

Capitolo 2

Operatori lineari in Spazi di Hilbert

In questo capitolo studieremo la geometria degli spazi di Hilbert e introdurremo le proprietà degli operatori limitati e illimitati negli spazi di Hilbert. In un capitolo successivo affronteremo la teoria spettrale per tali operatori. Non distingueremo il caso di spazi di Hilbert finito dimensionale (spazi unitari) da quello di spazi di Hilbert infinito-dimensionali. Commenti, richiami e risultati che si riferiscono esclusivamente al caso finito-dimensionale risulteranno in colore rosso.

2.1 Geometria degli Spazi di Hilbert

2.1.1 Richiami sugli Spazi Vettoriali

Uno spazio vettoriale è un insieme V dove siano definite un'operazione interna $(+)$ commutativa e associativa e un'operazione esterna di moltiplicazione degli elementi di V per gli elementi di un campo F . (Il nostro interesse sarà essenzialmente limitato al caso $F = \mathbb{C}$ campo dei numeri complessi). Le due

operazioni, distributive una rispetto all'altra (per entrambe le operazioni su F), soddisfano in sintesi le seguenti proprietà :

1)

$$\begin{array}{ll} \phi, \psi \in V & \phi + \psi = \psi + \phi \in V \\ \phi, \psi, \eta \in V & \phi + (\psi + \eta) = (\phi + \psi) + \eta \equiv \phi + \psi + \eta \\ \exists 0 \in V & \phi + 0 = \phi \quad \forall \phi \in V \end{array}$$

2)

$$\begin{array}{ll} a \in F, \phi \in V & a\phi \in V \\ a, b \in F \quad \phi, \psi \in V & a(\phi + \psi) = a\phi + a\psi \\ & (a + b)\phi = a\phi + b\phi \\ & a(b\psi) = (ab)\psi \end{array}$$

3)

$$\begin{array}{ll} \text{se } o \text{ è l'elemento neutro della somma in } F \text{ e } \psi \in V & o \cdot \psi = 0 \\ \text{se } 1 \text{ è l'elemento neutro del prodotto in } F \text{ e } \psi \in V & 1 \cdot \psi = \psi \end{array}$$

Gli elementi di F saranno denominati **scalari** gli elementi di V **vettori**.

Esempi:

- $(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ le n-ple di numeri reali $\{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ (componenti del vettore x).
La somma si ottiene sommando le componenti omologhe: se $x = \{x_i\}_{i=1, \dots, n}$ e $y = \{y_i\}_{i=1, \dots, n}$ allora $x + y = \{x_i + y_i\}_{i=1, \dots, n}$ e il prodotto per uno scalare $\lambda \in \mathbb{R}$ si ottiene moltiplicando ogni componente del vettore: $\lambda x \equiv \{\lambda x_i\}_{i=1, \dots, n}$.
- $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ le n-ple di numeri complessi $\{z_i\}_{i=1, \dots, n}$, con i numeri complessi come scalari. La somma e il prodotto per uno scalare sono definiti come nell'esempio precedente.
- $(\mathbb{C}^\infty, \mathbb{C})$ le successioni di numeri complessi $\{z_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, con i numeri complessi come scalari. Somma e prodotto definiti come nei due esempi precedenti.

- $(C(\mathbb{R}^n), \mathbb{R})$ le funzioni reali definite su \mathbb{R}^n con \mathbb{R} come campo degli scalari
 $((f + g)(x) = f(x) + g(x)$ e $(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$)
- $(C(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$ le funzioni complesse su \mathbb{R}^n con \mathbb{C} come campo degli scalari
(somma e prodotto definiti come nell'esempio precedente)
- $(M(n, \mathbb{C}), \mathbb{C})$ le matrici complesse $n \times n$ con \mathbb{C} come campo degli scalari.
Se $M = \{M_{ij}\}, N = \{N_{ij}\}$ $i, j = 1, \dots, n$ allora $M + N = \{M_{ij} + N_{ij}\}$
e $zM = \{z M_{ij}\}$

N vettori $\{\psi_i\}$, $\psi_i \in V \quad \forall i = 1, \dots, N$ si dicono **linearmente dipendenti** se esistono $\{a_i\}$, $a_i \in F \quad \forall i = 1, \dots, N$ non tutti nulli, tali che

$$\sum_{i=1}^N a_i \psi_i = 0$$

Al contrario si dicono **linearmente indipendenti** se la precedente uguaglianza implica che gli a_i sono tutti nulli.

V si dice **n -dimensionale** se esistono n vettori in V linearmente indipendenti, ma non esistono $n + 1$ vettori di V linearmente indipendenti.

V si dice **infinito-dimensionale** se esistono n vettori di V linearmente indipendenti per ogni n .

Per spazi a dimensione n , finita, ogni insieme $\{\phi_i\}$ di n vettori indipendenti costituisce una **base**: ogni vettore di V può essere scritto, in maniera unica, come combinazione lineare dei vettori $\{\phi_i\}$. L'applicazione che ad ogni vettore di V associa gli n coefficienti della combinazione lineare, che lo rappresenta in una base assegnata, è un isomorfismo tra V e F^n l'insieme n -ple di elementi del campo. L'isomorfismo dipende naturalmente dalla base scelta.

2.1.2 Metriche invarianti per traslazione e Norme

Diremo che una metrica è **invariante per traslazione**, in uno spazio vettoriale V , se le distanze dei punti di V da un qualunque punto $x \in V$, assegnato, hanno lo stesso valore delle distanze dall'origine dei vettori traslati di x . Se si ha cioè

$$d(y, x) = d(y - x, 0)$$

Ci riferiremo da ora in poi al caso in cui $F = \mathbb{C}$. Useremo le notazioni \bar{z} per il complesso coniugato di un numero complesso z , $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$ per il modulo di z e $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ e $\arg z$ rispettivamente per la parte reale, la parte immaginaria e l'argomento di z : $z = \operatorname{Re} z + i \operatorname{Im} z = |z| e^{i \arg z}$.

Si definisce **norma**, in uno spazio vettoriale V , su \mathbb{C} , l'applicazione che ad ogni elemento ϕ di V associa il numero positivo o nullo (*la sua lunghezza*) $\|\phi\|$

$$\|\cdot\| : V \ni \phi \longrightarrow \|\phi\| \in \mathbb{R}^+$$

con le proprietà

- 1) $\phi \in V$: $\|\phi\| \geq 0$ e $\|\phi\| = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$
- 2) $\phi \in V, a \in \mathbb{C}$ $\|a\phi\| = |a| \|\phi\|$
- 3) $\forall \phi, \psi \in V$ $\|\phi + \psi\| \leq \|\phi\| + \|\psi\|$ ($\Rightarrow \|\|\phi\| - \|\psi\|\| \leq \|\phi - \psi\|$)

In uno spazio vettoriale una norma definisce una distanza invariante per traslazione se si pone

$$d(y, x) = \|y - x\|$$

Uno spazio lineare V , con una norma $\|\cdot\|$, che sia completo rispetto alla distanza indotta dalla norma (ogni successione di Cauchy in V ha un limite in V) si dice **spazio di Banach**.

Esempi:

- $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$ con la norma euclidea ($z = \{z_i\}_{i=1,\dots,n}$ con $\|z\|_n = \sqrt{\sum_{i=1}^n |z_i|^2}$).
La completezza è una immediata conseguenza della completezza di \mathbb{R}^{2n} rispetto alla norma euclidea
- l^2 il sottospazio vettoriale di $(\mathbb{C}^\infty, \mathbb{C})$ delle successioni $\phi = \{\phi_i\}_{i=0,1,\dots}$ tali che $\|\phi\| \equiv \sqrt{\sum_{i=0}^{\infty} |\phi_i|^2} < \infty$.

I vettori $E^{(j)} \in l^2$ $j = 0, 1, \dots$ di componenti

$$E_i^{(j)} = 0 \quad i \neq j \quad \text{e} \quad E_j^{(j)} = 1 \quad i, j = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

sono infiniti vettori, di norma unitaria e linearmente indipendenti, di l^2 , che è quindi di dimensione infinita. La completezza di l^2 rispetto alla metrica indotta dalla norma deve essere dimostrata. Lo faremo nel seguito di questa sezione.

Ricordiamo qui che gli spazi vettoriali a dimensione finita, che, come abbiamo già osservato, sono isomorfi a \mathbb{C}^n , sono anche omeomorfi a \mathbb{C}^n nel senso che vale il

Teorema 1 (Teorema di Tichonov) : *se V è uno spazio vettoriale di dimensione finita, tutte le possibili norme sono equivalenti e lo rendono uno spazio di Banach.*

Dimostrazione Indichiamo con $\|\cdot\|_V$ la norma nello spazio vettoriale V e con $\|\cdot\|_n$ la norma in $(\mathbb{C}^n, \mathbb{C})$. Siano $\{e_j\}_{j=1}^n$ n vettori linearmente indipendenti in V . Ogni vettore $\phi \in V$ ha quindi una rappresentazione $\phi = \sum_{j=1}^n \phi_j e_j$ per un'unica n -upla di numeri complessi $\{\phi_j\}_{j=1}^n$.

Consideriamo l'applicazione I che ad ogni vettore $\phi \in V$ associa la n -upla $I(\phi) \equiv \{\phi_j\}_{j=1}^n \in \mathbb{C}^n$ (che come abbiamo già visto è un isomorfismo tra spazi

vettoriali). Dalle proprietà della norma

$$\|\phi\|_V \leq \sum_{j=1}^n |\phi_j| \|e_j\|_V \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n |\phi_j|^2} \sqrt{\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2} \leq C \|I(\phi)\|_n \quad (2.2)$$

per qualche costante $C > 0$. Se la seconda maggiorazione non risultasse chiara vedere la disuguaglianza di Schwarz nel prossimo paragrafo.

Viceversa consideriamo l'applicazione che ad ogni n -upla $\{\phi_j\}_{j=1}^n$ con $\sum_{j=1}^n |\phi_j|^2 = 1$ (la sfera unitaria di \mathbb{C}^n) associa il numero reale positivo $\|\phi\|_V$ con $\phi = \sum_{j=1}^n \phi_j e_j$. Poiché non tutti i ϕ_i possono essere contemporaneamente nulli, $\|\phi\|_V$ risulta strettamente positiva e, per la disuguaglianza (2.2), è una funzione continua sulla sfera unitaria. Una funzione continua in un compatto assume il suo estremo inferiore K (in questo caso strettamente positivo) in qualche punto del compatto. Quindi per ogni n -upla $I(\psi) = \{\psi_j\}_{j=1}^n$ si ha

$$\frac{\|\psi\|_V}{\|I(\psi)\|_n} = \left\| \frac{\psi}{\|I(\psi)\|_n} \right\|_V \geq K \quad (2.3)$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che $I\left(\frac{\psi}{\|I(\psi)\|_n}\right)$ appartiene alla sfera unitaria di \mathbb{C}^n . Utilizzando (2.2) e (2.3) otteniamo l'equivalenza delle due norme

$$C \|I(\psi)\|_n \geq \|\psi\|_V \geq K \|I(\psi)\|_n \quad (2.4)$$

Nel caso infinito dimensionale vedremo che la situazione risulta decisamente differente.

Osservazione 2 *Notiamo fin da ora una differenza (topologica) notevole del caso infinito dimensionale, rispetto al caso finito dimensionale, che non permette di estendere il teorema di Tichonov a spazi di Banach di dimensione*

infinita: in l^2 , consideriamo i vettori $E^{(j)}$ di componenti $E_i^{(j)} = 0$ $i \neq j$ e $E_j^{(j)} = 1$. Sono tutti vettori di norma unitaria (stanno sulla superficie della sfera di raggio 1 di l^2) e la distanza di ciascuno di loro da ogni altro vale $\sqrt{2}$. Gli $E^{(j)}$ costituiscono dunque una successione di vettori in un insieme chiuso e limitato che non ha punti di accumulazione (la sfera unitaria di l^2 non è quindi compatta) contrariamente a quanto avviene negli spazi euclidei (reali o complessi) di dimensione finita.

2.1.3 Prodotto scalare e Spazi di Hilbert

Un prodotto scalare in uno spazio vettoriale V su \mathbb{C} è un'applicazione da $V \times V \rightarrow \mathbb{C}$ che alla coppia $\{\phi, \psi\}$ associa il numero complesso (ϕ, ψ) con le proprietà

- 1) $(\phi, \psi + \eta) = (\phi, \psi) + (\phi, \eta)$ $\phi, \psi, \eta \in V$
- 2) $(\phi, a\psi) = a(\phi, \psi)$ $a \in \mathbb{C}, \phi, \psi \in V$
- 3) $(\phi, \psi) = \overline{(\psi, \phi)}$
- 4) $(\phi, \phi) \geq 0$ con $(\phi, \phi) = 0 \Leftrightarrow \phi = 0$

Se $(,)$ è un prodotto scalare in V , $\|\phi\| = (\phi, \phi)^{1/2}$ è una norma, come si verifica dopo aver provato la disuguaglianza:

Disuguaglianza di Schwarz

$$|(\phi, \psi)| \leq \|\psi\| \|\phi\|$$

con eguaglianza valida se e solo se ψ e ϕ sono collineari (cioè se $\exists a \in \mathbb{C} : a\phi = \psi$).

Infatti dalla proprietà 4) del prodotto scalare discende

$$\begin{aligned}(\phi + a\psi, \phi + a\psi) &\geq 0 \quad \forall a \in \mathbb{C} \quad (= \text{se e solo se } \phi + a\psi = 0) \\(\phi, \phi) + \bar{a}(\psi, \phi) + a(\phi, \psi) + |a|^2(\psi, \psi) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow (\phi, \phi)(\psi, \psi) + \bar{a}(\psi, \phi)(\psi, \psi) + a(\phi, \psi)(\psi, \psi) + |a|^2(\psi, \psi)^2 &\geq 0\end{aligned}$$

Scegliendo

$$a = -\frac{(\psi, \phi)}{(\psi, \psi)}$$

si ha quindi

$$(\phi, \phi)(\psi, \psi) \geq |(\psi, \phi)|^2 + |(\phi, \psi)|^2 - |(\psi, \phi)|^2 = |(\psi, \phi)|^2$$

La disuguaglianza triangolare della norma è ora facilmente dimostrabile:

$$\begin{aligned}\|\psi + \phi\|^2 &= \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 + 2\operatorname{Re}(\psi, \phi) \\ &\leq \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 + 2|(\psi, \phi)| \\ &\leq \|\psi\|^2 + \|\phi\|^2 + 2\|\psi\|\|\phi\| \\ &= (\|\psi\| + \|\phi\|)^2\end{aligned}$$

Esempi di prodotto scalare:

- in \mathbb{C}^n

$$(\phi, \psi) \equiv \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i \psi_i$$

$$\text{con } \phi \equiv \{\phi_i\}_{i=1, \dots, n} \quad \psi \equiv \{\psi_i\}_{i=1, \dots, n}$$

- in l^2

$$(\phi, \psi) \equiv \sum_{i=0}^{\infty} \bar{\phi}_i \psi_i \tag{2.5}$$

$$\text{con } \phi \equiv \{\phi_i\}_{i=0, \dots, n, \dots} \quad \psi \equiv \{\psi_i\}_{i=0, \dots, n, \dots}$$

- in $(C(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$

$$(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\phi(x)} \psi(x) dx \quad (2.6)$$

Uno spazio lineare V dotato di prodotto scalare (\cdot, \cdot) che sia completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare (quindi di Banach) si dice **spazio di Hilbert**.

Gli spazi di Hilbert di dimensioni finite sono generalmente denominati **spazi unitari**, ma, per semplicità, noi utilizzeremo sempre la denominazione di spazi di Hilbert.

Dimostriamo che l^2 è completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare (2.5).

Teorema 3 (Completezza di l^2) l^2 è completo rispetto alla norma

$$\|\phi\|^2 = \sum_{i=0}^{\infty} |\phi_i|^2$$

Dimostrazione Sia $\phi^{(n)}$ una successione di Cauchy di vettori in l^2 . Per definizione $\forall \epsilon > 0 \exists n_\epsilon$ tale che

$$\|\phi^{(k)} - \phi^{(m)}\| < \epsilon \quad \forall k, m > n_\epsilon \quad (2.7)$$

Le successioni di tutte le componenti dei vettori $\phi^{(n)}$ sono quindi di Cauchy essendo

$$|\phi_i^{(k)} - \phi_i^{(m)}| \leq \|\phi^{(k)} - \phi^{(m)}\|$$

La completezza di \mathbb{C} garantisce che per ogni componente i esista $\phi_i \in \mathbb{C}$ tale che $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_i^{(n)} = \phi_i$. Rimane solo da dimostrare che il vettore ϕ di componenti

ϕ_i appartiene a l^2 , che si ha cioè $\sum_{i=0}^{\infty} |\phi_i|^2 < \infty$.

Dalla (2.7) sappiamo che per ogni $k, m > n_\epsilon$ e per ogni N si ha

$$\sum_{i=0}^N |\phi_i^{(k)} - \phi_i^{(m)}|^2 < \epsilon^2 \quad (2.8)$$

La disuguaglianza, essendo vera per ogni m , rimane vera quando $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{i=0}^N |\phi_i^{(k)} - \phi_i|^2 < \epsilon^2 \quad (2.9)$$

Dalla disuguaglianza triangolare, per ogni k , si ha

$$\sqrt{\sum_{i=0}^N |\phi_i|^2} \leq \sqrt{\sum_{i=0}^N |\phi_i^{(k)} - \phi_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=0}^N |\phi_i^{(k)}|^2} \quad (2.10)$$

Poiché entrambi i termini nel membro di destra della disuguaglianza rimangono finiti per $N \rightarrow \infty$ la tesi è dimostrata.

Lo spazio $(C(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$ delle funzioni continue da \mathbb{R}^n a \mathbb{C} non è invece completo rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare (2.6). La convergenza in “media quadratica” non è infatti sufficiente a garantire che le successioni di funzioni continue convergano a funzioni continue. Lo spazio di Hilbert che si ottiene completando le funzioni continue in tale norma sarà il tema dominante del prossimo capitolo. Poiché però non abbiamo una definizione di integrale di funzioni non continue, dovremo preventivamente costruirci una nuova teoria dell’integrale che permetta questa generalizzazione.

Di seguito elenchiamo alcune definizioni e proprietà relative agli spazi di Hilbert

- \mathbb{M} si dice **sottospazio** di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} se è un sottoinsieme lineare chiuso di \mathcal{H} (\mathbb{M} è quindi uno spazio di Hilbert).

- ψ e ϕ si dicono ortogonali se $(\phi, \psi) = 0$.
- Se \mathbb{M} è un sottospazio di \mathcal{H} e \mathbb{M}^\perp è l'insieme dei vettori di \mathcal{H} ortogonali a tutti i vettori di M , allora \mathbb{M}^\perp è un sottospazio. Infatti

– La linearità è evidente.

– La chiusura è una conseguenza della continuità in \mathcal{H} del prodotto scalare: se $\phi^{(n)}, \psi^{(n)}$ sono due successioni in \mathcal{H} convergenti rispettivamente ai vettori ϕ e ψ di \mathcal{H} allora, per $n \rightarrow \infty$

$$(\psi, \phi^{(n)} - \phi) \rightarrow 0 \quad (\psi^{(n)} - \psi, \phi) \rightarrow 0 \quad (\psi^{(n)} - \psi, \phi^{(n)} - \phi) \rightarrow 0$$

come si deduce dall'applicazione della disuguaglianza di Schwarz.

- **Proposizione 4** *Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert e \mathbb{M} un sottospazio di \mathcal{H} . Allora*

$$\mathcal{H} = \mathbb{M} \oplus \mathbb{M}^\perp$$

ovvero ogni $\phi \in \mathcal{H}$ si può scrivere in un unico modo come $\phi = P_{\mathbb{M}}\phi + (\mathbb{1} - P_{\mathbb{M}})\phi$ con $P_{\mathbb{M}}\phi \in \mathbb{M}$ e $(\mathbb{1} - P_{\mathbb{M}})\phi \in \mathbb{M}^\perp$. $P_{\mathbb{M}}\phi$ è il vettore di \mathbb{M} a distanza minima da ϕ .

Dimostrazione $\forall \phi \in \mathcal{H}$ definiamo $0 \leq d = \text{dist}(\phi, \mathbb{M}) \equiv \left(\inf_{\psi \in \mathbb{M}} \|\phi - \psi\| \right)$.

Proviamo che esiste un vettore di \mathbb{M} in cui l'estremo inferiore è raggiunto.

Per definizione di estremo inferiore, esiste una successione $\phi^{(n)} \in \mathbb{M}$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\phi^{(n)} - \phi\| = d$. Facciamo vedere che $\phi^{(n)}$ è di Cauchy in \mathcal{H} (quindi in \mathbb{M}).

Da un calcolo diretto:

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{1}{2}(\phi^{(m)} + \phi^{(n)}) - \phi \right\|^2 + \left\| \frac{1}{2}(\phi^{(n)} - \phi^{(m)}) \right\|^2 \\ &= \frac{1}{2} \|\phi^{(n)} - \phi\|^2 + \frac{1}{2} \|\phi^{(m)} - \phi\|^2 \xrightarrow{n,m \rightarrow \infty} d^2 \end{aligned}$$

(notare infatti che $\|\xi - \eta\|^2 + \|\xi + \eta\|^2 = 2\|\xi\|^2 + 2\|\eta\|^2$).

Prendendo $\xi = \frac{1}{2}(\phi^{(n)} - \phi)$ e $\eta = \frac{1}{2}(\phi^{(m)} - \phi)$ si ricava la precedente uguaglianza)

Poiché $(\phi^{(n)} + \phi^{(m)})/2 \in \mathbb{M}$

$$\|(\phi^{(m)} + \phi^{(n)})\frac{1}{2} - \phi\|^2 \geq d^2 \quad \forall m, n$$

si deduce dall'eguaglianza trovata sopra

$$- \|\phi^{(n)} - \phi^{(m)}\|^2 \xrightarrow{m,n \rightarrow \infty} 0$$

la successione è di Cauchy ed esiste quindi un $\phi_{\mathbb{M}} \in \mathbb{M}$ tale che

$$\phi^{(n)} \rightarrow \phi_{\mathbb{M}}$$

- $\phi_{\mathbb{M}} \in \mathbb{M}$, perché \mathbb{M} è un sottospazio.

$$- \|\phi_{\mathbb{M}} - \phi\| = d$$

Poniamo $\phi_{\mathbb{M}} = P_{\mathbb{M}}\phi$ proiezione di ϕ su \mathbb{M} e proviamo che $\phi - \phi_{\mathbb{M}} \in \mathbb{M}^{\perp}$.

Infatti $\forall \psi \in \mathbb{M}$, $\|\psi\| = 1$

$$d^2 = \|\phi - \phi_{\mathbb{M}}\|^2 = \|(\phi - \phi_{\mathbb{M}}) - (\psi, \phi - \phi_{\mathbb{M}})\psi\|^2 + |(\phi - \phi_{\mathbb{M}}, \psi)|^2 \geq d^2 + |(\phi - \phi_{\mathbb{M}}, \psi)|^2$$

infatti $(\phi - \phi_{\mathbb{M}}) - (\psi, \phi - \phi_{\mathbb{M}})\psi$ è la differenza tra ϕ e il vettore $\phi_{\mathbb{M}} + (\psi, \phi - \phi_{\mathbb{M}})\psi \in \mathbb{M}$. La sua norma deve essere quindi maggiore della distanza di ϕ da \mathbb{M} . Si deduce quindi

$$((\phi - \phi_{\mathbb{M}}), \psi) = 0 \Rightarrow \phi - \phi_{\mathbb{M}} \in \mathbb{M}^{\perp}$$

La decomposizione è unica (darne una prova).

2.1.4 Famiglie ortogonali e basi

Nello spazio di Hilbert \mathcal{H} , un insieme di vettori $\{w_\mu\}_{\mu \in I}$, con I un insieme qualunque di indici, si dice un **sistema ortonormale** se:

$$\text{a) } (w_\mu, w_\nu) = \delta_{\mu\nu} = \begin{cases} 0 & \text{se } \mu \neq \nu \\ 1 & \text{se } \mu = \nu \end{cases}$$

Per un qualunque sottoinsieme finito di indici $\{\mu_i\}$, $i = 1, \dots, N$, dato un ϕ in \mathcal{H} , vogliamo dimostrare che la combinazione lineare che garantisce la migliore “approssimazione quadratica” di ϕ è

$$\phi_N = \sum_{i=1}^N (w_{\mu_i}, \phi) w_{\mu_i}$$

Il calcolo diretto fornisce infatti

$$0 \leq \left\| \phi - \sum_{i=1}^N a_i w_{\mu_i} \right\|^2 = \|\phi\|^2 - \|\phi_N\|^2 + \sum_{i=1}^N |(w_{\mu_i}, \phi) - a_i|^2$$

che prova la seguente

Proposizione 5 *Tra tutti i vettori di \mathcal{H} ottenuti come combinazioni lineari di un sistema ortonormale w_{μ_i} , $i = 1, \dots, N$ di vettori quella che dista meno, nella norma di \mathcal{H} , da un generico $\phi \in \mathcal{H}$ è quella costruita con i coefficienti $a_i = (w_{\mu_i}, \phi)$*

In particolare

$$0 \leq \|\phi - \phi_N\|^2 = \|\phi\|^2 - \sum_{i=1}^N |(w_{\mu_i}, \phi)|^2 \quad (2.11)$$

Ricordando la definizione di proiezione su un sottospazio abbiamo quindi $\phi_N = P_M \phi$ con M sottospazio chiuso contenente tutte le combinazioni lineari dei $\{w_{\mu_i}\}_{i=1, \dots, N}$.

La (2.11) mostra inoltre che vale la **disuguaglianza di Bessel**: per ogni $\phi \in \mathcal{H}$

$$\sum_{i=1}^N |(w_{\mu_i}, \phi)|^2 \leq \|\phi\|^2$$

In uno spazio di Hilbert \mathcal{H} di dimensione finita n , da n vettori indipendenti si può ricavare un sistema ortogonale con il procedimento di Gram-Schmidt: se $\{\phi_i\}_{i=1, \dots, n}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti, definendo $w_1 = \phi_1 / \|\phi_1\|$ e ricorsivamente $w_k = \psi_k / \|\psi_k\|$, con $\psi_k = \phi_k - \sum_{i=1}^{k-1} (w_i, \phi_k) w_i$, allora i $\{w_k\}_{k=1, \dots, n}$ sono un insieme ortonormale di vettori (ovviamente indipendenti). Tale insieme è una **base ortonormale** poiché per ogni $\phi \in K$

$$\phi = \sum_{i=1}^n (w_i, \phi) w_i$$

e

$$\|\phi\|^2 = \sum_{i=1}^n |(w_i, \phi)|^2$$

Osservazione 6 *Se invece di partire da n vettori linearmente indipendenti si applicasse il procedimento di Gram-Schmidt a un insieme molto più grande di vettori di \mathbb{K} , che contiene n vettori linearmente indipendenti, (ad esempio tutte le combinazioni lineari, con coefficienti che hanno parte reale e immaginaria razionale, di n vettori linearmente indipendenti) si otterrebbero un'infinità di vettori nulli e una base ortonormale.*

Sia ora \mathcal{H} uno spazio di Hilbert di dimensione infinita che sia **separabile**, sia tale cioè che esista un sottoinsieme C di \mathcal{H} , numerabile, che sia **denso** in \mathcal{H} .

$$\bar{C} = \mathcal{H}$$

Che la chiusura \bar{C} del sottoinsieme C coincida con \mathcal{H} significa che ogni elemento di \mathcal{H} è il limite di una successione di vettori di C . In particolare, dato un qualunque $\psi \in \mathcal{H}$ e un $\epsilon > 0$ esiste un vettore $\phi \in C$ che dista da ψ meno di ϵ .

Esempio L'insieme D_F delle combinazioni lineari di un numero finito di vettori del sistema ortonormale (2.1) è certamente denso in l^2 . Ogni vettore $\phi \in l^2$ è infatti limite della successione $\phi^{(n)}$ che ha le prime n componenti uguali a quelle di ϕ mentre tutte le altre sono nulle. D_F non è però numerabile dato che i coefficienti delle combinazioni lineari possono assumere qualunque valore complesso. Il sottoinsieme C di D_F delle combinazioni lineari a coefficienti con parte reale e immaginaria razionale è un insieme numerabile, denso in D_F e quindi denso in l^2 .

Siano $\{w_k\}_{k=1,2,\dots}$ i vettori risultanti dal procedimento di ortogonalizzazione applicato ai vettori di C .

Proposizione 7 Se $\phi \in \mathcal{H}$ è tale che $(w_i, \phi) = 0$ per ogni i allora $\phi = 0$.

Dimostrazione infatti, poiché C è denso in \mathcal{H} , $\forall \epsilon > 0$ è possibile trovare un vettore $\phi_N \in C$ tale che $\|\phi - \phi_N\| < \epsilon$. Al passo N -simo del processo di ortonormalizzazione si definisce

$$\phi_N = \psi_N + \sum_{j=1}^{N-1} (w_j, \phi_N) w_j$$

con

$$w_N = \frac{\psi_N}{\|\psi_N\|}$$

ϕ_N è dunque una combinazione lineare dei primi N vettori w_i , da cui si deduce l'implicazione

$$(w_i, \phi) = 0 \quad \forall i \quad \Rightarrow \quad (\phi_N, \phi) = 0$$

quindi

$$\|\phi\|^2 + \|\phi_N\|^2 = \|\phi - \phi_N\|^2 < \varepsilon^2 \Rightarrow \phi = 0$$

Viceversa per ogni $\phi \in \mathcal{H}$ definendo

$$\phi^{(n)} \equiv \sum_{i=1}^n (w_i, \phi) w_i \tag{2.12}$$

si nota facilmente che

- $\phi^{(n)}$ è di Cauchy (dalla disuguaglianza di Bessel)
- $\exists \psi$ tale che $\|\phi^{(n)} - \psi\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ si ha $(\phi - \psi, w_j) = 0, \quad \forall j$
- $\psi = \phi$ ovvero

$$\phi = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n (w_i, \phi) w_i \tag{2.13}$$

Un sistema ortonormale per cui valga la (2.13) $\forall \phi$ di \mathcal{H} si dice una **base ortonormale** (o un **sistema ortonormale completo**).

Se $\{w_i\}$ è una base ortonormale, i numeri complessi (w_i, ϕ) si dicono i **coefficienti di Fourier** di ϕ in quella base.

È facile sintetizzare quello che abbiamo provato nelle seguenti affermazioni

- 1) un sistema ortonormale $\{w_i\}$ è **chiuso** (cioè $\sum_{i=1}^{\infty} |(w_i, \phi)|^2 = \|\phi\|^2 \forall \phi \in \mathcal{H}$) se e solo se è una base ortonormale;
- 2) un sistema ortonormale $\{w_i\}$ è **completo** (cioè $(w_i, \phi) = 0 \forall i \Leftrightarrow \phi = 0$) se e solo se è una base ortonormale;
- 3) uno spazio di Hilbert \mathcal{H} separabile ammette sempre una base ortonormale numerabile.

Infatti 1) implica ovviamente 2); i passaggi che hanno portato dalla (2.12) alla (2.13) provano che 2) implica che il sistema ortonormale sia una base. Se il sistema ortonormale soddisfa la (2.13), ed è quindi una base ortonormale, la 1) è certamente vera.

Essere chiuso, completo e essere una base ortonormale sono quindi tre proprietà equivalenti per un sistema ortonormale. La 3) è stata provata nella proposizione (7).

Consideriamo l'insieme $E^{(j)}$ $j = 0, \dots, n, \dots$ dei vettori in l^2 , definiti dalla (2.1).

Poiché per ogni $\psi \in l^2$ vale che $(E^{(j)}, \psi) = \psi_j$ l'uguaglianza $\|\psi\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |(E^{(j)}, \psi)|^2$

vale per definizione. I vettori $E^{(j)}$ costituiscono quindi una base di l^2 . Un qualunque spazio di Hilbert separabile \mathcal{H} , fissata una base numerabile, può essere messo in corrispondenza biunivoca con l^2 associando il j -simo elemento della base con $E^{(j)}$. È facile verificare che tale corrispondenza conserva linearità, norma e prodotto scalare. **Ogni spazio di Hilbert separabile è quindi isomorfo a l^2 .** (Come per il caso finito dimensionale l'isomorfismo così definito è continuo ed è pertanto un omeomorfismo).

2.2 Funzionali Lineari

Se $D_F \subseteq \mathcal{H}$ è un sottoinsieme lineare (contiene tutte le combinazioni lineari finite dei suoi elementi) di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , una funzione F da $D_F \rightarrow \mathbb{C}$ che soddisfi

$$\begin{aligned} F(\phi + \psi) &= F(\phi) + F(\psi) & \phi, \psi \in D_F \\ F(a\phi) &= aF(\phi) & a \in \mathbb{C}, \phi \in \mathcal{H} \end{aligned}$$

si dice funzionale lineare su \mathcal{H} con dominio D_F .

Negli spazi a infinite dimensioni è facile dare esempio di funzionali lineari che non possono essere definiti su tutto \mathcal{H} e altri che lo sono.

Es. 1) $\forall \psi \in \mathcal{H}$ il funzionale $\phi \rightarrow F_\psi(\phi) = (\psi, \phi)$ è definito su tutto \mathcal{H} ed è continuo come abbiamo già visto.

Es. 2) $\mathcal{H} = l^2$, $D_F = \{\phi \mid \phi = (\phi_1, \dots, \phi_n, 0, 0, \dots) \text{ per qualche } n < \infty\}$,
 $F(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} i \phi_i$.

Se $\psi = \{\psi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ($\sum_{i=1}^{\infty} |\psi_i|^2 < \infty$) è un generico vettore di \mathcal{H} non è detto che $F(\psi) = \sum_{i=1}^{\infty} i\psi_i$ sia definito (come esempio si consideri $\{\psi_i = 1/i\}_{i=1}^{\infty}$).

Lo stesso esempio può essere applicato a qualunque spazio di Hilbert \mathcal{H} separabile. Data una base ortonormale $\{w_i\}_{i=1}^{\infty}$, D_F viene definito come l'insieme di \mathcal{H} che ha un numero finito di coefficienti di Fourier diversi da zero e $F(\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} (w_i, \phi)i$.

Si noti che in entrambi i casi D_F è un insieme denso in \mathcal{H} .

Un funzionale lineare F su D_F si dice limitato se per qualche $C > 0$ $|F(\phi)| \leq C\|\phi\|$, $\forall \phi \in D_F$.

Teorema: Un funzionale lineare F su $D_F \subseteq \mathcal{H}$ è continuo se e solo se è limitato.

Prova. Se F è limitato e la successione ϕ_n di vettori in D_F converge a $\phi \in D_F$, allora

$$|F(\phi_n) - F(\phi)| = |F(\phi_n - \phi)| \leq C\|\phi_n - \phi\|$$

e il funzionale è dunque continuo.

Sia F continuo e supponiamo che F non sia limitato. Esisterebbero allora vettori $\phi_i \in D_F$ tali che $\frac{F(\phi_i)}{\|\phi_i\|} = F\left(\frac{\phi_i}{\|\phi_i\|}\right) \geq i$, $i = 1, \dots, n$, cioè tali che $F\left(\frac{\phi_i}{i\|\phi_i\|}\right) \geq 1$.

Questo contraddirebbe la continuità nell'origine poiché $\frac{\phi_i}{i\|\phi_i\|} \xrightarrow{i \rightarrow \infty} 0$.

Se un funzionale lineare F , definito su un dominio D_F denso in \mathcal{H} , è limitato si può estendere per continuità a tutto \mathcal{H} . Considereremo da ora in poi funzionali continui su tutto \mathcal{H} .

All'insieme dei funzionali lineari limitati (quindi continui) su \mathcal{H} si può dare la struttura di spazio (vettoriale) lineare normato definendo:

$$(F_1 + F_2)(\phi) = F_1(\phi) + F_2(\phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$$

$$(aF)(\phi) = aF(\phi) \quad a \in \mathbb{C}, \phi \in \mathcal{H}$$

$$\|F\| = \sup_{\phi \neq 0 \in \mathcal{H}} \frac{|F(\phi)|}{\|\phi\|} = \sup_{\|\phi\|=1} |F(\phi)|$$

(verificare che ha tutte le proprietà della norma).

\mathcal{H}^* \equiv lo spazio di tutti i funzionali lineari limitati su \mathcal{H} si dice spazio aggiunto di \mathcal{H} , o il suo duale topologico. La dimostrazione che \mathcal{H}^* è completo può essere data direttamente. Per \mathcal{H} spazio di Hilbert è un'immediata conseguenza del

Teorema 8 (Teorema di Riesz) : \mathcal{H}^* può essere identificato con \mathcal{H} :
 $\forall F \in \mathcal{H}^*$ esiste un (solo) $\phi \in \mathcal{H}$ tale che:

$$F(\psi) = (\phi, \psi) \quad \forall \psi \in \mathcal{H}$$

Dimostrazione Sia $N(F) = \{\xi \in \mathcal{H} \mid F(\xi) = 0\}$. N è un sottospazio chiuso di \mathcal{H} per la continuità di F . Se F non è identicamente nullo $N(F) \neq \mathcal{H}$ e $N^\perp(F)$ non è costituito quindi dal solo vettore nullo.

Sia $\eta \neq 0$, $\eta \in N^\perp(F)$. Possiamo assumere che $F(\eta)$ sia uguale a 1 (se non lo fosse, basterebbe considerare il vettore $\frac{\eta}{F(\eta)} \in N^\perp(F)$).

Per qualunque $\psi \in \mathcal{H}$ vale che $F(\psi - F(\psi)\eta) = 0$. Cioè $(\psi - F(\psi)\eta) \in N(F)$ ed è quindi ortogonale a η :

$$(\eta, \psi - F(\psi)\eta) = 0 \Rightarrow F(\psi) = \left(\frac{\eta}{\|\eta\|^2}, \psi \right)$$

Il teorema è dimostrato prendendo $\phi = \frac{\eta}{\|\eta\|^2}$.

Vediamo come in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , a dimensione n finita, la caratterizzazione di \mathcal{H}^* sia particolarmente semplice.

Sia $n = \dim(\mathcal{H}) < \infty$ e sia $\{w_i\}_{i=1}^n$ una base ortonormale:

•

$$\begin{aligned} L(\psi) &= L\left(\sum_{i=1}^n (w_i, \psi) w_i\right) = \sum_{i=1}^n (w_i, \psi) L(w_i) \\ &= (\phi, \psi) \end{aligned}$$

$$\text{se si è definito } \phi = \sum_{i=1}^n \bar{L}(w_i) w_i$$

$$L \longleftrightarrow \phi$$

- Assegnata una base $\{w_i\}_{i=1}^n$, sia L_j il funzionale associato al vettore w_j .

$$L_j(\psi) = (w_j, \psi) \quad \text{da cui} \quad L_j(w_k) = \delta_{jk}$$

Ogni funzionale L può essere scritto:

$$L(\psi) = L\left(\sum_{j=1}^n (w_j, \psi) w_j\right) = \left(\sum_{j=1}^n a_j L_j\right)(\psi)$$

con $a_j = L(w_j)$.

Quindi L_j è una base per \mathcal{H}^* (base duale).

Il teorema di Riesz per uno spazio di Hilbert separabile può essere dimostrato con una semplice generalizzazione del caso finito-dimensionale utilizzando una base ortonormale numerabile.

La prova fornita precedentemente dimostra che la separabilità non è necessaria perché valga la tesi del teorema di Riesz.

2.3 Operatori lineari I

2.3.1 Operatori lineari limitati

Se D_T è un sottoinsieme lineare di uno spazio di Hilbert \mathcal{H} , un'applicazione T da $D_T \rightarrow \mathcal{H}$ che soddisfi

$$\begin{aligned} T(\phi + \psi) &= T\phi + T\psi & \forall \phi, \psi \in D_T \\ T(a\psi) &= a(T\psi) & \forall a \in \mathbb{C}, \psi \in D_T \end{aligned}$$

si dice operatore lineare con dominio D_T .

Come nel caso dei funzionali lineari, è facile dare esempi di operatori T , definiti in insiemi D_T , densi in uno spazio di Hilbert \mathcal{H} di dimensione infinita, che non possono essere estesi a tutto \mathcal{H} .

Un esempio sul quale torneremo varie volte è il seguente:
in l^2 consideriamo la base $E^{(j)}$ definita nella (2.1). Consideriamo gli operatori

che agiscono sui vettori di base nella maniera seguente

$$A E^{(j)} = \sqrt{j} E^{(j-1)} \quad A^\dagger E^{(j)} = \sqrt{j+1} E^{(j+1)} \quad N E^{(j)} (= A^\dagger A E^{(j)}) = j E^{(j)} \quad (2.14)$$

(Verificare che vale l'uguaglianza $AA^\dagger E^{(j)} - A^\dagger A E^{(j)} = E^{(j)} \quad \forall j$)

È possibile estendere la definizione degli operatori A , A^\dagger e N a tutti i vettori di l^2 che sono combinazioni lineari di un numero finito di $E^{(j)}$ (che costituiscono un insieme denso). Non è però possibile definire tali operatori su tutto l^2 , come si deduce dal fatto che trasformano i vettori di base in vettori di norma sempre più grande al crescere di j (verificare che $\|A E^{(j)}\| = \sqrt{j}$, che cresce al crescere di j malgrado i vettori a cui A è applicato abbiano norma unitaria).

L'operatore lineare T si dice **limitato** su $D(T)$ se

$$\|T\| \equiv \sup_{0 \neq \psi \in D(T)} \frac{\|T\psi\|}{\|\psi\|} = \sup_{0 \neq \psi, \phi \in D(T)} \frac{|(\phi, T\psi)|}{\|\psi\| \|\phi\|} < \infty$$

dove l'eguaglianza va verificata. (Utilizzeremo la stessa notazione per la norma degli operatori e quella dei vettori, sperando che la notazione non generi confusione).

Come per i funzionali lineari, un operatore è limitato in \mathcal{H} se e solo se è continuo in \mathcal{H} (identica dimostrazione) e un operatore limitato definito su un dominio denso in \mathcal{H} può quindi essere definito per continuità su tutto \mathcal{H} . Considereremo da ora in poi solo operatori limitati definiti sull'intero spazio di Hilbert. Si verifica facilmente che $\|\cdot\|$ è una norma nello spazio vettoriale $B(\mathcal{H})$ degli operatori limitati su \mathcal{H} (con le operazioni

$$(T + S)\phi \equiv T\phi + S\phi \quad (aT)\phi = a(T\phi) \quad)$$

cioè

- $\|T + S\| \leq \|T\| + \|S\| \quad \forall T, S \in B(\mathcal{H})$
- $\|aT\| = |a| \|T\| \quad \forall a \in \mathbb{C}, T \in B(\mathcal{H})$
- $\|T\| \geq 0$ con l'uguaglianza vera se e solo se $T = 0$

Si può dimostrare inoltre che $B(\mathcal{H})$ è completo in tale norma.

In $B(\mathcal{H})$ può essere definito il prodotto (non commutativo)

$$(TS)\phi = T(S\phi)$$

con la proprietà che

$$\|TS\| \leq \|T\| \|S\|$$

L'identità per il prodotto è l'operatore limitato

$$\mathbb{1} : \quad \mathbb{1}\phi = \phi \quad \forall \phi \in \mathcal{H}. \quad T\mathbb{1} = \mathbb{1}T = T$$

Un operatore $T \in B(\mathcal{H})$ si dice che ha un inverso T^{-1} se

$$T(T^{-1}) = (T^{-1})T = \mathbb{1}$$

Teorema 9 *Sia T un operatore in $B(\mathcal{H})$. T ha un inverso $T^{-1} \in B(\mathcal{H})$ se e solo se $\forall \psi \in \mathcal{H}$ esiste, ed è unica, la soluzione ϕ dell'equazione $T\phi = \psi$.*

Dimostrazione

- Supponiamo che esista T^{-1} . Posto $\phi = T^{-1}\psi$ si nota che ϕ è una soluzione di $T\phi = \psi$.

Per ogni altra soluzione η varrebbe che $\eta = T^{-1}T\eta = T^{-1}\psi$ che dimostra l'unicità.

- Supponiamo che $\forall \psi \in \mathcal{H}$ esista una e una sola soluzione ϕ di $T\phi = \psi$. Definiamo $T^{-1}\psi = \phi, \forall \psi \in \mathcal{H}$. Dalla definizione si ha che $TT^{-1} = \mathbb{1}$. Prendendo $\psi = T\phi$ si deduce $T^{-1}T\phi = \phi, \forall \phi$, cioè $T^{-1}T = \mathbb{1}$. Basta quindi verificare la linearità di T^{-1} così definito (verificare).

Gli operatori definiti su tutto lo spazio di Hilbert, hanno una semplice caratterizzazione quando \mathcal{H} ha dimensione finita n .

Data una base $\{w_i\}_{i=1}^n$ ogni vettore $\phi \in \mathcal{H}$ è associato in maniera unica ai suoi n coefficienti di Fourier su quella base:

$$\begin{aligned}\phi &\leftrightarrow \{(w_i, \phi)\}_{i=1}^n \\ \|\phi\|^2 &= \sum_{i=1}^n |\phi_i|^2 \quad \phi_i \equiv (w_i, \phi) \\ (\phi, \psi) &= \sum_{i=1}^n \overline{(w_i, \phi)} (w_i, \psi) = \sum_{i=1}^n \bar{\phi}_i \psi_i\end{aligned}$$

Se T è un operatore lineare definito su tutto \mathcal{H}

$$T\phi = T \sum_{i=1}^n (w_i, \phi) w_i = \sum_{i=1}^n (w_i, \phi) T w_i$$

e si ha

$$\begin{aligned}(T\phi)_j &\equiv (w_j, T\phi) = \sum_{i=1}^n (w_i, \phi) (w_j, T w_i) \\ &= \sum_{i=1}^n T_{ji} \phi_i\end{aligned}$$

con $T_{ji} \equiv (w_j, T w_i)$.

$$\begin{pmatrix} (T\phi)_1 \\ \vdots \\ (T\phi)_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11} & \cdots & T_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ T_{n1} & \cdots & T_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix}$$

Teorema 10 *se $\dim \mathcal{H} = n < \infty$ e $w_1 \dots w_n$ è una base, le seguenti condizioni sono necessarie e sufficienti per l'esistenza dell'inverso T^{-1} di un operatore lineare T*

- 1) *non esistono soluzioni non nulle ϕ di $T\phi = 0$*
- 2) *la matrice associata a T (in qualunque base) ha determinante $\neq 0$*
- 3) *$\{Tw_i\}_{i=1}^n$ sono linearmente indipendenti*
- 4) *esiste un operatore lineare S tale che $ST = \mathbb{1}$*

Nel caso di dimensioni infinite la situazione è drasticamente differente. Quello che segue è un esempio di operatore lineare limitato su l^2 che non ha inverso malgrado 1), 3), 4) siano soddisfatte (verificarlo)

$$\begin{aligned}(T\phi)_i &= \phi_{i-1} \quad i \geq 1 \\ (T\phi)_0 &= 0\end{aligned}$$

Proposizione 11 : *se T e S sono operatori limitati in \mathcal{H} e hanno un inverso allora TS ha un inverso e*

$$(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$$

La prova risulta immediata.

2.3.2 Aggiunto di un operatore limitato. Operatori isometrici, unitari e di proiezione.

Sia T un operatore limitato (ometteremo di ricordare che tutti gli operatori che considereremo sono lineari). Per ogni $\psi \in \mathcal{H}$, fissato, l'applicazione da $\mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$

$$\phi \in \mathcal{H} \rightarrow (\psi, T\phi)$$

è un funzionale lineare continuo in \mathcal{H} . Per il teorema di Riesz esiste un $\xi \in \mathcal{H}$ tale che

$$(\psi, T\phi) = (\xi, \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$$

Definizione . $T^*\psi = \xi$. T^* si dice **aggiunto** di T

È facile verificare la linearità e la limitatezza di T^* . Valgono inoltre le proprietà

Proposizione 12 *L'applicazione che a $T \in B(\mathcal{H})$ associa $T^* \in B(\mathcal{H})$ ha le seguenti proprietà*

- $T^{**} \equiv (T^*)^* = T \quad \forall T \in B(\mathcal{H})$
- $(T + S)^* = T^* + S^* \quad \forall T, S \in B(\mathcal{H})$
- $(aT)^* = \bar{a}T^* \quad \forall T \in B(\mathcal{H}) \quad a \in \mathbb{C}$
- $\|T^*\| = \|T\| \quad \forall T \in B(\mathcal{H})$
- $(ST)^* = T^*S^* \quad \forall T, S \in B(\mathcal{H})$

Se $\dim \mathcal{H} = n < \infty$, $\{w_i\}_{i=1}^n$ è una base, T è un operatore lineare e $T_{ji} = (w_j, Tw_i)$ è la matrice ad esso associata tramite la base data

$$T_{ji}^* \equiv (w_j, T^*w_i) = \overline{(T^*w_i, w_j)} = \overline{(w_i, Tw_j)} = \overline{T_{ij}}$$

In uno spazio di Hilbert a finite dimensioni vale quindi che se T è un operatore lineare e T_{ji} è la matrice ad esso associata tramite una qualunque base, allora la matrice associata all'operatore aggiunto T^* , relativa alla stessa base, è la matrice hermitiana coniugata.

Definizione : Un operatore limitato S su \mathcal{H} si dice **autoaggiunto** se $S = S^*$.

(Se $\dim \mathcal{H} = n < \infty$, in qualunque base, $S_{ij} = \bar{S}_{ji}$)

Definizione Un operatore V in \mathcal{H} si dice **isometrico** se conserva la norma

$$\|V\phi\| = \|\phi\| \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$$

L'operatore V è certamente limitato e $\|V\| = 1$.

Dall'uguaglianza $(V\phi, V\phi) = (\phi, \phi) \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$ si ricava che $(V^*V - \mathbb{1}) = 0$.

Per provarlo verifichiamo una importante uguaglianza valida in ogni spazio di Hilbert complesso.

Definiamo **forma sesquilineare** in \mathcal{H} un'applicazione t da $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ in \mathbb{C} ($[\phi, \psi] \rightarrow t(\phi, \psi)$) tale che:

$$t(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2, \phi) = \bar{\alpha}t(\psi_1, \phi) + \bar{\beta}t(\psi_2, \phi)$$

$$t(\psi, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2) = \alpha t(\psi, \phi_1) + \beta t(\psi, \phi_2)$$

$$\forall \phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}, \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Se $T \in B(\mathcal{H})$ è un operatore limitato in \mathcal{H} è facile convincersi che $(\phi, T\psi)$ è una forma sesquilineare.

La restrizione di una forma sesquilineare t ai soli “elementi diagonali” $\phi \rightarrow t(\phi, \phi)$ si dice **forma quadratica** associata alla forma sesquilineare t .

Vale l’uguaglianza

Principio di polarizzazione: Se $t(\phi, \psi)$ è una forma sesquilineare in \mathcal{H} allora

$$t(\phi, \psi) = \frac{1}{4}[t(\phi + \psi, \phi + \psi) - t(\phi - \psi, \phi - \psi) + \\ -it(\phi + i\psi, \phi + i\psi) + it(\phi - i\psi, \phi - i\psi)]$$

Applicata alla forma sesquilineare $(\phi, T\psi)$ il principio di polarizzazione asserisce che essa è completamente caratterizzata dai suoi valori diagonali $(\phi, T\phi)$. (Si noti che in uno spazio di Hilbert reale, dove non è valido un corrispondente principio di polarizzazione, una forma bilineare non è caratterizzata dalla forma quadratica associata).

Nel nostro caso $(\phi, (V^*V - \mathbb{1})\phi) = 0 \implies (\phi, (V^*V - \mathbb{1})\psi) = 0 \forall \phi, \psi \in \mathcal{H} \implies V^*V - \mathbb{1} = 0$ In particolare, se V è un operatore isometrico conserva il prodotto scalare $(V\psi, V\phi) = (\psi, \phi)$.

Se \mathcal{H} ha dimensioni finite e V è isometrico non possono esistere soluzioni di $V\phi = 0$ che, per quanto abbiamo visto, assicura (sottolineiamo ancora in dimensioni finite) che V abbia un inverso. In questo caso quindi $V^* = V^{-1}$, $\{Vw_i\}_{i=1}^n$ è una base ortonormale se $\{w_i\}_{i=1}^n$ lo è.

In dimensioni infinite la situazione è significativamente diversa e si possono avere operatori isometrici che non sono invertibili. Un esempio paradigmatico: siano $\{\phi_i\}_{i=1}^\infty$ i coefficienti di Fourier di un generico vettore ϕ rispetto a qualche base numerabile dello spazio di Hilbert separabile \mathcal{H} . Definiamo l’operatore V come segue

$$(V\phi)_i = 0 \text{ per } i = 1 \text{ e } (V\phi)_i = \phi_{i-1} \forall i \geq 2$$

Per capire l'azione di V^* notiamo che

$$(\psi, V\phi) = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{\psi}_i \phi_{i-1} = \sum_{i=1}^{\infty} \overline{(V^*\psi)_i} \phi_i = (V^*\psi, \phi)$$

con $(V^*\psi)_{i-1} = \psi_i$. Si ha quindi

$$V\phi = \{0, \phi_1, \phi_2, \dots\} \quad ; \quad V^*\psi = \{\psi_2, \psi_3, \dots\}$$

L'operatore V così definito conserva norma e prodotto scalare ed è quindi isometrico.

È però semplice rendersi conto che l'equazione $V\phi = w_1$ con $w_1 = \{1, 0, 0, \dots\}$ non ammette soluzione e che quindi l'operatore V non è invertibile. (Notare che la definizione di V non ha analogo in uno spazio di Hilbert di dimensioni finite).

Definizione L'operatore U si dice **unitario** se è invertibile e $\|U\phi\| = \|\phi\| \quad \forall \phi \in \mathcal{H}$.

Le proprietà di un operatore unitario sono elencate di seguito (verificarle)

- $(U\phi, U\psi) = (\phi, \psi) \quad \forall \phi, \psi \in \mathcal{H} \quad U U^* = U^* U = \mathbb{1} \quad U^* = U^{-1}$
- Se $\{w_i\}$ è una base ortonormale anche $\{Uw_i\}$ lo è.
- Se $\{w_i\}$ è una base ortonormale e T è un operatore lineare limitato tale che $\{Tw_i\}$ sia una base ortonormale, allora è unitario.
- Se $\{w_i\}$ è una base ortonormale e $\{e_i\}$ è una seconda base ortonormale in \mathcal{H} allora l'operatore definito dalla proprietà che $Uw_i = e_i$, esteso per combinazioni lineari a tutti i vettori di \mathcal{H} , è unitario.

Definizione : Dato un sottospazio \mathbb{M} si dice **operatore di proiezione** su \mathbb{M} l'operatore lineare limitato che ad ogni vettore $\phi \in \mathcal{H}$ associa la sua **proiezione ortogonale** $P_{\mathbb{M}}\phi$ definita nella proposizione 3.

Si verificano facilmente le proprietà e la tesi della Proposizione

- $\|P_{\mathbb{M}}\phi\| \leq \|\phi\|$ essendo ϕ la somma dei due vettori ortogonali $\phi_{\mathbb{M}}$ e $\phi_{\mathbb{M}^{\perp}}$.
- $P_{\mathbb{M}}^2 = P_{\mathbb{M}}$ poiché la proiezione di un vettore già in \mathcal{M} è il vettore stesso.
- $P_{\mathbb{M}}^* = P_{\mathbb{M}}$ essendo $(\phi, P_{\mathbb{M}}\psi) = (P_{\mathbb{M}}\phi, P_{\mathbb{M}}\psi) = (P_{\mathbb{M}}\phi, \psi)$

Proposizione 13 : *un operatore lineare limitato P tale che $P^2 = P = P^*$ è il proiettore ortogonale sul sottospazio $\mathbb{M} = P\mathcal{H}$ immagine dell'applicazione di P a tutti i vettori di \mathcal{H} .*

Esercizio 1

In \mathbb{C}^2 consideriamo gli operatori che, nella base canonica dei vettori $w_1 = (1, 0)$ e $w_2 = (0, 1)$, corrispondono alle tre matrici (matrici di Pauli)

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Provare le seguenti proprietà delle matrici σ_i :

- Le σ_i sono matrici autoaggiunte. Ogni matrice autoaggiunta può essere ottenuta come combinazione lineare a coefficienti reali delle tre matrici di Pauli e della matrice unità. Ogni matrice complessa 2×2 può essere ottenuta come combinazione lineare complessa delle tre matrici di Pauli e della matrice unità.
- $\sigma_i^2 = \mathbb{1}$. Dedurre che le σ_i sono invertibili e calcolarne le matrici inverse.

- Le σ_i sono matrici unitarie. Provare che in nessun \mathbb{C}^n con n dispari esistono matrici autoaggiunte che sono contemporaneamente unitarie.

- $\sigma_i \sigma_j = \mathbb{1} \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$ dove

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (ijk) \text{ è una permutazione ciclica di } (123) \\ -1 & \text{se } (ijk) \text{ è una permutazione ciclica di } (213) \\ 0 & \text{in tutti gli altri casi} \end{cases}$$

- $[\sigma_i, \sigma_j] \equiv \sigma_i \sigma_j - \sigma_j \sigma_i = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k$ e $\{\sigma_i, \sigma_j\} \equiv \sigma_i \sigma_j + \sigma_j \sigma_i = 2 \delta_{ij} \mathbb{1}$

Esercizio 2

Se P_1 e P_2 sono due proiettori su sottospazi ortogonali dello spazio di Hilbert \mathcal{H} dire per quali numeri complessi a_1 e a_2 l'operatore $P = a_1 P_1 + a_2 P_2$ è un proiettore ortogonale e su quale sottospazio.

2.3.3 Operatori non limitati

Affrontiamo ora il caso generale di operatori non limitati di \mathcal{H} in \mathcal{H} . Con T, D_T indicheremo l'operatore lineare T definito sul dominio $D_T \in \mathcal{H}$. Considereremo solo il caso in cui D_T sia denso in \mathcal{H} .

Diremo che un operatore T, D_T **estende** l'operatore V, D_V se $D_V \subset D_T$ e $V\phi = T\phi \quad \forall \phi \in D_V$.

L'operatore T, D_T si dice **chiuso** se per ogni successione di vettori $\phi^{(n)} \in D_T$ convergente in \mathcal{H} al vettore ϕ , tale che la successione dei vettori trasformati $T\phi^{(n)}$ sia anch'essa convergente, diciamo al vettore ξ , accada che ϕ appartiene a D_T e che $T\phi = \xi$. Un operatore chiuso è quindi definito per continuità su tutti i vettori su cui "può essere definito per continuità".

L'operatore T, D_T si dice **chiudibile** se per ogni successione $\phi^{(n)} \in D_T$ con $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi^{(n)} = 0$ tale che esista il limite ξ della successione $T\phi^{(n)}$ accade che

$\xi = 0$. È facile convincersi che la chiudibilità di un operatore T, D_T è la condizione necessaria e sufficiente perché l'operatore possa essere esteso a un operatore chiuso.

Notiamo che anche di un operatore non limitato T, D_T si può definire l'**aggiunto**. Consideriamo infatti il sottoinsieme D^* di \mathcal{H} dei vettori ψ tali che il funzionale lineare $(\psi, T\phi)$ sia un funzionale lineare limitato su D_T . Essendo D_T denso il funzionale può essere esteso per continuità a un funzionale limitato su tutto \mathcal{H} . Per il teorema di Riesz esiste quindi un unico elemento ξ di \mathcal{H} tale che $(\psi, T\phi) = (\xi, \phi)$. Definiremo l'operatore aggiunto T^*, D_{T^*} ponendo $D_{T^*} = D^*$ e, per ogni $\psi \in D^*$, $T^*\psi = \xi$ così che valga la relazione $(\psi, T\phi) = (T\psi, \phi) \quad \forall \phi \in D_T$ e $\forall \psi \in D_{T^*}$.

Vale il seguente teorema di cui dimostreremo solo il punto 2)

Teorema 14 *Sia T un operatore lineare densamente definito sullo spazio di Hilbert \mathcal{H} . Si ha*

- 1) *Se S è un'estensione di T , allora l'aggiunto T^* di T è un'estensione dell'aggiunto S^* di S .*
- 2) *L'aggiunto T^* di T è chiuso*
- 3) *T è chiudibile se e solo se il suo aggiunto T^* è densamente definito. In questo caso la chiusura di T coincide con l'aggiunto del suo aggiunto $(T^*)^*$ (il suo bi-aggiunto).*

Dimostrazione Sia $\phi^{(n)}$ una successione di vettori in D_{T^*} convergente a $\phi \in \mathcal{H}$. Supponiamo inoltre che la successione $T^*\phi^{(n)}$ converga a $\psi \in \mathcal{H}$. Dalla definizione di aggiunto e dalla continuità del prodotto scalare si deduce che per ogni $\xi \in D_T$

$$(\phi, T\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (\phi^{(n)}, T\xi) = \lim_{n \rightarrow \infty} (T^*\phi^{(n)}, \xi) = (\psi, \xi)$$

Il funzionale lineare $(\phi, T\xi)$ è quindi limitato ($(\phi, T\xi) \leq \|\psi\| \|\xi\|$) su D_T . Si ha allora $\phi \in D_{T^*}$ e $T^* \phi = \psi$ che dimostra che l'operatore T^* è chiuso.

Un operatore S, D_S si dice **simmetrico** se $(\psi, S\phi) = (S\psi, \phi) \forall \psi, \phi \in D_S$. Dalla definizione discende che l'aggiunto di un operatore simmetrico ha un dominio che certamente contiene D_S e che su tale dominio S^* opera come S . Quindi l'aggiunto di un operatore simmetrico S, D_S , densamente definito, è densamente definito e estende l'operatore stesso.

Diremo che l'operatore A, D_A è **autoaggiunto** se $A = A^*$. Un operatore simmetrico è quindi autoaggiunto se e solo se il dominio del suo aggiunto coincide con il suo dominio.

2.3.4 Gli operatori di creazione e annichilazione

In l^2 consideriamo gli operatori A, A^\dagger, N (definiti rispettivamente operatori di annichilazione, creazione e numero) nella (2.14) con dominio denso comune $D_F \subset l^2$ dei vettori di l^2 con un numero finito di componenti (controllare che tutti e tre gli operatori siano ben definiti su D_F).

Proviamo che N è estendibile a $D(N) \equiv \{\phi \in l^2 : \sum_{j=0}^{\infty} j^2 |\phi_j|^2 < \infty\}$ e che è autoaggiunto su tale dominio.

In effetti proveremo la seguente proposizione che implica il risultato appena menzionato

Proposizione 15 *Sia f una applicazione che ad ogni $j = 0, 1, \dots$ associa $f(j) \in \mathbb{R}$ e consideriamo l'operatore B_f definito nel modo seguente $(B_f \phi)_i = f(i) \phi_i$ sul dominio $D(B_f) \equiv \{\phi \in l^2 : \sum_{j=0}^{\infty} f(j)^2 |\phi_j|^2 < \infty\}$. Allora $B_f, D(B_f)$ è autoaggiunto in l^2 .*

Dimostrazione L'operatore B_f, D_{B_f} è certamente simmetrico, essendo i valori della funzione f reali. Rimane da dimostrare che il dominio dell'aggiunto non contiene vettori che non siano in D_{B_f} .

Sia $h \in D_{B_f^*}$ e definiamo $B_f^* h = h^* \in l^2$. Per ogni $\phi \in D_{B_f}$ si avrà dunque $(h, B_f \phi) = (h^*, \phi)$. Se ϕ_N è il vettore in $D \subset D_{B_f}$ che ha le prime N componenti uguali a quelle di ϕ mentre tutte le altre sono nulle, valgono le uguaglianze

$$(h, B_f \phi_N) = (h_N, B_f \phi) = ((B_f h)_N, \phi)$$

che può scriversi $(h_N^*, \phi) = ((B_f h)_N, \phi)$, uguaglianza che può essere estesa a tutti i vettori $\phi \in l^2$. Poichè, per ogni N , $\|h_N^*\| \leq \|h^*\| < \infty$, si ha $\|B_f h\| < \infty$ e $h^* = B_f h$. L'operatore è quindi autoaggiunto.

Osservazione 16 È immediato estendere la proposizione precedente al caso di funzione f complessa. In questo caso si dimostra che $D_{B_f^*} = D_{B_f} = \{\phi \in l^2 : \sum_{j=0}^{\infty} |f(j)|^2 |\phi_j|^2 < \infty\}$ e che $B_f^* \phi = B_{\bar{f}} \phi \forall \phi \in D_{B_f}$.

L'operatore N definito su $D_N \equiv \{\phi \in l^2 : \sum_{j=0}^{\infty} j^2 |\phi_j|^2 < \infty\}$ è quindi autoaggiunto in l^2 .

Verifichiamo anche che

Esercizio 1

- A e A^\dagger sono operatori chiusi su $D_A = D_{A^\dagger} = \{\phi \in l^2 : \sum_{j=0}^{\infty} j |\phi_j|^2 < \infty\}$ e sono aggiunti uno dell'altro su tale dominio;
- $A^\dagger A$ e $A A^\dagger$ sono autoaggiunti su D_N e su tale dominio $N = A^\dagger A = A A^\dagger - \mathbb{1}$.

- gli operatori $X = \frac{A + A^\dagger}{\sqrt{2}}$ e $P = \frac{A - A^\dagger}{i\sqrt{2}}$, con dominio D_A , sono simmetrici, ma non autoaggiunti.
- XP e PX sono simmetrici su D_N e $XP - PX = i\mathbb{1}$ su tale dominio.

Infatti

- Sia $\phi^{(n)} \in D_A$ una successione di vettori nel dominio dell'operatore A convergente in l^2 a un vettore ϕ . Supponiamo che la successione dei trasformati $A\phi^{(n)}$ converga in l^2 a un vettore $\psi \in l^2$. Per dimostrare che l'operatore A è chiuso dovremo provare che $\phi \in D_A$ e che $A\phi = \psi$. Scrivendo $A\phi^{(n)} = \psi + (A\phi^{(n)} - \psi)$ deduciamo che per ogni $\epsilon > 0$ esiste un n_0 tale che, per ogni $n > n_0$

$$\|A\phi^{(n)}\| \leq \|\psi\| + \epsilon \quad \text{ovvero} \quad \sum_{j=0}^{\infty} j |\phi_j^{(n)}|^2 \leq K, \quad \forall n, \quad \text{per qualche } K > 0.$$

È possibile quindi passare il limite sotto somma e dedurre che $\phi \in D_A$ e che $A\phi = \psi$ cioè che A è chiuso su D_A . Nello stesso modo si prova la chiusura di A^\dagger sullo stesso dominio.

Per ogni ϕ e ψ in D_A si ha inoltre

$$(\phi, A\psi) = \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\phi}_j \sqrt{j+1} \psi_{j+1} = \sum_{j=1}^{\infty} \overline{\phi_{j-1}} \sqrt{j} \psi_j = (A^\dagger \phi, \psi)$$

- Abbiamo già provato che N è autoaggiunto su D_N . È inoltre vero che AA^\dagger e $A^\dagger A$ sono definiti su D_N e che il commutatore vale $\mathbb{1}$ su D_F e quindi su tutto D_N .

- Gli operatori X e P sono evidentemente definiti e simmetrici su $D_A = D_{A^\dagger}$. Il prodotto scalare $(\phi, X\psi)$ per $\psi \in D_A$ vale

$$\begin{aligned} (\phi, X\psi) &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \bar{\phi}_j \left(\sqrt{j+1} \psi_{j+1} + \sqrt{j} \psi_{j-1} \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{j=0}^{\infty} \overline{\left(\sqrt{j+1} \phi_{j+1} + \sqrt{j} \phi_{j-1} \right)} \psi_j = (X\phi, \psi) \end{aligned} \quad (2.15)$$

Sia $\alpha(j)$ l'indice che identifica la coppia $j_1 = 2\alpha$ e $j_2 = 2\alpha + 1$ con $\alpha = 0, 1, \dots$. Definiamo il vettore:

$$\{\phi \in l^2 \mid \phi_j = (-)^{\alpha} j^{-\beta} \text{ con } \frac{1}{2} < \beta < 1\}.$$

Si noti che $\phi \in l^2$ poiché $\|\phi\|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} |\phi_j|^2 = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} j^{-2\beta} < \infty$ ma che non appartiene a D_A essendo la somma $\sum_{j=0}^{\infty} j |\phi_j|^2$ divergente.

Si ha però che il funzionale (in ψ) $(\phi, X\psi)$ è limitato. Infatti

$$\left(\sqrt{j+1} \phi_{j+1} + \sqrt{j} \phi_{j-1} \right) = \pm j^{-\beta} (\sqrt{j+1} - \sqrt{j})$$

da cui

$$|\sqrt{j+1} \phi_{j+1} + \sqrt{j} \phi_{j-1}| \leq j^{-(\beta+1/2)}.$$

e

$$|(\phi, X\psi)| \leq \left(\sum_{j=0}^{\infty} j^{-(2\beta+1)} \right)^{1/2} \|\psi\| < \infty$$

ϕ appartiene quindi, per definizione, al dominio dell'aggiunto di X .

Il dominio dell'aggiunto è dunque più grande di D_A e l'operatore simmetrico X non è autoaggiunto su D_A .

Le definizioni date nell'esempio precedente si estendono a qualunque spazio di Hilbert separabile \mathcal{H} . Se $\{w_j\}_{j=0, \dots, n, \dots}$ è una base ortonormale di \mathcal{H} basterà

utilizzare l'omeomorfismo che a $E^{(j)} \in l^2$ associa $w_j \in \mathcal{H}$ ovvero che a $\phi \in l^2$, $\phi = \{\phi_j\}_{j=0, \dots, n, \dots}$, associa il vettore $\Phi \in \mathcal{H}$ con coefficienti di Fourier $(w_j, \Phi) = \phi_j \quad \forall j$

Esercizio 2

- Provare che

$$E^{(n)} = \frac{(A^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} E^{(0)}$$

- Provare che per ogni $z \in \mathbb{C}$ il vettore $\phi_z \in \mathcal{H}$

$$\phi_z = e^{-|z|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\sqrt{n!}} E^{(n)}$$

soddisfa le proprietà

$$\|\phi_z\| = 1 \quad A\phi_z = z\phi_z \quad |(\phi_z, \phi_{z'})|^2 = e^{-|z-z'|^2}$$

- L'operatore $U(t)$, definito per ogni $t \in \mathbb{R}$ dalla

$$(U(t)\phi)_j = e^{-ijt}\phi_j$$

è limitato, di norma 1. In più $U(t)$ è un gruppo unitario, cioè $U(t)$ è un operatore unitario $\forall t$ e $U(t)U(s) = U(t+s)$.

Vale inoltre che $\forall \phi \in D_N$

$$i \frac{d}{dt}(U(t)\phi) = N(U(t)\phi)$$

Osservazione

Sia \mathcal{H} uno spazio di Hilbert separabile. Siano a e a^* due operatori chiusi su un dominio comune denso in \mathcal{H} . Assumiamo che esista un insieme denso

$D_f \subset \mathcal{H}$ dove sono definite potenze qualunque di a e a^* e che esista un unico vettore di norma unitaria $\phi^0 \in D_f$ (definito a meno di moltiplicazione per un numero complesso di modulo 1) tale che $a\phi^0 = 0$. Supponiamo inoltre che in D_f valgano le relazioni di commutazione

$$[a, a^*] \equiv aa^* - a^*a = \mathbb{1}. \quad (2.16)$$

e che su D_f l'aggiunto di a operi come a^* . È facile dimostrare per in-

duzione (farlo) la seguente serie di risultati relativi all'insieme di vettori

$$\phi^{(n)} \equiv \frac{(a^*)^n}{\sqrt{n!}} \phi^{(0)}$$

- $a^* a \phi^{(n)} = n \phi^{(n)}$
- $\|\phi^{(n)}\| = 1 \quad \forall n$
- $(\phi^{(n)}, \phi^{(j)}) = 0 \quad \forall j < n$

Più complicato da provare, ma di importanza fondamentale è il seguente risultato

Teorema 17 *Il sistema ortonormale $\phi^{(n)}$ è una base di \mathcal{H}*

Si dice che a e a^* costituiscono in \mathcal{H} una rappresentazione irriducibile delle regole di commutazione (2.16). Irriducibile significa che non esiste alcun sottospazio proprio di \mathcal{H} lasciato invariato da a e a^* .