma è l'elemento $(0,0)$ ed ogni coppia $z \equiv (x,y)$ ammette uno ed un solo opposto $-z \equiv (-x,-y)$.
L'elemento neutro per il prodotto è l'elemento $(1,0)$ e ogni coppia $z \equiv (x,y)$ diversa da $(0,0)$ ammette uno ed un solo inverso $\dfrac{1}{z} = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, -\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$.
Il campo così costruito verrà indicato con $\mathbb{C}$ e denominato **campo dei numeri complessi**.

L'insieme dei numeri complessi della forma $(x,0)$ è naturalmente isomorfo a $\mathbb{R}$ e viene indicato come il sottoinsieme dei numeri complessi **reali**.
Il sottoinsieme dei numeri complessi della forma $(0,y)$ è analogamente isomorfo ad $\mathbb{R}$ e indicato come il sottoinsieme dei numeri complessi **puramente immaginari**.
Del numero complesso $z \equiv (x,y)$, x verrà chiamata la **parte reale** (spesso indicata con $\operatorname{Re} z$) ed y la **parte immaginaria** (spesso indicata con $\operatorname{Im} z$).

Come è noto la notazione più utilizzata per i numeri complessi è quella che si ottiene introducendo il simbolo $\imath$, **unità immaginaria**

- usando la notazione $z \equiv (x,y) \equiv x + \imath\, y$
- assumendo distributività di questa "somma" rispetto al prodotto
- assumendo la regola $\imath\,\imath = -1$

Il campo dei numeri complessi così costruito non è ordinato (come $\mathbb{R}$).

In $\mathbb{C}$ esiste la soluzione (in effetti le soluzioni) di $z^2 = -1$ essendo

$$(0,1)(0,1) \equiv \imath\,\imath \equiv (-1,0) \equiv -1 = (-\imath)\,(-\imath) = (0,-1)(0,-1)$$

In $\mathbb{C}$ è possibile definire una coniugazione che ad ogni $z = (x,y) \equiv x + \imath y \in \mathbb{C}$ associa il suo **complesso coniugato** $\overline{z} \equiv (x,-y) \equiv x - \imath\, y$ con la proprietà che $\overline{\overline{z}} = z$ (involuzione).

Il **modulo** o **valore assoluto** di un numero complesso $z \equiv (x,y) \equiv x + \imath\, y$ è definito come la radice quadrata positiva di $x^2 + y^2$

$$|z| = \sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{z\,\overline{z}}$$

È facile verificare le seguenti uguaglianze e disuguaglianze

i) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z+\overline{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = \dfrac{z-\overline{z}}{2\,\imath}$

ii) $\overline{(z_1 + z_2)} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

iii) $\overline{z_1\, z_2} = \overline{z_1}\, \overline{z_2}$

iv) $|z_1 z_2| = |z_1|\, |z_2|$

v) $-|z| \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant |z|, \quad -|z| \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant |z|$

vi) $|z_1+z_2|^2 = |z_1|^2+|z_2|^2+2\operatorname{Re}(z_1\overline{z}_2) \leqslant |z_1|^2+|z_2|^2+2|z_1||z_2| = (|z_1|+|z_2|)^2$

vii) $|z_1 + z_2| \geqslant ||z_1| - |z_2||$

La disuguaglianza vi) (**disuguaglianza triangolare**) assicura che il valore assoluto sia una **norma** (ne parleremo estesamente in seguito in un ambito più generale) in $\mathbb{C}$ essendo:

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z| \geqslant 0 \quad \text{e inoltre} \qquad |z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$$

e

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad |z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|$$

con l'uguaglianza verificata solo nel caso in cui $\dfrac{x_1}{x_2} = \dfrac{y_1}{y_2}$ con $z_1 \equiv (x_1, y_1)$ e $z_2 = (x_2, y_2)$.
In $\mathbb{C}$ è quindi definibile una **distanza**

$$\operatorname{dist}(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = |z_2 - z_1| \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$$

che coincide con la distanza euclidea in $\mathbb{R}^2$:

$$\operatorname{dist}[(x_1, y_1) - (x_2, y_2)] = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

È noto che rispetto a questa distanza $\mathbb{R}^2$ e quindi $\mathbb{C}$ è completo: ogni successione di Cauchy in $\mathbb{C}$ è convergente ad uno (ed uno solo) elemento di $\mathbb{C}$.

1.1.2 Geometria

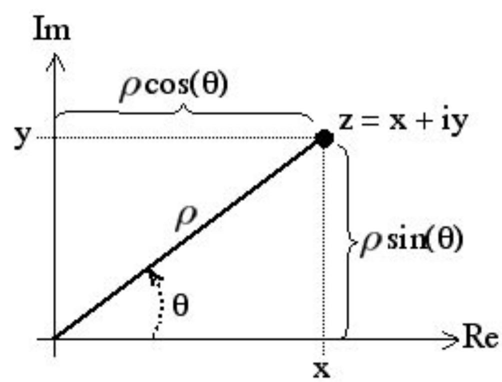
Ogni elemento $z = x + \imath y \in \mathbb{C}$ può essere rappresentato come un punto del piano euclideo di coordinate x, y rispetto ad un sistema di assi cartesiani ortogonali. Il **piano complesso** si riferisce a questa particolare rappresentazione dell'insieme dei numeri complessi.

Ogni numero complesso è rappresentato nel piano complesso da un vettore del piano (il segmento orientato che congiunge l'origine con il punto di coordinate (x, y)). Si noti che il vettore non è "applicato" e non dipende dall'origine scelta (ogni segmento orientato che si ottenga per traslazione parallela rappresenta lo stesso vettore).

La somma di numeri complessi coincide, in questa rappresentazione, con la somma vettoriale (regola del parallelogramma); parte reale e parte immaginaria rispettivamente con le componenti x e y; il valore assoluto con *la lunghezza* del vettore.
La rappresentazione geometrica suggerisce che al numero complesso $z \equiv x + \imath\, y$ possano essere associate le coordinate polari piane del corrispondente vettore: $(x, y) \Longrightarrow (\rho, \theta)$

$$
\begin{aligned}
& x = \rho\, \cos\theta \qquad y = \rho\, \sin\theta \\
& z = \rho(\cos\theta + \imath \sin\theta) \\
& \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \tan\theta = \frac{y}{x}
\end{aligned}
$$

con $0 \leqslant \rho < \infty$, $0 \leqslant \theta < 2\,\pi$. (Si noti che la tangente dell'angolo θ non specifica univocamente l'angolo θ. Anche i segni di x e y sono necessari per individuare univocamente l'angolo).



Se $z_1 \equiv (\rho_1, \theta_1)$ e $z_2 \equiv (\rho_2, \theta_2)$ la regola per il prodotto di due numeri complessi si scrive, nelle nuove coordinate

$$
z_1\, z_2 \equiv \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 \cos\theta_2 - \sin\theta_1 \sin\theta_2) + \imath\, \rho_1\rho_2(\cos\theta_1 \sin\theta_2 + \sin\theta_1 \cos\theta_2)
$$

ovvero

$$z_1\, z_2 = \rho_1 \rho_2 \left[\cos(\theta_1 + \theta_2) + \imath \sin(\theta_1 + \theta_2)\right]$$

dove la somma degli angoli va intesa come "modulo 2π". Il prodotto di due numeri complessi, identificati tramite le loro coordinate polari, si ottiene dunque moltiplicando i moduli per ottenere il modulo del prodotto e sommando gli angoli (modulo 2π) per ottenere la coordinata angolare del prodotto. In particolare se $z_1 = z_2 \equiv z$ si ha

$$z^2 = \rho^2(\cos(2\theta) + \imath \sin(2\theta))$$

e applicando il risultato più volte

$$z^n = \rho^n(\cos(n\theta) + \imath \sin(n\theta)).$$

In particolare per $\rho = 1$ (i numeri complessi del cerchio unitario attorno all'origine) si ottiene la formula di de Moivre

$$(\cos\theta + i \sin\theta)^n = \cos(n\,\theta) + \imath\, \sin(n\,\theta).$$

Per definire la radice n-sima di un numero complesso cercheremo le soluzioni di

$$\xi^n = z$$

con $\xi = (|\xi|, \phi)$, $z = (|z|, \theta)$. Si dovrà quindi avere $|\xi|^n(\cos(n\phi) + \imath \sin(n\phi)) = |z|(\cos(\theta) + \imath \sin(\theta))$, che ammette n soluzioni:

$$\xi \equiv z^{\frac{1}{n}} = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos\left(\frac{\theta}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}\right) + \imath \sin\left(\frac{\theta}{n} + k\,\frac{2\pi}{n}\right)\right) \qquad k = 0, 1, ..., n-1$$

Ci sono quindi n radici n-esime del numero complesso z. Tutte sono sul cerchio di raggio $|z|^{\frac{1}{n}}$ e differiscono in angolo di $\dfrac{2\pi}{n}$.

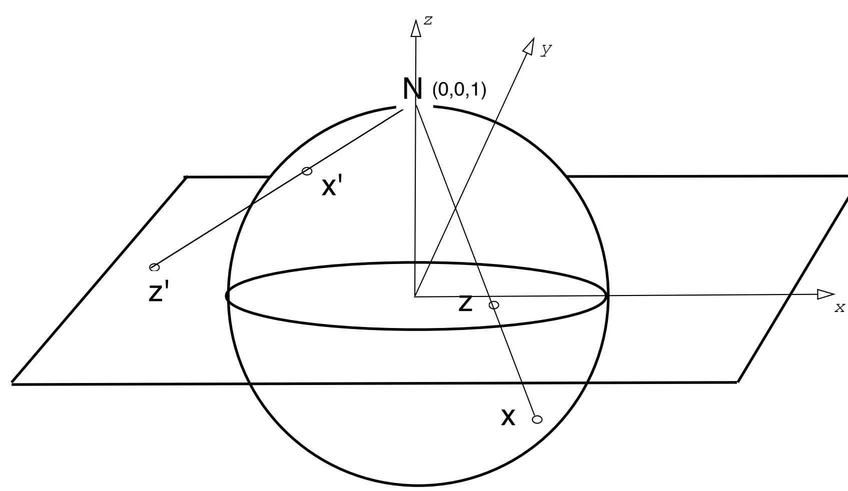
Come alcuni autori sottolineano (vedi ad esempio [1]) l'interpretazione geometrica appena accennata e i risultati sull'espressione del prodotto e dell'elevamento a potenza si basano su definizioni geometriche di angoli e delle loro funzioni trigonometriche. In una introduzione puramente analitica le stesse quantità dovrebbero avere una definizione indipendente dagli enti geometrici.

Nel prossimo paragrafo forniremo l'introduzione analitica. La rappresentazione geometrica verrà comunque estesamente utilizzata per il suo carattere fortemente intuitivo.

Una differente rappresentazione geometrica (che appena accenniamo, visto che non la utilizzeremo) si ottiene mettendo in corrispondenza i punti del piano con i punti della "sfera di Riemann" . Le relazioni:

$$z = \frac{x_1 + \imath x_2}{1 - x_3} \qquad \begin{aligned} x_1 &= \frac{2\mathrm{Re}(z)}{|z|^2+1} \\ x_2 &= \frac{2\mathrm{Im}(z)}{|z|^2+1} \\ x_3 &= \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \end{aligned}$$

definiscono la trasformazione dei punti z del piano complesso nell'insieme delle triple (x_1, x_2, x_3) (esclusa la tripla $(0, 0, 1)$) di una sfera tridimensionale. La corrispondenza geometrica è indicata in figura dove si nota che i punti con $x_3 > 0$ corrispondono ai punti del piano esterni al cerchio equatoriale, mentre i punti con $x_3 < 0$ corrispondono ai punti del piano interni o sul bordo del cerchio equatoriale.



L'insieme di tutti i punti della sfera (compreso il "polo nord" $(0, 0, 1)$) sono in corrispondenza biunivoca con i punti del piano complesso esteso, ottenuto aggiungendo al piano complesso il "punto all'infinito", i cui intorni sferici aperti sono definiti come i punti esterni alle sfere chiuse di centro l'origine.

1.2 Funzioni olomorfe

Analizzeremo le proprietà di una particolare classe di funzioni complesse di variabile complessa:

$$f : z \in \mathbb{C} \longrightarrow f(z) \in \mathbb{C},$$

che hanno avuto grande importanza in Fisica fondamentale ed applicata. Esempi di funzioni complesse definite su tutto il piano complesso sono:

i) $z \to \overline{z}$

ii) $z \to \mathrm{Re}\, z$

iii) $z \to P_n(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j;\ a_j \in \mathbb{C},\ \forall j$

Altre funzioni sono definite solo su sottoinsiemi di $\mathbb{C}$:

$$z \to \frac{1}{z} \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}; \qquad z \to \frac{1}{\overline{z}} \quad z \in \mathbb{C}\backslash\{0\}; \qquad z \to \frac{1}{\mathrm{Re}\, z} \quad z \in \mathbb{C}\backslash I$$

con I, asse immaginario: $\{z : \mathrm{Re}\, z = 0\}$.
Una funzione complessa f si dice **continua** in z_0 se $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tale che $|z - z_0| < \delta \Longrightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$.
Se Ω è un sottoinsieme aperto di $\mathbb{C}$ ed f è una funzione $\Omega \Longrightarrow \mathbb{C}$, continua in $z \in \Omega$, $\forall z \in \Omega$ allora f si dice continua in Ω.

Una funzione complessa f definita in un intorno di $z_0 \in \mathbb{C}$ si dice **derivabile** in z_0 se

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \equiv f'(z_0) \tag{1.1}$$

esiste finito (e non dipende da come h tenda a 0).

Una funzione f da Ω, aperto di $\mathbb{C}$, in $\mathbb{C}$ derivabile in ogni $z \in \Omega$ si dice **olomorfa** e Ω si dirà il dominio di olomorfia della funzione f.
L'operazione di derivazione è evidentemente lineare ed è facile verificare che vale la regola di Leibniz di derivazione del prodotto: se f e g sono olomorfe in Ω allora $\forall z \in \Omega$ si ha

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z) \qquad (f\, g)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

Vale la regola di **derivazione di funzione di funzione** : se f è una funzione olomorfa sull'aperto $\Omega \in \mathbb{C}$ e g è olomorfa nell'aperto $\Omega' \in \mathbb{C}$ che contiene l'immagine di Ω attraverso f, allora la funzione $z \to g(f(z))$ è olomorfa in Ω e

$$(g(f))'(z) = g'(f(z))\, f'(z)$$

Vediamo come la derivabilità espressa nella (1.1) sia una richiesta molto forte sulla funzione f. La (1.1) implica, in effetti, che la f sia differenziabile, che si abbia cioè

$$f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)h = \mathsf{o}(|h|) \qquad (1.2)$$

cioè che l'incremento della funzione f intorno a z_0, quando ci si "sposta" di h, sia proporzionale ad h, a meno di termini il cui modulo va a 0 più rapidamente di $|h|$, con un fattore di proporzionalità che non dipende da h [2]. Non è quindi semplicemente una richiesta di regolarità dell'incremento in ogni direzione, ma anche di omogeneità rispetto alla direzione attorno a z_0.

Più in dettaglio sia f una funzione olomorfa in Ω aperto di $\mathbb{C}$ e sia $u = \mathrm{Re}\, f$ e $v = \mathrm{Im}\, f$ cosicché $f(z) = u(z) + \imath\, v(z) = u(x, y) + \imath\, v(x, y)$ (dove $z = x + \imath\, y$). Come conseguenza della derivabilità di f in $z_0 \in \Omega$, le funzioni reali di due variabili reali u e v hanno derivate parziali rispetto a x e a y nel punto (x_0, y_0). Prendendo rispettivamente h reale o puramente immaginario si ha

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + \imath \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) \\ f'(z_0) &= -\,\imath\, \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

---

[2]

$$\begin{aligned} &|f(z_0 + h) - f(z_0) - f'(z_0)\, h| = \\ &= \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}\, h - f'(z_0)\, h \right| = |h| \left| \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} - f'(z_0) \right| \end{aligned}$$

che dice che il modulo del membro di sinistra della (1.2) è pari a $|h|$ per una funzione che va a zero per h tendente a zero.

Le derivate parziali in z_0 devono quindi soddisfare le relazioni (Condizioni o Equazioni di Cauchy - Riemann)

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.3}$$

Anticipiamo alcune proprietà delle funzioni olomorfe che proveremo in seguito, ma che sono intuitivamente riconducibili alla proprietà di differenziabilità.

Sia z_0 un punto nel dominio di olomorfia della funzione f. Assumiamo per semplicità che la derivata di f in z_0 non sia nulla: $f'(z_0) \neq 0$. Il caso generale richiede conoscenze sulle derivate successive di una funzione olomorfa che proveremo nei paragrafi successivi.

Si noti che $f'(z_0)\,(z-z_0)$, al variare di z in un intorno di z_0 interno al dominio di olomorfia è un numero complesso le cui parti reale e immaginaria assumono valori positivi o negativi al variare della direzione di allontanamento di z da z_0 nell'intorno. Per esempio prendendo $z - z_0 = \varepsilon \overline{f'(z_0)}$, con ε numero reale positivo, sufficientemente piccolo da garantire che z sia ancora nel dominio di olomorfia di f, si ottiene che $f'(z_0)\,(z - z_0)$ è un numero reale positivo (trovare esempi per tutti gli altri casi). Dalla (1.2) si deduce che $|f|(z)$ per z in qualunque intorno sufficientemente piccolo di z_0 assumerà valori sia maggiori che minori di $|f|(z_0)$. Si può dunque concludere che il modulo di una funzione olomorfa in un insieme aperto $\Omega \in \mathbb{C}$ non può avere un massimo o un minimo in un punto interno a Ω in cui la derivata è diversa da zero.

Un analogo ragionamento porta a concludere che se z_0 è uno zero di una funzione olomorfa f e se $f'(z_0) \neq 0$ allora esiste un intorno di z_0 in cui la funzione f è diversa da zero. z_0 è dunque uno zero isolato della funzione.

Vediamo come per i polinomi si possano estendere i risultati elencati precedentemente a tutti i punti del dominio di olomorfia (anche cioè dove il valore della derivata risulti nullo).

1.2.1 I polinomi

Notiamo preliminarmente che la funzione $g(z) = z^n$, per ogni n naturale, è una funzione olomorfa su tutto $\mathbb{C}$. Infatti

$$(z+h)^n = z^n + n\, z^{n-1}\, h + \sum_{j=2}^{n} \binom{n}{j} z^{n-j}\, h^j$$

Si ha quindi $g'(z) = n\, z^{n-1}$ che è ancora una funzione olomorfa.
Poiché ogni combinazione lineare, a cofficenti complessi, di funzioni olomorfe è olomorfa i polinomi di qualunque grado sono funzioni olomorfe.

Sia $P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j\, z^j$ un polinomio di grado n.
Le seguenti proprietà sono facili da verificare

- $P_n(z)$ è derivabile infinite volte e la derivata $(n+1)$-sima, assieme a tutte le derivate successive, sono nulle,

- se tutte le derivate di P_n sono nulle, allora il polinomio è la funzione costante $P_n(z) = a_0$,

- per ogni $z_0 \in \mathbb{C}$ il polinomio $P_n(z)$ si può scrivere come polinomio in $(z - z_0)$

  $$P_n(z) = P_n(z_0) + \sum_{j=1}^{n} b_j(z_0)\,(z - z_0)^j$$

  (basta porre $z = (z - z_0) + z_0$ in $P_n(z)$, sviluppare le potenze e riordinare in potenze di $(z - z_0)$)

- se $P_n(z)$ non è costante e z_0 è un suo zero ($P_n(z_0) = 0$) allora esiste un intorno I_{z_0} di z_0 in cui $P_n(z) \neq 0\ \forall\, z\, \in I_{z_0}$.

  Infatti deve esistere un m con $1 \leq m \leq n$ tale che la derivata m-sima di P_n calcolata in z_0 sia diversa da zero $P_n^{(m)}(z_0) \neq 0$ quando $P_n^{(k)}(z_0) = 0\ \forall k < m$.

  Una stima della somma di tutti i termini di grado maggiore di m fornisce la disuguaglianza, certamente valida per $|z - z_0| < 1$

$$
\begin{aligned}
|P_n(z) \; - \; b_m(z_0)\,(z - z_0)^m| \; &= \; |\sum_{j=m+1}^{n} b_j(z_0)(z - z_0)^j| \qquad (1.4) \\
&\leq \; K\,|z - z_0|^{(m+1)}
\end{aligned}
$$

per qualche K costante positiva (verificare che $(n - j)\ \sup|b_j(z_0)|$ costituisce una scelta sicura). Si ha dunque

$$
\begin{aligned}
|P_n(z)| \; &= \; |b_m(z_0)\,(z - z_0)^m + \; P_n(z) \; - \; b_m(z_0)\,(z - z_0)^m| \\
&\geq \; \big||b_m(z_0)\,(z - z_0)^m| \; - \; |P_n(z) \; - \; b_m(z_0)\,(z - z_0)^m|\big| \\
&\geq \; |b_m(z_0)\,(z - z_0)^m| \; - \; K\,|z - z_0|^{(m+1)} > 0
\end{aligned}
$$

Dove l'ultima disuguaglianza si intende valida per $|z - z_0|$ sufficientemente piccolo.

In sintesi un polinomio è una funzione olomorfa che

- ammette infinite derivate,
- può essere scritta come combinazione lineare di potenze di $(z - z_0)$ nell'intorno di ogni z_0 del dominio di olomorfia,
- può avere solo zeri isolati.

Vedremo che ogni funzione olomorfa soddisfa le stesse proprietà e possiede, intorno ad ogni punto del dominio di olomorfia, la struttura di un polinomio eventualmente di "grado infinito" (serie di potenze).

Il rapporto tra due polinomi P_n e Q_m di grado rispettivamente m e n

$$
f(z) = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)}
$$

è genericamente una funzione olomorfa su $\mathbb{C}$ privato dei punti z_k (isolati come abbiamo visto) in cui si ha $Q_m(z_k) = 0$.
Se accade che anche $P_n(z_k) = 0$ e l'ordine dello zero z_k di P_n è maggiore o uguale all'ordine dello stesso zero per Q_n è plausibile pensare che la funzione possa essere estesa, come funzione olomorfa nel punto z_k. Il caso verrà affrontato durante lo studio delle singolarità isolate delle funzioni meromorfe.

1.2.2 La funzione esponenziale e le funzioni trigonometriche

La funzione esponenziale nel piano complesso è definita come somma della serie di potenze

$$e^z \equiv \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \dots \tag{1.5}$$

Dalla formula di Hadamard per il raggio di convergenza e dal calcolo diretto della serie derivata si ha che la funzione e^z

- è definita dalla (1.5) in tutto $\mathbb{C}$
- è olomorfa in tutto $\mathbb{C}$
- è l'unica soluzione dell'equazione $f'(z) = f(z)$ con $f(0) = 1$

La relazione funzionale all'ultimo punto precedente fornisce una maniera, più semplice della prova diretta partendo dalla definizione, per dimostrare la principale proprietà della funzione esponenziale

$$e^{z_1}\, e^{z_2} = e^{z_1+z_2} \qquad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \tag{1.6}$$

Infatti se per ogni z_1 e z_2 del piano complesso deriviamo rispetto a z la funzione olomorfa $f(z) \equiv e^z e^{z_1+z_2-z}$ otteniamo

$$(e^z e^{z_1+z_2-z})' = e^z e^{z_1+z_2-z} - \ \ e^z e^{z_1+z_2-z} = 0$$

la f, come funzione delle variabili $x = \mathrm{Re} z$ e $y = \mathrm{Im} z$, ha quindi derivate parziali nulle in ogni punto del piano (x, y). È quindi costante ed eguagliando i valori che essa assume in $z = 0$ e in $z = z_1$ si ottiene la (1.6)

Naturalmente per valori di z reali $z = x + \imath 0$ la funzione e^z coincide con la funzione e^x studiata in Analisi 1, come si deduce dalla coincidenza delle serie di potenze delle due funzioni per z reale, o dal fatto che entrambe soddisfano la stessa equazione differenziale, con le stesse condizioni sulla funzione nell'origine, sempre per z reali.

La prova delle proprietà che seguono è lasciata al lettore

- $e^z \neq 0$ per ogni z del piano complesso,

- $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$,
- $|e^z| = e^x$ per ogni $z = x + iy$. In particolare $|e^{\imath y}| = 1$ per ogni $y \in \mathbb{R}$.

Siamo ora in grado di definire le funzioni trigonometriche come funzioni di variabile complessa. La definizione, indipendente dalle definizioni di angolo, dovrà coincidere con le definizione classiche per valori reali della variabile complessa z.

Siano

$$\begin{aligned} \cos\, z &\equiv \frac{e^{\imath z} + e^{-\imath z}}{2} \\ \sin\, z &\equiv \frac{e^{\imath z} - e^{-\imath z}}{2\imath} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Dalle definizioni precedenti, e dalla definizione di funzione esponenziale, si ricavano facilmente le proprietà delle funzioni trigonometriche

- $$\begin{aligned} \cos\, z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2} + \frac{z^4}{24} - \dots \\ \sin\, z &= \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \dots \end{aligned}$$
- $e^{\imath z} = \cos\, z + \imath\, \sin\, z$. Si noti che le funzioni coseno e seno hanno valori complessi. In particolare $\cos\, z$ e $\sin\, z$ non sono rispettivamente la parte reale e immaginaria di $e^{\imath z}$ come la formula precedente potrebbe far pensare. Solo per $z = y \in \mathbb{R}$ si ha che $\cos\, y$ e $\sin\, y$ sono reali e sono rispettivamente la parte reale e immaginaria del numero complesso di modulo uno $e^{\imath y} = cos\, y + \imath\, \sin\, y$.
- $\cos^2\, z + \sin^2\, z = 1$ per ogni z del piano complesso,
- $(\sin\, z)' = \cos\, z \quad (\cos\, z)' = -\sin\, z$

Partendo dalle serie per le funzioni seno e coseno si può provare che la funzione $e^{\imath y}$ quando $y \in \mathbb{R}$ è una funzione periodica. La tesi è la conseguenza della seguente successione di passaggi (la prova di alcuno dei quali è lasciata al lettore)

Sia $y > 0$

- $1-\frac{y^2}{2} < \cos\, y < 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24}$ per ogni $y < 5$.
  Infatti
  $$\begin{aligned}\cos y &= 1-\frac{y^2}{2}+\sum_{n\ pari \geq 2}\left[\frac{y^{2n}}{(2n)!}-\frac{y^{2n+2}}{(2n+2)!}\right]\\ &= 1-\frac{y^2}{2}+\frac{y^4}{24}+\sum_{n\ dispari \geq 3}\left[-\frac{y^{2n}}{(2n)!}+\frac{y^{2n+2}}{(2n+2)!}\right]\end{aligned}$$
  È facile rendersi conto che la prima parentesi quadra è strettamente maggiore di zero per ogni $n \geq 2$ se $y < 5$. La seconda parentesi quadra è quindi strettamente minore di zero per ogni $n \geq 3$ nelle stesse ipotesi su y. Ne discende la disuguaglianza scritta precedentemente.

- Per $y = 2$ la disuguaglianza si legge $-1 < \cos\, y < -1/3$ che, essendo $\cos 0 = 1$, $\Longrightarrow \exists\; y_0 < 2 : \cos\, y_0 = 0$. In y_0 di conseguenza $\sin\, y_0 = \pm 1$.

- Se ne deduce che $e^{\imath\, y_0} = \pm\imath \Longrightarrow e^{4\imath\, y_0} = 1$. $4\, y_0$ è quindi un periodo della funzione $e^{\imath\, y}$.

- Al lettore resta da mostrare che $4\, y_0$ è il più piccolo e unico periodo della funzione.

.

Il periodo può essere ora **definito** $2\,\pi$ fornendo, in questo modo, una definizione di π indipendente dalla geometria. Si deducono quindi le relazioni fondamentali tra il numero e e il numero π

$$e^{\frac{\imath\pi}{2}} = \imath \qquad e^{\imath\pi} = -1 \qquad e^{\frac{\imath 3\pi}{2}} = -\imath \qquad e^{\imath 2\pi} = e^0 = 1$$

La funzione $e^{\imath y}$ trasforma biunivocamente l'intervallo $0\ \leq y\ < 2\pi$ nel cerchio unitario $|z| = 1$ percorso in senso antiorario, per poi ripetersi periodicamente in ogni intervallo $2\pi j\ \leq y\ < 2\pi(j+1)$ per ogni $j \neq 0$ intero.
La rappresentazione polare di un numero complesso corrisponde, in questo schema, alla decomposizione

$$z = |z|\,\frac{z}{|z|} = |z|e^{\imath\theta} = |z|\,(\cos\,\theta + \imath \sin\,\theta)$$

dove θ è l'unica soluzione in $[0\,,\,2\pi)$ dell'equazione $\frac{z}{|z|} = e^{\imath\theta}$

1.2.3 La funzione logaritmo

Definiamo la funzione logaritmo $\log z$ come la funzione inversa dell'esponenziale. Si avrà dunque

$$\xi = \log z \quad \text{se accade che} \quad e^{\xi} = z \quad \text{cioè se} \quad e^{\mathrm{Re}\,\xi} = |z| \quad \text{e} \quad e^{\imath \mathrm{Im}\,\xi} = \frac{z}{|z|}$$

La parte reale di ξ è quindi il logaritmo reale del numero positivo $|z|$. La parte immaginaria di ξ è una delle infinite soluzioni dell'equazione $e^{\imath \mathrm{Im}\,\xi} = \frac{z}{|z|}$ che differiscono tra loro per multipli di $2\,\pi$. Definiremo ognuna di queste soluzioni $\arg\, z$.
La funzione logaritmo è dunque la funzione a più valori

$$\xi = \log\, z = \log\, |z| + \imath \arg\, z$$

Si noti che è possibile definire la funzione logaritmo come funzione a un solo valore restringendo ad esempio $\arg\, z$ ad uno degli intervalli $[2\pi j\,,\, 2\pi(j+1))$ (la scelta $j = 0$ si dirà determinazione principale del logaritmo). In questo caso però la funzione non riassume, a $|z|$ fissato, gli stessi valori quando l'argomento aumenta di $2\,\pi$. Un dominio in cui la funzione logaritmo è continua non può essere quindi tutto il piano complesso. È necessario togliere al piano una semiretta qualunque uscente dall'origine, per esempio la semiretta dei reali positivi.
Si provi che nel dominio così definito la funzione è olomorfa e $(\log\, z)' = \frac{1}{z}$.
Si specifichi inoltre in che senso valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} \log\,(z_1\, z_2) &= \log\, z_1 + \log\, z_2 \\ \arg\,(z_1\, z_2) &= \arg\, z_1 + \arg\, z_2 \end{aligned}$$

1.2.4 Potenze e radici in notazione esponenziale

Se un numero complesso z è espresso in notazione esponenziale $z = |z|\, e^{\imath\, \arg\, z}$ la sua potenza j-sima, per j intero si scrive

$$z^j = |z|^j\; e^{\imath\, j\, \arg\, z}$$

definita $\forall z \in \mathbb{C}$ se $j > 0$ e $\forall z \neq 0$ se $j < 0$. Per ogni j la funzione z^j è evidentemente periodica, di periodo $2\,\pi/|j|$, nell'argomento di z.

La funzione inversa (radice m-sima), per $m > 0$ si otterrà risolvendo in z l'equazione

$$\xi^m = z \implies |\xi| = |z|^{\frac{1}{m}} \quad \arg\,\xi = \frac{\arg\,z}{m} \implies z^{\frac{1}{m}} = |z|^{\frac{1}{m}} e^{\imath \frac{\arg\,z}{m}}$$

Se θ è il valore di arg z compreso tra 0 e $2\,\pi$, $\frac{\arg\,z}{m}$ potrà assumere gli m valori distinti $\dfrac{\arg\,z}{m} = \dfrac{\theta}{m} + \dfrac{2\pi\kappa}{m}$ $\kappa = 0, 1, \ldots, (m-1)$. La funzione radice m-sima è quindi una funzione a m valori. Per definirla come funzione monodroma è necessario specificare un intervallo di ampiezza $2\,\pi$ a cui vengono ristretti i valori di $arg\,z$, per esempio $0 \leq \arg\,z < 2\pi$.
Si noti però che la funzione così ottenuta non assume gli stessi valori, a parità di $|z|$, quando arg $z = 0$ e quando arg $z \to 2\pi$ essendo $1 = e^{\imath\,0} \neq e^{\frac{\imath\,2\,\pi}{m}}$. Come nel caso del logaritmo, la funzione radice non è olomorfa in tutto il piano complesso, privato dell'origine (dove non è derivabile), ma solo nel piano privato di una semiretta che congiunge l'origine con l'infinito, per esempio la semiretta dei reali positivi. In tale dominio di olomorfia la sua derivata è $(z^{\frac{1}{m}})' = \dfrac{1}{m} z^{-1+\frac{1}{m}}$ per $z \neq 0$.

Potenze non intere di numeri complessi possono essere definite tramite le funzioni esponenziale e logaritmo. Le funzioni così definite potranno essere monodrome o polidrome a seconda delle funzioni che utilizzeremo per definirle

$$\begin{aligned}
x^z &\equiv e^{z\,\log\,x} \quad z \in \mathbb{C}, \quad x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \text{ è una funzione monodroma} \\
z^\xi &\equiv e^{\xi\,\log z} \quad z, \xi \in \mathbb{C} \quad \text{è una funzione polidroma} \\
z^r &\equiv (z^p)^{\frac{1}{q}} \quad z \in \mathbb{C} \quad r = \frac{p}{q} \in Q \text{ con } p \text{ e } q \text{ interi} \\
& \quad\ \text{che è una funzione polidroma se } p/q \text{ non è un numero intero}
\end{aligned}$$

dove log x, nella prima definizione, si intende il logaritmo reale del numero positivo x e Q, nella terza definizione, indica l'insieme dei numeri razionali. Le funzioni polidrome z^r e z^ξ, ristrette a domini del piano complesso dove rispettivamente la radice q-sima e il logaritmo sono monodrome e olomorfe, definiscono corrispondenti funzioni olomorfe.

1.3 Teorema e Formula di Cauchy

Dimostreremo nel seguito che la derivata di una funzione olomorfa nell'aperto $\Omega \in \mathbb{C}$ è ancora olomorfa. Iterando il risultato si deduce che una funzione olomorfa è infinitamente derivabile e che quindi la sua parte reale così come quella immaginaria hanno derivate parziali continue di tutti gli ordini.
Se diamo per acquisito questo risultato, è immediato provare:

Teorema 1 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$, e sia $f(z) = u(z) + \imath\, v(z) : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora u e v sono armoniche, cioè sono di classe C^2 (ovvero hanno derivate parziali continue fino al secondo ordine) e*

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = 0 \qquad \text{in } \Omega \tag{1.8}$$

Si ha inoltre che le 1-forme $\omega_1 \equiv u\,dx - v\,dy$ e $\omega_2 \equiv v\,dx + u\,dy$ in Ω sono chiuse

Dimostrazione Dalle relazioni di Cauchy-Riemann (1.3) si ha che, in Ω:

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Per il Teorema di Schwarz, essendo le derivate parziali seconde continue (nelle ipotesi di infinita differenziabilità della funzione olomorfa f) , si può scambiare l'ordine di derivazione di v, ottenendo $\nabla^2 u = 0$ in Ω. Analogamente si dimostra che $\nabla^2 v = 0$ in Ω.
È immediato verificare che $d^2\,\omega_1 = d^2\,\omega_2 = 0$ in Ω (chi non voglia usare il linguaggio delle forme differenziali e preferisca il linguaggio dell'analisi vettoriale, può verificare che i rotori dei due campi vettoriali ($E_x^{(1)} = u, E_y^{(1)} = -v$) e ($E_x^{(2)} = v, E_y^{(2)} = u$) sono entrambi nulli in ogni punto di Ω). [3]

[3] Viceversa, se la regione Ω è semplicemente connessa (la definizione si trova alla pagina successiva del testo), e $u : \Omega \to \mathbb{R}$ è armonica, allora esiste una funzione armonica v (detta **armonica coniugata** di u), tale che $f \equiv u + \imath\, v$ è olomorfa in Ω. (Analogamente, $-u$ è armonica coniugata di v).
Poichè infatti $\nabla^2 u = 0$, si ha $\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)$. Questo unitamente al fatto che l'aperto Ω è semplicemente connesso, implica che la forma differenziale $-\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$ è *esatta* in Ω; ovvero esiste $v : \Omega \to \mathbb{R}$ (determinata a meno di una costante additiva) tale che:

$$\nabla v \equiv \left(\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}\right) = \left(-\frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

in Ω. Quindi valgono le condizione di Cauchy-Riemann (1.3), ovvero f è olomorfa in Ω.

1.3.1 Teorema di Cauchy

Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $\gamma \in \Omega$ una curva regolare a tratti. Con questo intenderemo che

- γ è l'immagine in Ω di un intervallo della retta reale (che per comodità sceglieremo sempre $[0\,,\,1]$) tramite una funzione complessa $z(t) = x(t) + \imath y(t), \quad t \in [0\,,\,1]$ (qualche volta useremo la notazione $\gamma(t)$ per la funzione complessa che parametrizza la curva),

- x e y sono funzioni differenziabili a tratti: a meno di un numero finito di valori del parametro t le funzioni x e y hanno cioè derivate continue. Nei punti i singolarità devono comunque esistere le derivate destra e sinistra (che possono essere diverse).

- Non esistono valori del parametro t in cui $z'(t) = 0 \rightarrow x'(t) = y'(t) = 0$.

Diremo che la curva γ è **orientata** nel verso che va da $z(0)$ a $z(1)$

Se $t(\tau)$ è una funzione strettamente crescente da $[0, 1]$ in $[0, 1]$ la curva γ può essere ri-parametrizzata, con la stessa orientazione, col parametro τ tramite l'equazione parametrica $z(t(\tau))$. Assumeremo sempre che le funzioni che definiscono le ri-parametrizzazioni siano derivabili con derivate continue.

Una curva regolare a tratti di dirà **semplice** se non si auto-interseca: $z(t_1) = z(t_2)$ se e solo se $t_1 = t_2$ (estremi esclusi).

Una curva semplice si dice **chiusa** se $z(0) = z(1)$. Se $z(t)$ descrive una curva semplice chiusa γ, $z(1-t)$ descrive la stessa curva percorsa nel verso opposto (qualche volta indicata con $-\gamma$).

I soli casi che considereremo in seguito sono quelli di curve che sono unioni di curve semplici e, più spesso, unioni di curve semplici chiuse.

L'integrale di una funzione continua $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ lungo la curva semplice γ è definito da

$$\int_\gamma f(z)\, dz \equiv \int_0^1 f(z(t))\, z'(t)\, dt \tag{1.9}$$

ovvero, posto $z \equiv x + \imath\, y$ e $f \equiv u + \imath\, v$,

$$\int_\gamma f(z)\, dz \equiv \int_\gamma f(z)\, dx + \imath \int_\gamma f(z)\, dy = \int_\gamma (u\, dx - v\, dy) + \imath \int_\gamma (u\, dy + v\, dx) \tag{1.10}$$

L'integrale esteso all'unione di curve semplici è definito essere la somma degli integrali relativi alle singole curve semplici.

Ricordiamo alcune definizioni e proprietà relative ai sottoinsiemi aperti del piano complesso e alle curve regolari (a tratti) nel piano.

- un sottoinsieme aperto Ω di $\mathbb{C}$ si dice **connesso** se non esistono due suoi sottoinsiemi aperti disgiunti la cui unione coincide con Ω. Chiameremo **regione** ogni sottoinsieme aperto, connesso, non vuoto di $\mathbb{C}$;

- (un risultato fortemente intuitivo, ma di difficilissima dimostrazione, asserisce che) se γ è una curva semplice chiusa allora $\mathbb{R}^2 \setminus \{\gamma\}$ è l'unione di due componenti aperte connesse di cui γ è frontiera. Una è limitata e verrà indicata **interno** di γ e una illimitata indicata come **esterno** di γ;

- due curve semplici γ_1 e γ_2 nella regione Ω si dicono **Ω-omotope** se possono essere trasformate con continuità una nell'altra "restando" in Ω. Dovrà cioè esistere una funzione $\Gamma : [0,1] \times [0,1] \to \Omega$ continua nella prima variabile (che indicizza le curve), regolare a tratti nella seconda (che descrive ciascuna curva), tale che $\Gamma(0,t) = \gamma_1(t)\, \forall t \in [0,1]$ e $\Gamma(1,t) = \gamma_2(t)\, \forall t \in [0,1]$;

- una curva chiusa in Ω si dice **Ω-omotopa ad un punto** se può essere deformata con continuità in Ω fino a ridurla ad un punto di Ω ($\lim_{s\to 1} \Gamma(s,t) = z_0 \in \Omega\ \forall t, \in [0,1]$ nelle notazioni precedenti);

- una regione Ω in cui ogni curva chiusa è Ω-omotopa a un punto è detta **semplicemente connessa**.

Sia Ω una regione di $\mathbb{C}$ e sia f una funzione olomorfa in Ω. Siano ω_1 e ω_2 le 1-forme associate alla f come indicato nel teorema 1). Se le ipotesi di continuità delle derivate parziali della parte reale u e immaginaria v della f (che abbiamo considerato valide nella prova del teorema 1) fossero valide, le due forme sarebbero chiuse e ciò permetterebbe di provare, utilizzando teoremi classici dell'analisi vettoriale, una serie di risultati fondamentali

Teorema 2 (Teorema Integrale di Cauchy) *Sia Ω una regione di $\mathbb{C}$, sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa, e sia γ una curva semplice chiusa (risp. una unione di curve semplici chiuse), Ω-omotopa a un punto (risp. ciascuna Ω-omotopa a un punto). Allora*

$$\int_\gamma f(z)\, dz \;=\; 0 \tag{1.11}$$

Il teorema ha vari corollari fondamentali

Corollario 3 *Sia Ω una regione di $\mathbb{C}$, sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa, e γ_1, γ_2 siano due curve semplici Ω-omotope tra loro, con punti iniziali e finali coincidenti ($\gamma_1(0) = \gamma_2(0)$ e $\gamma_1(1) = \gamma_2(1)$). Allora*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz \tag{1.12}$$

Corollario 4 *Sia Ω una regione di $\mathbb{C}$, sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa, e γ_1, γ_2 siano due curve semplici chiuse Ω-omotope tra loro. Allora*

$$\int_{\gamma_1} f(z)\, dz = \int_{\gamma_2} f(z)\, dz \tag{1.13}$$

Corollario 5 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ semplicemente connesso, sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa, e si fissi $z_0 \in \Omega$. Per ogni $z \in \Omega$, sia γ_z una curva regolare in Ω congiungente z_0 con z (ovvero $\gamma_z : [0,1] \to \Omega$, $\gamma_z(0) = z_0$, $\gamma_z(1) = z$), e si ponga*

$$F(z) := \int_0^1 f(\gamma_z(t))\gamma_z'(t) dt$$

Allora F è olomorfa, e $F' = f$ in Ω.

Dimostrazione Calcoliamo la differenza $F(z+h) - F(z)$ per valori reali e puramente immaginari di h. Per h reale prolunghiamo una qualunque curva tra z_0 e z con il segmento di retta, parallela all'asse reale, che congiunge z a $z+h$. Parametrizzando quest'ultimo tratto di curva come $x(t) = x + t\,h = \mathrm{Re} z + t\,h,\;\; y(t) = y = \mathrm{Im} z$ per $t \in [0,1]$, con $f(z) = u(z) + \imath v(z)$, otteniamo (vedi definizione 1.9)

$$\frac{1}{h}\;(F(z+h) - F(z)) = \frac{1}{h}\int_0^1 [u(x(t), y) + \imath v(x(t), y)] h\, dt$$

Poiché per ogni y sia u che v sono funzioni continue di x e quindi di t, dal teorema della media integrale discende che esistono due valori t' e t'' di $t \in [0,1]$ tali che

$$\frac{1}{h}\ (F(z+h)-F(z)) = u(x+ht', y) + \imath v(x+ht'', y)$$

Dall'equazione precedente, definendo $F = U + \imath V$, si deduce che, quando h tende a zero,

$$\frac{\partial U}{\partial x}(z) + \imath \frac{\partial V}{\partial x}(z) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\ (F(z+h)-F(z)) = u(z) + \imath v(z) = f(z)$$

Lo stesso calcolo fatto per $h = \imath s$ per s reale fornisce

$$\frac{1}{\imath s}\ (F(z+\imath s)-F(z)) = \frac{1}{\imath s}\int_0^1 [-v(x, y(t)) + \imath u(x, y(t))] s\, dt$$

con $y(t) = y + s\, t$. Nel limite per s che tende a zero si ha ancora

$$\frac{\partial V}{\partial y}(z) - \imath \frac{\partial U}{\partial y}(z) = \lim_{s\to 0} \frac{1}{\imath s}\ (F(z+\imath s)-F(z)) = u(z) + \imath v(z) = f(z)$$

La funzione F è quindi olomorfa e $F' = f$.

Una dimostrazione identica alla precedente permette di dimostrare il teorema inverso al teorema integrale di Cauchy

Teorema 6 (Teorema di Morera) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ semplicemente connesso, sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ continua, tale che $\int_\gamma f(z)dz$ risulti uguale a 0 per ogni curva semplice chiusa. Si fissi $z_0 \in \Omega$ e, per ogni $z \in \Omega$, sia γ_z una curva regolare in Ω congiungente z_0 con z (ovvero $\gamma_z : [0,1] \to \Omega$, $\gamma_z(0) = z_0$, $\gamma_z(1) = z$). Si ponga*

$$F(z) := \int_0^1 f(\gamma_z(t))\gamma_z'(t)dt$$

Allora F è olomorfa,(U e V hanno derivate parziali continue che soddisfano le condizioni di Cauchy Riemann) e $F' = f$ in Ω. In particolare, nelle nostre ipotesi, f stessa risulta olomorfa.

Osservazione 7 *Sfortunatamente la prova delle proprietà di regolarità di una funzione olomorfa verrà data nel prossimo paragrafo utilizzando il teorema di Cauchy. Non possiamo quindi utilizzare le proprietà dimostrate nel teorema 1) sulle forme* ω_1 *e* ω_2 *poiché la dimostrazione fa uso della regolarità delle funzioni olomorfe.*

In effetti sarebbe sufficiente dimostrare la continuità delle derivate parziali della parte reale e della parte immaginaria di una funzione olomorfa nella seguente forma: se $f = u + \imath v$ *è olomorfa nella regione* $\Omega \Longrightarrow$ *esistono* **e sono continue** *in* Ω *le derivate parziali di* u *e* v*. In questo caso i risultati elencati sopra sarebbero conseguenza del teorema di Stokes applicato alla curva e al suo interno.*

Una dimostrazione diretta della continuità delle derivate parziali di u *e* v *per una funzione* $f = u + \imath v$ *olomorfa nella regione* Ω *risulta molto difficile. La più semplice alternativa è di dimostrare il teorema di Cauchy senza utilizzare alcuna proprieta di continuità delle derivate parziali di* u *e* v*, ma la sola olomorfia di* f*.*

Questo è quello che faremo qui di seguito dando cenni della dimostrazione classica di Goursat.

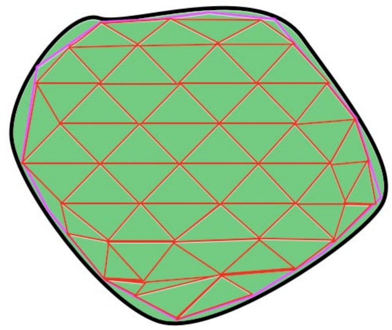
Teorema 8 (Teorema di Cauchy (versione Goursat)) *: Se una funzione olomorfa in un dominio* Ω *semplicemente connesso ammette derivata in tutti i punti di* Ω *allora l'integrale di tale funzione lungo una qualunque curva chiusa di* Ω *è nullo.*

Dimostrazione Per la dimostrazione del teorema si procederà secondo i seguenti passi, di alcuni dei quali non verrà dato alcun dettaglio

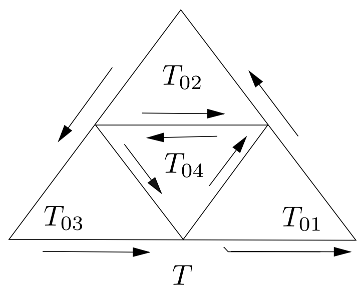
i) dalla curva al poligono

ii) pavimentazione del poligono

iii) calcolo sulla piastrella triangolare



Si consideri il seguente triangolo T:



e calcoliamo

$$\oint_T f(z)dz = \sum_{i=1}^{4} \oint_{T_{0i}} f(z)dz$$

$$\left|\oint_T f(z)dz\right| \leqslant \sum_{i=1}^{4} \left|\oint_{T_{0i}} f(z)dz\right| \leqslant 4 \left|\oint_{T_1} f(z)dz\right|$$

ove T_1 è uno tra i quattro T_{0i} per cui l'integrale assume il massimo valore. Suddividiamo poi T_1 ancora in quattro triangoli come fatto prima, ed iterando n volte si ha che

$$\left|\oint_T f(z)dz\right| \leqslant 4^{n-1} \left|\oint_{T_{n-1}} f(z)dz\right| \leqslant \sum_{i=1}^{4} \left|\oint_{T_{n-1\,i}} f(z)dz\right| \leqslant 4^n \left|\oint_{T_n} f(z)dz\right|.$$

Dal fatto che

$$T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset ... \subset T_{n-1}$$

con T_i chiusi [4] segue per il lemma di Cantor $\bigcap_{i=1}^{n-1} T_i \neq \emptyset$.

[4] $T_i = \overline{T_i}$

Quindi $\exists z_0 \in \bigcap_{i=1}^{n-1} T_i$.
Per le ipotesi del teorema abbiamo che $f(z)$ è olomorfa in T e ne segue che $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0) \right| < \varepsilon$ per $0 < |z - z_0| < \delta$.
Sia $g(z) = f(z) - (z - z_0)f'(z_0)$ allora $0 < |z - z_0| < \delta \rightarrow |g(z)| \leqslant \varepsilon\, |z - z_0|$.

$$\oint_{T_n} f(z)dz = \oint_{T_n} \left[f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) \right] dz + \oint_{T_n} g(z)dz = \oint_{T_n} g(z)dz$$

L'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)$ è una funzione olomorfa di z con derivate certamente continue (in effetti la derivata è costante). Che l'integrale di tale funzione lungo un cammino chiuso sia nulla è pertanto conseguenza del teorema di Stokes applicato alle due 1-forme ad essa associate.

È valida la successione di implicazioni $f(z)$ continua $\rightarrow$ $g(z)$ continua $\rightarrow$ $|g(z)|$ limitata su T_n.
Usando l'ipotesi di limitatezza è possibile maggiorare il modulo dell'integrale con il prodotto dell'estremo superiore del modulo della funzione integranda per la lunghezza dell'arco di curva

$$\left| \oint_{T_n} g(z)dz \right| \leqslant \sup_{z \in T_n} |g(z)|\, l(T_n) \leqslant l(T_n) \sup_{z \in T_n} |z - z_0| \varepsilon \leqslant \varepsilon l^2(T_n) = \varepsilon\, 2^{-2\,n} l^2(T)$$

poiché ad ogni suddivisione vi è il dimezzamento del perimetro.

$$\left| \oint_{T_n} f(z)dz \right| = \left| \oint_{T_n} g(z)dz \right| \leqslant \varepsilon\, 4^n\, l^2(T)$$

$$\left| \oint_{T} f(z)dz \right| \leqslant\, 4^n \left| \oint_{T_n} f(z)dz \right| \leqslant \varepsilon\, l^2(T)$$

e passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0$ si ha che $\left| \oint_{T} f(z)dz \right| = 0$ (quanto detto vale per ε arbitrariamente piccolo). ∎

1.3.2 Formula di Cauchy

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ ed ogni $R > 0$, denoteremo con $B_R(z)$ il cerchio con centro z e raggio R, e con $C_R(z)$ la sua circonferenza. Nelle integrazioni lungo una circonferenza verrà sempre inteso che l'orientamento è antiorario.

Teorema 9 (Formula di Cauchy) *Sia Ω una regione di $\mathbb{C}$, sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa, e sia γ una curva semplice chiusa, Ω-omotopa ad un punto, orientata in senso antiorario. Allora*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad \forall z \textit{ interno a } \gamma \tag{1.14}$$

Dimostrazione Si fissi z interno a γ, e sia $\varepsilon > 0$ tale che $B_\varepsilon(z) \subset \Omega$ e che $B_\varepsilon(z)$ sia interno a γ. Le curve γ e $C_\varepsilon(z)$ risultano $(\Omega \setminus \{z\})$-omotope. Per il Teorema integrale di Cauchy si ha quindi

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{C_\varepsilon(z)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(z) \int_{C_\varepsilon(z)} \frac{1}{\xi - z} d\xi + \int_{C_\varepsilon(z)} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi. \tag{1.15}$$

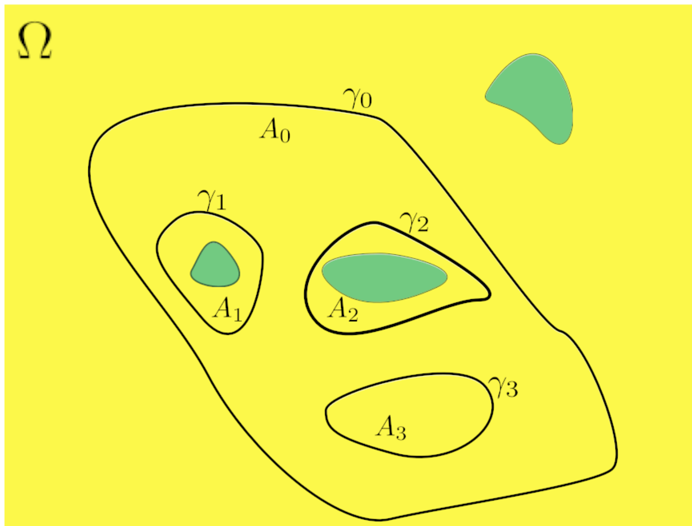
Per $\varepsilon \to 0$ quest'ultimo integrale tende a 0, poiché la lunghezza di $C_\varepsilon(z)$ tende a 0 e l'integrando è limitato, dal momento che f è differenziabile. Inoltre parametrizziamo $C_\varepsilon(z)$ con $\xi(t) = z + \varepsilon\, e^{i\,t}$, si ha

$$f(z) \int_{C_\varepsilon(z)} \frac{1}{\xi - z} d\xi = f(z) \int_0^{2\pi} \frac{1}{\varepsilon\, e^{it}} \frac{d}{dt} \left(\varepsilon\, e^{it}\right) dt = 2\pi\, i\, f(z)$$

passando al limite per $\varepsilon \to 0$ in (1.15), si ottiene quindi la formula di Cauchy (1.14). ∎

Osservazione 10 *Per ogni z esterno a γ, l'integrando della (1.14) è una funzione olomorfa di ξ in $B_\varepsilon(z)$; pertanto l'integrale è nullo, per il Teorema di Cauchy.*

Una semplice generalizzazione della formula di Cauchy è data nel corollario



Corollario 11 (Teorema e Formula di Cauchy generalizzati) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa. Sia $\{\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_M\}$ un insieme finito di curve semplici chiuse di $\mathbb{C}$, non intersecanti, regolari a tratti ed orientate in senso antiorario. Denotato con A_n l'interno della curva γ_n per $n = 0, 1, ..., M$, inoltre sia*

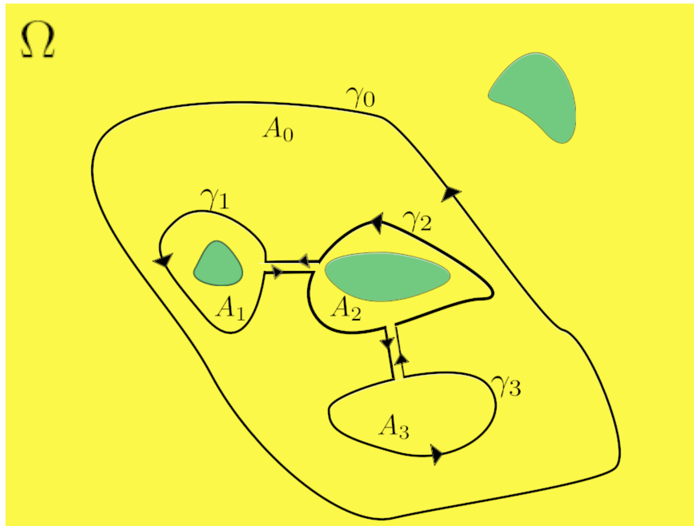
$$\bigcup_{n=1}^{M} A_n \subset A_0, \quad A_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{M} A_n \subset \Omega, \quad A_m \cap A_n = \emptyset \quad \forall\, m, n \neq 0,\, m \neq n.$$

Allora

$$\int_{\gamma_0} f(\xi) d\xi - \sum_{n=1}^{M} \int_{\gamma_n} f(\xi) d\xi = 0 \tag{1.16}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{\gamma_0} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi\imath} \sum_{n=1}^{M} \int_{\gamma_n} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \qquad \forall z \in A_0 \setminus \bigcup_{n=1}^{M} A_n. \tag{1.17}$$

Dimostrazione La prova del corollario dovrebbe risultare evidente dalla figura nella quale è disegnata una curva Ω-omotopa a γ_0 che differisce dall'unione delle curve semplici chiuse γ_n, $n > 0$, per archi percorsi due volte con orientazioni opposte.



L'integrale della funzione f su tale curva risulta quindi identico a quello su γ_0 per il teorema di Cauchy e, allo stesso tempo, a quello sull'unione delle curve semplici chiuse $\gamma_n\,,\ \ n > 0$. ∎

Un importante corollario della formula di Cauchy per funzioni olomorfe è il

Corollario 12 (Principio del massimo) *Se f(z) è olomorfa e non costante in una regione Ω del piano complesso, allora il suo valore assoluto non ha massimo in Ω.*

Dimostrazione Sia z_0 un punto interno a Ω e sia $r > 0$ tale che il disco $B_r(z_0)$ di centro z_0 sia contenuto in Ω. Dalla formula di Cauchy

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi\imath}\int_{C_r(z_0)}\frac{f(\xi)}{\xi - z_0}d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{\imath\theta})d\theta$$

La funzione al centro del disco è quindi la media dei valori che la funzione assume sulla circonferenza. In particolare

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{\imath\theta})|d\theta$$

Se $|f(z_0)|$ avesse un massimo, per r sufficientemente piccolo, i valori del modulo della funzione sul cerchio di raggio r attorno a z_0 dovrebbero essere tutti strettamente inferiori a $|f(z_0)|$ implicando la disuguaglianza $|f(z_0)| < |f(z_0)|$ evidentemente assurda. ∎

La formula di Cauchy, quando si prenda la funzione costante $f(\xi) = 1$ (certamente olomorfa su tutto $\mathbb{C}$), diventa

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}d\xi \qquad \forall z \text{ interno a } \gamma \\ 0 &= \frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}d\xi \qquad \forall z \text{ esterno a } \gamma \\ -1 &= \frac{1}{2\pi\imath}\int_{-\gamma} \frac{1}{\xi - z}d\xi \qquad \forall z \text{ interno a } \gamma \end{aligned}$$

per ogni curva semplice chiusa in $\mathbb{C}$.
Se Γ è un'unione finita di curve semplici chiuse, l'integrale, esteso a Γ, a fissato z, fornisce il numero intero che si ottiene aggiungendo una unità per tutte le curve che contengono z al loro interno e sono percorse in senso antiorario, sottraendo una unità per tutte le curve che contengono z al loro interno e sono percorse in senso orario. L'integrale fornisce quindi il numero di giri, con segno, che la curva Γ fa intorno a z; le curve che non contengono z danno naturalmente contributo nullo.

Esempio Sia γ la curva chiusa con rappresentazione parametrica $z(t) = r\, e^{\imath 4\pi t}$ con r reale positivo e $t \in [0, 1]$. Si tratta del cerchio di raggio r attorno all'origine percorso due volte il senso antiorario. Si noti che l'equazione parametrica non descrive una curva chiusa semplice (ha infinite intersezioni), ma è l'unione di due curve chiuse semplici. l'integrale definito sopra vale quindi 2 per ogni $z \in B_r(0)$ e vale 0 per ogni z esterno alla circonferenza.

Definizione Chiameremo **indice** della curva γ (unione di curve semplici chiuse) rispetto al punto $z \in \mathbb{C}$ il numero intero

$$Ind(\gamma, z) \equiv \frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma \frac{1}{\xi - z}d\xi$$

1.4 Funzioni analitiche

Una funzione $f : \Omega \to \mathbb{C}$ è detta **analitica** se per ogni $z_0 \in \Omega$ esistono un $\delta > 0$ ed una successione $\{c_n(z_0)\}_{n=0}^{\infty}$ di numeri complessi tali che $B_\delta(z_0) \subset \Omega$ e

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)\,(z - z_0)^n \qquad \forall z \in B_\delta(z_0). \tag{1.18}$$

Come è noto una serie di potenze è infinitamente derivabile all'interno del suo cerchio di convergenza, e le derivate della somma possono essere calcolate derivando termine a termine, ovvero

$$f^{(l)}(z) = \sum_{n=l}^{\infty} \frac{n!}{(n-l)!} c_n(z_0)\,(z-z_0)^{n-l} \qquad \forall z \in B_\delta(z_0),\ \forall l \in \mathbb{N} \tag{1.19}$$

Il confronto tra la (1.18) e la (1.19) fornisce l'eguaglianza

$$c_n(z_0) = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \forall n \in \mathbb{N} \tag{1.20}$$

che prova che la (1.18) coincide con lo sviluppo in serie di Taylor della funzione f intorno al punto z_0.

Teorema 13 (Teorema di Analiticità) *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa. La funzione f è allora analitica in Ω e vale, per i coefficienti dello sviluppo in serie di potenze attorno al punto $z_0 \in \Omega$*

$$c_n(z_0) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \qquad \forall r < dist(z_0, \partial\Omega),\ \ \forall n \in \mathbb{N}, \tag{1.21}$$

Osservazione 14 *Si noti che il teorema inverso: f analitica $\Longrightarrow$ f olomorfa è una conseguenza immediata della infinita derivabilità delle funzioni analitiche.*

Dimostrazione Sia $z_0 \in \Omega$ e sia $r > 0$ un numero reale più piccolo della distanza di z_0 dal bordo della regione di olomorfia $r < dist(z_0, \partial\Omega)$. Per la formula di Cauchy (1.14) si ha $\forall z \in B_r(z_0)$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi\imath} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0 + z_0 - z} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi\imath} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} d\xi = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^n} d\xi \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi\imath} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \right) (z - z_0)^n \end{aligned}$$

dove la convergenza della serie geometrica è uniforme per $|z - z_0| < r' < r$. Per ogni z in tale disco aperto vale quindi la (1.18) con i coefficienti dati dalla (1.21). La giustificazione del passaggio della somma da dentro a fuori l'integrale meriterebbe qualche semplice considerazione che è lasciata al lettore. ∎

Corollario 15 *Sia Ω un aperto di $\mathbb{C}$ e sia $f : \Omega \to \mathbb{C}$ olomorfa. Allora, per ogni $z \in \Omega$, definito r come sopra, si ha*

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi\imath} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \qquad \forall n = 1, 2, \ldots \tag{1.22}$$

Il valore della derivata n-sima in z_0 è limitato dai valori della funzione f su $C_r(z_0)$ in accordo alla disuguaglianza

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!}{r^n} \sup_{z \in C_r(z_0)} |f(z)| \tag{1.23}$$

Osservazione 16 *Come si nota la (1.22) è formalmente ottenibile passando la derivata n-sima sotto il segno di integrale (un metodo alternativo di prova sarebbe quindi quello di giustificare tale passaggio)*

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{C_r(z_0)} \left[\frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)} \right]_{z=z_0} d\xi.$$

Dimostrazione La formula per $f^{(n)}(z_0)$ era già scritta in (1.21); la stima (1.23) si ottiene maggiorando il modulo dell'integrale con l'estremo superiore del modulo della funzione integranda per la lunghezza della curva. ∎

La dimostrazione del teorema inverso a quello di Cauchy data nel Teorema 6 è ora valida senza invocare ipotesi di infinita derivabilità di una funzione olomorfa. Per completezza riportiamo l'enunciato del teorema:

Teorema 17 (Teorema di Morera) *Se una funzione f continua nella regione $\Omega \subset \mathbb{C}$, semplicemente connessa, ha integrale nullo per qualunque curva chiusa contenuta in Ω, allora f è olomorfa.*

Data infatti la funzione f, il Teorema 6 caratterizza esplicitamente una funzione olomorfa F di cui f è derivata nella regione Ω. La funzione f è quindi olomorfa essendo la derivata di una funzione olomorfa, come asserisce il teorema appena provato.

Siamo ora in grado di dimostrare alcuni teoremi fondamentali dell'analisi complessa. Diremo che una funzione olomorfa che ha $\mathbb{C}$ come dominio di olomorfia è una funzione **intera**

Corollario 18 (Teorema di Liouville) *Se la funzione intera f è limitata, allora è costante*

Dimostrazione Supponiamo che f intera sia limitata su tutto $\mathbb{C}$. Sia M tale che $\sup\limits_{z\in\mathbb{C}} |f(z)| < M$. Per ogni r reale positivo la (1.23) applicata alla circonferenza di raggio r e la (1.20) implicano che

$$|c_n(0)| < \frac{M}{r^n} \qquad \forall n = 1, 2, \dots, \qquad \forall r > 0 \tag{1.24}$$

Poiché la disuguaglianza rimane vera comunque grande sia r si conclude che tutti i coefficienti $c_n(0)$ $n = 1, 2, \dots$ sono nulli e che la funzione f è uguale al valore costante $c_0(0)$. ∎

Un corollario fondamentale del teorema di Liouville è il seguente

Corollario 19 (Teorema fondamentale dell'algebra) *Sia $P_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$ (con $a_n \neq 0$) un polinomio di grado $n \geqslant 1$. Allora esistono n numeri complessi $z_1, \dots, z_n$, le* **radici** *di P_n, tali che è verificata l'uguaglianza*

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)\cdot\cdot(z - z_n) \quad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1.25}$$

Se i coefficienti di P_n sono reali l'insieme delle radici è costituito da numeri reali o da coppie di numeri complessi coniugati, con la stessa molteplicità come zeri del polinomio. Se $z_1, \dots z_k$ sono le radici reali e $\xi_1, \overline{\xi_1}, \dots, \xi_m, \overline{\xi_m}$ le radici complesse ($k + 2m = n$), si ha dunque l'eguaglianza

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)\cdot\cdot(z - z_k)\prod_{i=1}^{m}(z - \xi_i)(z - \bar{\xi}_i) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \tag{1.26}$$

Dimostrazione Per assurdo, se P non si annullasse in nessun punto, allora $1/P(z)$ sarebbe una funzione olomorfa, quindi limitata sui sottoinsiemi limitati di $\mathbb{C}$. In particolare in ogni disco $B_r(0)$ esisterebbe un estremo superiore K_r dei valori del modulo di $1/P(z)$, per ogni r. Scriviamo il polinomio nella forma

$$P_n(z) = a_n z^n \sum_{j=0}^{n} \frac{a_{n-j}}{a_n z^j} = a_n z^n \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} z^{-1} + \dots \frac{a_0}{a_n} z^{-n} \right] \tag{1.27}$$

Si può scegliere $r > 0$ abbastanza grande perché si abbia $|P_n(z)| \geq M\,|a_n| r^n$, per qualche M reale maggiore di 0 e per ogni $z : |z| > r$. Si avrebbe quindi : $\sup \left| \frac{1}{P(z)} \right| \leq \max \left\{ K_r, M^{-1}\,|a_n|^{-1} r^{-n} \right\}$.
La funzione $1/P(z)$ sarebbe allora intera e limitata su tutto $\mathbb{C}$, quindi costante per il teorema di Liouville, contro l'ipotesi che il grado del polinomio sia maggiore di zero.
Il polinomio ha quindi almeno una radice z_1 nel piano complesso. Il compito di concludere per induzione la prova del teorema è lasciato al lettore. ∎

Teorema 20 *Sia Ω una regione di $\mathbb{C}$ e siano f e g due funzioni olomorfe in Ω. Le seguenti affermazioni sono equivalenti*

a) $f = g$;

b) l'insieme $\{z \in \Omega | f(z) = g(z)\}$ in cui le due funzioni sono uguali ha un punto di accumulazione in Ω;

c) esiste un punto $z_0 \in \Omega$ in cui tutte le derivate di f e di g sono uguali: $f^{n)}(z_0) = g^{(n)}(z_0)\ \forall n = 0, 1, 2, \dots$.

Dimostrazione Che $a) \Longrightarrow b)$ è evidente.

Per provare che $b) \Longrightarrow c)$, è sufficiente provare che se la funzione olomorfa $h = f - g$ ha uno zero z_0 che è punto di accumulazione di zeri della stessa funzione, allora tutte le derivate di h sono nulle in z_0.
Supponiamo, per assurdo, che così non sia e sia m il più piccolo dei naturali per cui $h^{(m)}(z_0) \neq 0$. Si avrebbe allora

$$h(z) = (z - z_0)^m \sum_{j=m}^{\infty} \frac{h^{(j)}(z_0)}{j!} (z - z_0)^{(m-j)} \equiv (z - z_0)^m h_m(z) \tag{1.28}$$

La funzione h_m è olomorfa e quindi continua in un intorno di z_0. È inoltre diversa da 0 in z_0. Esiste allora un intorno di z_0 in cui h_m e quindi h è diversa da 0, contro l'ipotesi che z_0 sia un punto di accumulazione di zeri della funzione h.

$c) \Longrightarrow a)$. Per ogni m consideriamo l'insieme Ω_m dei punti di Ω in cui la derivata m-sima della funzione $h = f - g$ risulta nulla. La continuità di $h^{(m)}$ assicura che Ω_m sia un insieme chiuso. L'insieme $\displaystyle\bigcap_{m=0}^{\infty} \Omega_m$ dei punti di Ω in cui si annullano tutte le derivate della h è quindi chiuso.
Se z_0 è un punto in cui tutte le derivate della h si annullano lo sviluppo di Taylor della funzione attorno a z_0 ha tutti i coefficienti nulli. La funzione h è quindi nulla in tutto un intorno di z_0. L'insieme $\displaystyle\bigcap_{m=0}^{\infty} \Omega_m$ è dunque anche aperto.
Poiché la regione Ω è connessa e, per ipotesi, $\displaystyle\bigcap_{m=0}^{\infty} \Omega_m$ non è vuoto, tale insieme non può che coincidere con tutto Ω. Ne discende che $h = 0$ in tutta la regione, che vale cioè la $a)$. ∎

Osservazione 21 *Abbiamo dimostrato che le funzioni complesse di variabile complessa infinitamente differenziabili (è sufficiente in effetti che lo siano una volta) sono analitiche e hanno quindi una serie di Taylor convergente alla funzione stessa nell'intorno di ogni punto del dominio di olomorfia. La situazione è molto differente per le funzioni reali di variabile reale: è facile infatti dare esempi di funzioni derivabili n volte ma non $(n+1)$ volte e di funzioni infinitamente derivabili la cui serie di Taylor ha raggio di convergenza nullo o non converge alla funzione stessa. Un esempio di quest'ultimo caso è dato dalla funzione da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{R}$*

$$h(x) = e^{\frac{1}{1-x^2}} \quad se \quad |x| \leq 1 \quad e \quad h(x) = 0 \quad se \quad |x| > 1 \tag{1.29}$$

$h(x)$ ha infinite derivate continue in tutti i punti. Tutte le derivate della h sono nulle nei punti $x = \pm 1$. Le serie di Taylor attorno a questi due punti hanno tutti i coefficienti nulli e convergono alla funzione nulla, che naturalmente non coincide con $h(x)$ nell'intorno di $x = \pm 1$.

Osservazione 22 *Abbiamo dimostrato che due funzioni olomorfe che coincidano in un insieme di punti della regione di olomorfia che abbia anche un* *solo punto di accumulazione coincidono su tutta la regione. In questo senso ogni funzione olomorfa è caratterizzata in maniera unica (anche se non esplicita) dai suoi valori in un sottoinsieme della regione di olomorfia con almeno un punto di accumulazione, per esempio un arco di curva semplice di lunghezza positiva, comunque piccola. La formula di Cauchy fornisce un esempio in cui i valori della funzione all'interno di una curva semplice chiusa sono esplicitamente espressi in termini dei valori sulla curva.*

1.5 Singolarità isolate e Serie di Laurent

Teorema 23 (Teorema di Laurent) *Siano $z_0 \in \mathbb{C}$, $0 \leqslant R_1 < R_2 \leqslant \infty$, si indichi con $B_{R_1,R_2}(z_0)$ la corona circolare $\{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z_0 - z| < R_2\}$, e sia $f : B_{R_1,R_2}(z_0) \to \mathbb{C}$ olomorfa. Definiamo $c_n(z_0)$ tramite l'uguaglianza (1.21)*

$$c_n(z_0) \equiv \frac{1}{2\pi\imath} \int_{C_r(z_0)} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \tag{1.30}$$

estesa a tutti gli $n \in \mathbb{Z}$ e con $R_1 < r < R_2$.
Allora

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(z_0)\,(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z_0)(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z_0)(z-z_0)^{-n} \tag{1.31}$$

$\forall z \in B_{R_1,R_2}(z_0)$

Entrambe le serie convergono e la convergenza è uniforme per $R_1 < r_1 \leq |z| \leq r_2 < R_2$. Esse sono rispettivamente chiamate **parte regolare** e **parte singolare** dello **sviluppo di Laurent di f attorno a** z_0.

Osservazione 24 *Se f è analitica in tutto il cerchio $B_{R_2}(z_0)$, allora lo sviluppo in serie di Laurent è ridotto alla sua parte regolare; infatti in tal caso per ogni $n \geqslant 1$ la funzione $f(\xi)/(\xi - z_0)^{-n+1}$ è olomorfa in $B_r(z_0)$ per $R_1 < r < R_2$, e quindi $c_{-n}(z_0) = 0$ per il Teorema di Cauchy.*

Dimostrazione Per ogni z tale che $R_1 < |z - z_0| < R_2$, siano $r_1, r_2 > 0$ tali che $R_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < R_2$; la (1.17) con $\gamma_0 = C_{r_2}(z_0)$ e $\gamma_1 = C_{r_1}(z_0)$ fornisce l'uguaglianza

$$f(z) = \frac{1}{2\pi\imath} \int_{C_{r_2}(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{2\pi\imath} \int_{C_{r_1}(z_0)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi \tag{1.32}$$

Con lo stesso procedimento utilizzato nella prova del Teorema 13, il primo integrale in (1.32) si dimostra uguale alla prima delle serie in (1.31).
Per studiare il secondo integrale notiamo che

$$\left|\frac{\xi - z_0}{z - z_0}\right| = \frac{r_1}{|z - z_0|} < 1 \qquad \forall \xi \in C_{r_1}(z_0),$$

Converge quindi la serie geometrica

$$-\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{z - z_0}\frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^m}{(z - z_0)^{m+1}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{-n}}{(\xi - z_0)^{-n+1}}$$

che dà origine alla seconda serie delle (1.31). ∎

1.6 Classificazione delle Singolarità Isolate

Sia $R > 0$ e sia $f : B_R(z_0)\backslash\{z_0\} \to \mathbb{C}$ olomorfa. Il comportamento della funzione attorno a z_0 può essere solo uno dei tre seguenti

i) esiste il $\lim_{z\to z_0} f(z) \in \mathbb{C}$

ii) esiste il $\lim_{z\to z_0} |f(z)| = \infty$

iii) nessuno dei due casi precedenti è verificato.

Il caso i) sussiste se e solo se f è limitata in $B_R(z_0)\backslash\{z_0\}$, ovvero se e solo se la parte singolare dello sviluppo di Laurent è identicamente nulla. Ponendo $f(z_0) \equiv \lim_{z\to z_0} f(z) = c_0(z_0)$, si ottiene una funzione olomorfa in tutto $B_R(z_0)$. Si dice allora che f ha in z_0 una **singolarità eliminabile**.

Se vale la condizione ii) si dice che la funzione f ha un **polo** nel punto z_0.
La funzione inversa $1/f$ è olomorfa in $B_r(z_0) \setminus \{z_0\}$, per r sufficientemente piccolo (dove $|f(z)| > M > 0$) e $\lim\limits_{z\to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0$. La funzione $1/f$ ha quindi una singolarità removibile in z_0 e può essere estesa a una funzione olomorfa su tutto $B_r(z_0)$.
z_0 è uno zero (necessariamente isolato) della funzione olomorfa $1/f$ così estesa. Come abbiamo dimostrato esiste allora un intero positivo m tale che

la derivata di $1/f$ nel punto z_0 è diversa da zero (tutte quelle precedenti essendo nulle). Si dice che lo zero ha **ordine** m. Intorno a z_0 si ha $\dfrac{1}{f(z)} = (z - z_0)^m f_m(z)$ con f_m analitica e tale che $f_m(z_0) \neq 0$.
Si ha dunque che f, in un intorno di z_0, può essere scritta $f(z) = (z - z_0)^{-m} \dfrac{1}{f_m(z)}$. Poiché $1/f_m$ è olomorfa in un intorno di z_0 la funzione f ammette uno sviluppo di Laurent la cui parte singolare ha come potenza negativa di modulo massimo quella di esponente $-m$. Si dice che f ha un **polo di ordine** m.
In conclusione se una funzione è olomorfa in una regione privata di un punto e ha limite infinito in quel punto, allora la sua serie di Laurent ha parte singolare costituita da un numero finito di termini.
La nostra discussione dovrebbe avere convinto che l'insieme dei punti di singolarità di una funzione f che abbia solo singolarità di tipo polare e sia olomorfa in ogni altro punto di una regione Ω è un insieme discreto (coincidente con gli zeri della funzione $1/f$).

Nel caso iii) invece $c_{-n} \neq 0$ per infiniti interi $n > 0$. Si dice che f ha in z_0 una **singolarità essenziale**. In questo caso il $\lim_{z \to z_0} |f(z)|$ non esiste, né finito né infinito.
Il comportamento di f in un intorno di una tale singolarità è estremamente irregolare, come è indicato dal seguente teorema che non dimostreremo

Teorema 25 (di Picard) *Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$, ed f una funzione olomorfa in $B_R(z_0) \backslash \{z_0\}$. Se z_0 è una singolarità essenziale per f, allora quest'ultima assume in $B_r(z_0) \backslash \{z_0\}$ tutti i valori di $\mathbb{C}$, salvo al più uno, per qualunque valore di $r : 0 < r < R$.*

Esempio Ad esempio la funzione $f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}/n!$ ha una singolarità essenziale in 0 e non è mai nulla. Si prova facilmente che in ogni cerchio di centro 0 la funzione assume tutti i valori complessi non nulli

Le singolarità isolate non esauriscono tutti i tipi di singolarità che le funzioni olomorfe possono avere.
Abbiamo visto per esempio che le potenze a esponente razionale e il logaritmo di z sono certamente non olomorfe nell'origine (ogni derivata di ordine sufficientemente elevato non è definita nell'origine). L'origine non è però una

singolarità isolata dovendosi escludere dal dominio di olomorfia anche una semiretta uscente dall'origine, dove tali funzioni risulterebbero discontinue.

1.6.1 Il teorema dei residui

Si consideri un funzione $f(z)$ olomorfa in un disco di raggio r privato del suo centro $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$ e sia $c_{-1}(z_0)$ il coefficiente di $(z - z_0)^{-1}$ nello sviluppo di Laurent attorno a z_0 della funzione f. Dalla (1.30)

$$c_{-1}(z_0) \equiv \frac{1}{2\pi\imath} \int_{C_r(z_0)} f(\xi) d\xi \tag{1.33}$$

dove $C_r(z_0)$ è una qualunque circonferenza di raggio $r < R$ percorsa in senso antiorario.

$c_{-1}(z_0)$ si dirà **residuo** della funzione f in z_0 e verrà indicato con $Res_{z_0}(f)$.

Osservazione 26 *Si noti che il termine $c_{-1}(z-z_0)^{-1}$ è l'unico termine nello sviluppo di Laurent che è derivata di una funzione polidroma (il logaritmo di $(z - z_0)$). Tutti gli altri termini, essendo derivate di funzioni olomorfe in un intorno di z_0 (z_0 escluso) hanno integrali nulli su qualunque circonferenza $C_r(z_0)$, come può essere verificato direttamente.*
Il residuo $Res_{z_0}(f)$ di una funzione $f(z)$ in una singolarità isolata z_0 viene quindi talvolta definito come il numero che rende la funzione $f(z) - \dfrac{Res_{z_0}(f)}{z - z_0}$ la derivata di una funzione monodroma olomorfa in $B_R(z_0) \setminus \{z_0\}$.

Siamo ora in grado di provare il

Teorema 27 (Teorema dei residui) *Sia f olomorfa nella regione Ω privata di un insieme discreto di punti z_j dove la funzione presenta singolarità isolate (il dominio di olomorfia è dunque $\Omega \setminus \cup_j \{z_j\}$). Allora*

$$\frac{1}{2\pi\imath} \int_\gamma f(z)\, dz = \sum_j Ind(\gamma\,,\, z_j)\, Res_{z_j}(f) \tag{1.34}$$

per ogni γ unione di curve semplici chiuse Ω-omotope a un punto che non passino per alcuno dei punti z_j.

In particolare se γ è una curva semplice chiusa, percorsa in senso antiorario, che non passa per alcuno dei punti z_j allora

$$\frac{1}{2\pi\imath}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_j Res_{z_j}(f) \tag{1.35}$$

dove la somma è estesa agli indici j tali che il punto z_j si trovi all'interno della curva γ.

Dimostrazione Il teorema è una semplice applicazione della formula di Cauchy (1.17) all'unione della curva γ con cerchi $C_{r_j}(z_j)$, attorno alle singolarità, che non abbiano intersezioni con γ (per questo basterà prendere i raggi r_j sufficientemente piccoli).
Dallo sviluppo di Laurent, come abbiamo già osservato, si deduce che la funzione f, nell'intorno di ciascuna singolarità z_j, è scrivibile come

$$f(z) = F'(z) + \frac{c_{-1}(z_j)}{z - z_j} \tag{1.36}$$

dove F è una primitiva (monodroma) della somma della serie di Laurent privata del termine $n = -1$ (che ha invece come primitiva la funzione polidroma logaritmo).
L'integrale di $F'(z)$ lungo una qualunque curva chiusa essendo nullo, la prova del teorema discende direttamente dalla formula di Cauchy generalizzata ∎

La conoscenza dei residui di una funzione f olomorfa in una regione Ω, eccetto che in un insieme di punti isolati, permette di calcolare integrali della funzione su curve chiuse del piano complesso.
Se in z_0 la funzione f ha una singolarità essenziale l'unico modo per calcolare il residuo della f in z_0 è avere la forma esplicita dell'espansione in serie di potenze attorno a z_0.
Ad esempio sappiamo che il residuo della funzione $e^{1/z}$ nell'origine è 1 poiché conosciamo l'intera serie di Laurent : $e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!}$.

Se la funzione f ha un polo semplice (di ordine 1) in z_0 è immediato verificare che il coefficiente $c_{-1}(z_0)$ nello sviluppo di Laurent della f è il $\lim_{z\to z_0} f(z)\,(z - z_0)$.

Se la funzione f ha un polo di ordine $n > 1$ in z_0 allora la funzione $(z - z_0)^n f(z)$ è olomorfa in un intorno di z_0 (in effetti ha una singolarità eliminabile in z_0 e la sua estensione è olomorfa). Il coefficiente $c_{-1}(z_0)$ dello sviluppo di Laurent della f è identico al coefficiente $c_{n-1}(z_0)$ dello sviluppo di Taylor della funzione olomorfa $(z - z_0)^n f(z)$. Si ha quindi

$$Res_{z_0}(f) = c_{-1}(z_0) = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \left[(z - z_0)^n \; f(z)\right]^{(n-1)} \tag{1.37}$$

Nel caso di funzioni con sole singolarità polari i residui sono quindi calcolabili direttamente.

Chiameremo **meromorfa** una funzione f olomorfa nella regione Ω privato di un insieme di punti in cui la funzione presenta singolarità polari (si noti che tale insieme risulta automaticamente costituito da punti isolati).
Il calcolo di molti integrali indefiniti è, come vedremo, riportabile al calcolo di integrali di funzioni meromorfe su curve chiuse nel piano complesso. Il teorema dei residui permetterà di tradurre tale calcolo nella valutazione dei residui delle funzioni stesse.

1.6.2 Calcolo di Integrali

Per il calcolo esplicito di alcuni integrali rilevanti nel seguito del nostro programma risultano necessari alcuni semplici lemmi che proviamo qui di seguito.
Definiamo i settori del piano complesso di vertice nell'origine

$$S_0^{\Theta_1 \Theta_2} \equiv \{z \in \mathbb{C} | \, \Theta_1 \leq \arg z \leq \Theta_2\}$$

Sia $C_r = S_0^{\Theta_1 \Theta_2} \bigcap \{z \in \mathbb{C} | \, |z| = r\}$ l'arco di circonferenza di raggio r e centro l'origine compreso nel settore e orientato in senso antiorario.
Sia f una funzione continua dal settore $S_0^{\Theta_1 \Theta_2}$ in $\mathbb{C}$.

Lemma 28 (Lemmi del cerchio grande e del cerchio piccolo) *Se* $\lim_{z \to \infty} z\, f(z) = \alpha$, *per* z *nel settore, allora*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{C_R} f(z) dz = i\alpha(\Theta_2 - \Theta_1) \tag{1.38}$$

Se $\lim_{z\to 0} z\, f(z) = \beta$, *per* z *nel settore, allora*

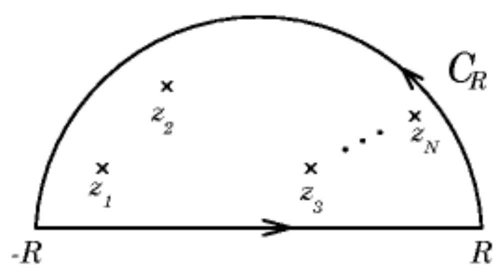
$$\lim_{r\to 0} \int_{C_r} f(z)dz = i\beta(\Theta_2 - \Theta_1) \tag{1.39}$$

Dimostrazione Ponendo $z = |z|\, e^{i \arg z}$ l'integrale della funzione f sull'arco di raggio ρ interno al settore diventa

$$\int_{C_\rho} f(z)\, dz = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} f(\rho, \theta)\, i\, \rho\, e^{i\theta}\, d\theta = i \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} f(z)\, z\, d\theta$$

Poiché $|z|\, |f(z)|$ è uniformemente limitata sugli archi C_R e C_r nei casi considerati nel lemma è possibile passare il limite sotto segno di integrale e ottenere il risultato. $\blacksquare$

Lo stesso risultato vale naturalmente se i settori hanno vertice in un qualunque punto z_0 del piano complesso e $\lim_{z\to\infty} (z - z_0)\, f(z) = \alpha$ o $\lim_{z\to z_0} (z - z_0)\, f(z) = \beta$.



Lemma 29 (Lemma di Jordan) *Si consideri un arco di circonferenza* C_R *nel settore* $S_0^{\Theta_1 \Theta_2}$ $0 \le \Theta_1 \le \arg z \le \Theta_2 \le \pi$ *come quello indicato in figura (dove si è considerato il caso* $\Theta_1 = 0\,,\ \Theta_2 = \pi$*)*
Sia f *una funzione a valori complessi, definita e continua nel settore, tale che* $\lim_{z\to\infty} f(z) = 0$ *per* z *nel settore, allora*

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} e^{ikz} f(z)dz = 0 \qquad k > 0 \tag{1.40}$$

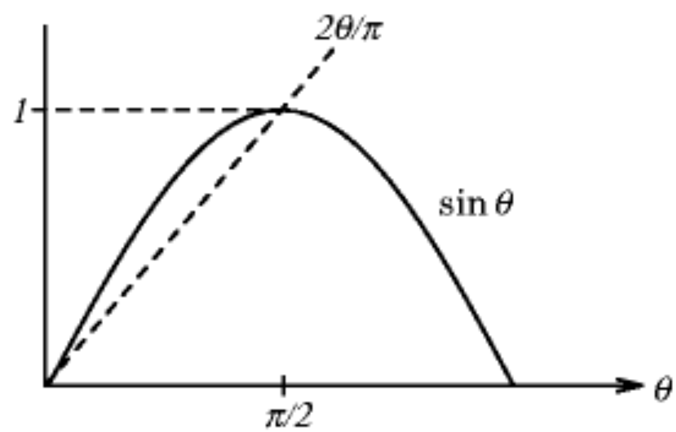
Dimostrazione Data la continuità uniforme della f in $\Theta_1 \leq \theta \leq \Theta_2$ si ha che $|f(z)| \leqslant K_R$, $z \in C_R$, con K_R indipendente da θ e $\lim\limits_{R\to\infty} K_R = 0$. Abbiamo quindi

$$I = \int_{C_R} e^{ikz} f(z) dz \leqslant \int_{C_R} |e^{ikz}|\,|f(z)| dz \leqslant K_R\, R \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} e^{-k\,y}\, d\theta \qquad (1.41)$$

Poichè

In coordinate polari $y = R\sin\theta$ e

$$\int_{\Theta_1}^{\Theta_2} e^{-k\,y} d\theta = \int_{\Theta_1}^{\Theta_2} e^{-k\,R\,\sin\theta} d\theta \leq 2 \int_0^{\pi/2} e^{-k\,R\,\sin\theta} d\theta$$



Come risulta evidente dalla figura, nella regione $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, vale la seguente stima $\sin\theta \geqslant 2\theta/\pi$ e quindi

$$I \leqslant 2\, K_R\, R \int_0^{\pi/2} e^{-k\,R\sin\theta} d\theta \leq \frac{2\, K_R R\, \pi}{2\, k\, R}(1 - e^{-k\,R})$$

ed $I \to 0$ quando $R \to \infty$ poichè $K_R \to 0$. ∎

Appendice A

Successioni, serie numeriche e serie di potenze

In questa appendice riassumeremo le definizioni fondamentali ed i principali risultati sulle serie di potenze e le serie numeriche ([1]).

A.1 Definizioni sulle successioni numeriche a valori reali

Rivediamo alcune definizioni sulle successioni di numeri reali.
Si consideri una successione di numeri reali $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Si definisca con A_k l'estremo superiore della successione $\{\alpha_n\}_{n=k}^{\infty}$ ottenuta dalla successione originaria a cui sono stati sottratti i termini $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{k-1}$. Ovviamente vale la proprietà $A_1 \geqslant A_2 \geqslant A_3 \geqslant ...$, ovvero tale successione è non crescente e denotiamo il suo limite con A. A è definito essere il **limite superiore** della successione $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$(può essere finito, oppure uguale a $\pm\infty$). Il limite inferiore viene definito in modo analogo : sia a_k l'estremo inferiore della successione $\{\alpha_n\}_{n=k}^{\infty}$. La successione degli a_k è non decrescente. Il suo limite è definito **limite inferiore** della successione $\{\alpha_n\}_{n=k}^{\infty}$.

Il limite inferiore e superiore coincidono solo per le successioni convergenti ad un valore finito o divergenti a $+\infty$ o $-\infty$. In seguito è adottata la notazione $\limsup\limits_{n\to\infty}$ per il limite superiore e $\liminf\limits_{n\to\infty}$ per il limite inferiore.
Valgono le seguenti proprietà (la cui prova è lasciata al lettore):

i) $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n + \liminf_{n\to\infty} \beta_n \leqslant \liminf_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) \leqslant \liminf_{n\to\infty} \alpha_n + \limsup_{n\to\infty} \beta_n$

ii) $\liminf_{n\to\infty} \alpha_n + \limsup_{n\to\infty} \beta_n \leqslant \limsup_{n\to\infty}(\alpha_n + \beta_n) \leqslant \limsup_{n\to\infty} \alpha_n + \limsup_{n\to\infty} \beta_n$

A.2 Successioni

Le definizioni che brevemente ricorderemo qui di seguito possono essere date in un qualunque spazio metrico completo. Noi le specializzeremo al caso in cui tale spazio coincida con $\mathbb{C}$, l' insieme dei numeri complessi.

Definizione di limite di una successione: La successione $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $a_n \in \mathbb{C}\ \forall n$ si dice avere limite A se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n_0 tale che $|a_n - A| < \varepsilon$ per $n \geqslant n_0$.

Definizione di successione divergente: La successione $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $a_n \in \mathbb{C}\ \forall n$ si dice divergente se per ogni $M > 0$ esiste un n_0 tale che $|a_n| > M$ per $n \geqslant n_0$.

Le successioni con limite finito si dicono *convergenti*.[1]

Definizione di successione di Cauchy: Una successione si dice di Cauchy se $\forall \varepsilon > 0\ \exists\, n_0$ tale che $|a_n - a_m| < \varepsilon$ ogni volta che $m > n \geqslant n_0$.

In $\mathbb{C}$ (come in ogni spazio metrico completo) vale che:

Teorema 30 *Una successione è convergente se e solo se è una successione di Cauchy.*

A.3 Serie

Utilizzando il criterio di Cauchy è possibile dedurre la convergenza di una successione dalla convergenza di un'altra successione.
Siano $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ due successioni di numeri complessi. Se si verifica la condizione:

$$|b_m - b_n| \leqslant |a_m - a_n|$$

[1] vi sono successioni che non sono né convergenti né divergenti, come ad esempio $z_n = \imath^n$

per tutte le coppie di indici allora la successione $\{b_n\}$ si dice una contrazione della successione $\{a_n\}$.
In questo caso se $\{a_n\}$ è una successione di Cauchy, tale sarà anche la successione $\{b_n\}$.

Definiamo ora la serie

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \tag{A.1}$$

sia s_n (la somma parziale n-sima definita come segue)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Con $\{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ indicheremo la successione delle somme parziali n-sime.

Convergenza di una serie: La serie S si dice convergente se è convergente la successione delle somme parziali n-sime. Il limite, se esiste, si dirà somma della serie.

Applicando alla successione delle somme parziali il criterio di Cauchy si ottiene la seguente condizione per la convergenza: la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un n_0 tale che $|a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+p}| < \varepsilon$ per tutti gli $n \geqslant n_0$ e $p \geqslant 0$. Per $p = 0$ si ritrova in particolare che $|a_n| < \varepsilon$. In questo modo si ottiene che una condizione necessaria: per la convergenza della serie che **il termine generale deve essere infinitesimo**.
La serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ può essere confrontata con la serie

$$|a_1| + |a_2| + ... + |a_n| + ... \tag{A.2}$$

Poiché vale che $|a_n + a_{n+1} + ... + a_{n+p}| \leqslant |a_n| + |a_{n+1}| + ... + |a_{n+p}|$ la successione delle somme parziali n-sime $\{s_n\}$ è una contrazione della (A.2). Quindi la convergenza della (A.2) implica la convergenza della (A.1). Una serie con la proprietà di avere convergente la serie dei moduli è detta **assolutamente convergente**.

A.4 Convergenza uniforme

Si consideri la successione di funzioni complesse di variabile complessa $f_n(z)$ definite su una stessa regione $\Omega \subset \mathbb{C}$. Se la successione $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ converge $\forall z \in \Omega$ allora il limite $f(z)$ è ancora una funzione definita su Ω.

Convergenza puntuale La successione di funzioni $\{f_n(z)\}$ converge **puntualmente** alla funzione $f(z)$ sull'insieme Ω se $\forall \varepsilon > 0$ e $\forall\ z \in \Omega\ \ \exists n_0(z)$ tale che $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ per tutti gli $n \geqslant n_0(z)$.

Convergenza uniforme La successione di funzioni $\{f_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ si dice convergere **uniformemente** alla funzione $f(z)$ sull'insieme Ω se $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0$ tale che $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ per tutti gli $n \geqslant n_0$, per ogni $z \in \Omega$.

La convergenza uniforme di una successione di funzioni continue è condizione sufficiente perché il limite sia una funzione continua.
Un test di convergenza uniforme è il seguente: se la successione di funzioni $\{f_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ è una contrazione di una successione convergente di costanti reali $\{a_n\}$, allora la successione è uniformemente convergente. L'ipotesi da verificare è che $|f_m(z) - f_n(z)| \leqslant |a_m - a_n|\ \forall z \in \Omega$.

Possiamo adoperare un criterio simile per le serie, che prende il nome di *M-test di Weierstrass*. Supponiamo che la serie $\displaystyle\sum_n f_n(z)$ ammetta come *maggiorante* la serie a termini positivi $\sum_n a_n$, ovvero che sia $|f_n(z)| \leqslant M a_n$ per qualche costante M e per n sufficientemente grande. Se la serie $\sum_n a_n$ converge, allora la serie $\sum_n f_n(z)$ converge uniformemente.

A.5 Serie di potenze

Per serie di potenze intorno ad un punto $z_0 \in \mathbb{C}$ si intende la seguente scrittura formale:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

con $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ successione di numeri complessi. Prima di tutto occorre definire dove tale scrittura acquista un senso, ovvero dove la serie indicata converge. A tale scopo si consideri il seguente:

Teorema 31 (Teorema di Abel) *Sia* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$. *Esiste* $R \in [0,\infty]$ *detto raggio di convergenza tale che:*

i) *la serie converge assolutamente per* $z : |z-z_0| < R$ *ed uniformemente per* $z : |z-z_0| \leqslant \rho < R$

ii) *la serie diverge per* $z : |z-z_0| > R$

iii) *per* $z : |z-z_0| < R$ *la somma della serie* $f(z)$ *è analitica e la sua derivata vale* $f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n\, (z-z_0)^{n-1}$

iv) *il raggio di convergenza della serie delle derivate è lo stesso della serie di partenza*

v) $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} |a_n|^{1/n}$ *(criterio di Cauchy-Hadamard) o* $\frac{1}{R} = lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ *(criterio di d'Alambert)*[2]

[2] i due criteri sono equivalenti

Bibliografia

[1] L. Ahlfors, *Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1979.

[2] N. Melone *Introduzione ai metodi dell'Algebra Lineare*, CUEN, 1998.