

# Capitolo 3

## Misura e Integrazione

Come abbiamo accennato nel capitolo precedente, lo spazio di Hilbert di maggior rilevanza per le applicazioni in Fisica Teorica è il completamento dello spazio  $(C(\mathbb{R}^n), \mathbb{C})$ , delle funzioni continue da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{C}$ , rispetto alla norma indotta dal prodotto scalare (Cap. 2 formula (2.6)). La possibilità di definire l'integrale di funzioni con ridotte proprietà di regolarità, in particolare di funzioni non continue, è condizione necessaria per attuare tale completamento. In questo capitolo svilupperemo la teoria astratta dell'integrazione e la specializzeremo alla costruzione degli spazi delle funzioni complesse  $p$ -integrabili su  $\mathbb{R}^n$ . La trattazione che ne daremo segue inizialmente il testo di Lieb e Loos [1] con suggerimenti da [2] e [3]. Le parti di testo riportate in blu sono approfondimenti.

### 3.1 Misura (teoria astratta)

La teoria astratta della misura procede inizialmente a caratterizzare la struttura delle famiglie di insiemi di cui si vuole definire una misura.

Dato un qualunque insieme  $\Omega$ , la collezione  $\Sigma$  di sottoinsiemi di  $\Omega$  che definiremo **misurabili** dovrà essere una  $\sigma$  - **algebra**, dovrà cioè avere le seguenti caratteristiche:

- i) (chiusa per complementazione) se  $A \in \Sigma$ , allora  $A^c \equiv \Omega \setminus A \equiv \{x \in \Omega \mid x \notin A\} \in \Sigma$ ;

- ii) (chiusura per unioni numerabili) se  $A_1, \dots, A_n, \dots$ , è una famiglia numerabile di insiemi in  $\Sigma$ , allora  $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$ ;
- iii)  $\Omega \in \Sigma$ .

Conseguenze della definizione

- i) e ii)  $\implies$  (chiusura per intersezione numerabile) se la famiglia  $A_1, \dots, A_n, \dots$ ;  $A_i \in \Sigma \forall i$  è numerabile allora  $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \Sigma$
- i) e iii)  $\implies \emptyset \in \Sigma$ .

### Esempi

- a) la più piccola  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $\Omega$ ,  $\Sigma = \{\emptyset, \Omega\}$
- b) la più grande  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $\Omega$  :  $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$   
con  $\mathcal{P}(\Omega)$  insieme delle parti di  $\Omega$ , cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi di  $\Omega$ .

Data una qualunque famiglia  $F$  di sottoinsiemi di  $\Omega$ , esiste una più piccola  $\sigma$ -algebra  $\Sigma$  che contiene tutti gli elementi di  $F$ : infatti esiste  $\mathcal{P}(\Omega)$  che certamente contiene tutti gli insiemi in  $F$  e l'intersezione di due  $\sigma$ -algre è una  $\sigma$ -algebra. L'intersezione di tutte le  $\sigma$ -algre che contengono  $F$  è dunque la più piccola con questa proprietà.

La  $\sigma$ -algebra così costruita si dirà **generata** da  $F$ .

Una **misura**  $\mu$  su  $\Sigma$  è una funzione da  $\Sigma$  a  $\mathbb{R}^+$  ( $\infty$  compreso) con le proprietà:

- i)  $\mu(\emptyset) = 0$ ;
- ii) (additività numerabile) se  $A_i, i = 1, \dots, n \dots$  è una famiglia numerabile di insiemi disgiunti, allora  $\mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$ .

Conseguenze della definizione:

- a)  $A, B \in \Sigma, A \subset B \implies \mu(A) \leq \mu(B)$   
infatti  $\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A)$ ;

b) se  $A_i \in \Sigma$ ,  $\forall i = 1, \dots, n, \dots$  e  $A_1 \subset A_2 \subset \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)$$

infatti

$$\begin{aligned} \mu \left( \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right) &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_{i+1} \setminus A_i) + \mu(A_1) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \mu(A_{i+1} \setminus A_i) + \mu(A_1) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_{n+1}); \end{aligned}$$

c) se  $A_i \in \Sigma$ ,  $i = 1, \dots, n, \dots$  è una famiglia numerabile tale che  $A_1 \supset A_2 \supset \dots$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n) = \mu \left( \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right).$$

Le ultime due proprietà sulle misure di successioni “telescopiche” di insiemi saranno i cardini per una teoria dello scambio di limiti e integrali e costituiscono la giustificazione per l'utilizzo delle  $\sigma$ -algebre come famiglie degli insiemi misurabili.

La tripla  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  si definisce **spazio di misura**.

Diremo che una proprietà vale **quasi ovunque (q.o.)** (o meglio,  $\mu$ -**q.o.**) se il sottoinsieme di  $\Omega$  in cui la proprietà è falsa è contenuto in un insieme di  $\Sigma$  di misura nulla.

### Esempi di spazi di misura

Esempio a)  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu)$  lo spazio di misura più importante per il nostro corso.

Nello spazio euclideo reale a  $n$  dimensioni  $\mathbb{R}^n$  richiediamo che siano misurabili (e che abbiano come misura quella prescritta dalla geometria elementare):

- le sfere (di qualunque raggio  $r$  e con centro in un qualunque punto  $x$ )  $B_{r,x} \{y \in \mathbb{R}^n \mid |x - y| < r\}$ . Le sfere chiuse dovranno anche essere misurabili e avere la stessa misura.

e

- i parallelogrammi  $P_{I_1 \dots I_n} = \{y \in \mathbb{R}^n \mid y_1 \in I_1, \dots, y_n \in I_n\}$ , con  $I_1, \dots, I_n$  intervalli aperti della retta reale.

$\mathcal{B}$  è la  $\sigma$ -algebra generata dalle sfere aperte di  $\mathbb{R}^n$ . Viene denominata  $\sigma$ -algebra di Borel, e gli insiemi che appartengono a  $\mathcal{B}$  vengono detti borelliani di  $\mathbb{R}^n$ .

Si può dimostrare che  $\mathcal{B}$  contiene tutti gli insiemi aperti (quindi tutti gli insiemi chiusi) di  $\mathbb{R}^n$ .

**Osservazione 1** *Non è possibile “esibire” esplicitamente un sottoinsieme di  $\mathbb{R}^n$  che non appartenga a  $\mathcal{B}$ ; è solo possibile dare una procedura di costruzione di un tale insieme, giustificata dall’ “assioma della scelta”. La difficoltà di costruire insiemi di  $\mathbb{R}^n$  non-borelliani indica quanto sia vasta la  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}$ .*

Con  $\mathcal{B}_A$  indicheremo i borelliani di un qualunque insieme aperto  $A \supset \mathbb{R}^n$ .

La misura  $\mu_{\mathcal{L}}$  dovrà assegnare alle sfere di raggio  $r$  misura

$$\mu_{\mathcal{L}}(B_{r,x}) = V^{(n)}(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^n$$

(per il calcolo, vedi più avanti) e ai parallelepipedi

$$\mu_{\mathcal{L}}(P_{I_1, \dots, I_n}) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i) \quad \text{se } I_i = (a_i, b_i)$$

Come si vede, la misura è invariante per traslazione (non dipende da  $x$  per le sfere, e dipende solo dalle differenze  $(b_i - a_i)$  per i parallelepipedi).

Non daremo i dettagli della costruzione della misura di Lebesgue  $\mu_{\mathcal{L}}$ , cioè dell’unica misura sui borelliani di  $\mathbb{R}^n$ , invariante per traslazione, che dà alle sfere (o ai parallelepipedi) la misura indicata sopra. Ricordiamo solamente alcune proprietà fondamentali di  $\mu_{\mathcal{L}}$ .

- Regolarità esterna:  $\mu_{\mathcal{L}}(A) = \inf\{\mu_{\mathcal{L}}(O) \mid O \text{ aperto, } O \supset A\}$  per ogni  $A \in \mathcal{B}$ ;

- Regolarità interna:  $\mu_{\mathcal{L}}(A) = \sup\{\mu_{\mathcal{L}}(K) \mid K \text{ chiuso limitato, } K \subset A\}$  per ogni  $A \in \mathcal{B}$ ;
- $\mu_{\mathcal{L}}$  è  $\sigma$ -finita: esiste cioè in  $\Sigma$  un insieme numerabile di insiemi, di misura finita, la cui unione è tutto  $\mathbb{R}^n$ . Infatti  $\mathbb{R}^n = \bigcup_{m=1}^{\infty} C_m$ , dove i  $C_m$  sono cubi chiusi di lato unitario centrati sui punti di  $\mathbb{R}^n$  con coordinate intere ( si noti che  $\mu(C_m) = 1 \ \forall m$ ).

Formula per il volume della sfera di raggio  $r$  in  $\mathbb{R}^n$

$$\text{Vol. } B_{r,0} \equiv V^{(n)}(r)$$

1.  $V^{(n)}(r) = V^{(n)}(1) r^n$
2.  $V^{(n)}(r) = \int_0^r S^{(n)}(\rho) d\rho$      $S^{(n)}(\rho) =$  superficie della sfera di raggio  $\rho$  in  $\mathbb{R}^n$
3. da 1) e 2):

$$\frac{dV^{(n)}}{dr}(r) = \begin{array}{c} \diagup \\ \parallel \\ \diagdown \end{array} \begin{array}{c} V^{(n)}(1) n r^{n-1} \\ \\ S^{(n)}(r) \end{array} \implies \frac{S^{(n)}(r)}{S^{(n)}(1)} = r^{n-1} \text{ e } S^{(n)}(1) = nV^{(n)}(1)$$

$$4. \int_0^{\infty} e^{-r^2} \underbrace{S^{(n)}(1) r^{n-1}}_{S^{(n)}(r)} dr = \prod_{i=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x_i^2} dx_i = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\}^n$$

$$5. \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right\}^2 = \int_0^{\infty} e^{-\rho^2} 2\pi\rho d\rho = \pi \int_0^{\infty} e^{-y} dy = \pi$$

6. da 4) e da 5):

$$S^{(n)}(1) = \frac{\pi^{n/2}}{\int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{n-1} dr} = \frac{2\pi^{n/2}}{\underbrace{\int_0^{\infty} e^{-y} y^{\frac{n}{2}-1} dy}_{\Gamma(n/2)}}$$

**Def.:**  $\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-y} y^{z-1} dy$  (per integrazione per parti è facile calcolare che per  $z = n$ , numero naturale, che  $\Gamma(n) = (n-1)!$ ).

7. da 3):

$$V^{(n)}(1) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \longrightarrow V^{(n)}(r) = \frac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} r^n$$

Esempio b)  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \delta_y)$ , dove  $\Omega$  è un insieme qualunque,  $\mathcal{P}(\Omega)$  la  $\sigma$ -algebra di tutti i sottoinsiemi di  $\Omega$ ,  $y$  è un punto di  $\Omega$  e  $\delta_y(A) = \begin{cases} 1 & \text{se } y \in A \\ 0 & \text{se } y \notin A \end{cases}$  per  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ .

In  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B})$  l'analogia misura prende il nome di misura delta di Dirac nel punto  $y$  di  $\mathbb{R}^n$ .

Esempio c)  $(\{1, \dots, n\}, \mathcal{P}\{1, \dots, n\}, P)$ , con  $P(A) = \frac{1}{n} \#(A)$  (numero di elementi in  $A$ ).

$P$  è la misura di probabilità ( $P\{1, \dots, n\} = 1$ ) di un dado non “truccato” a  $n$  facce. L’ “evento  $A$ ” è interpretato come “nel lancio di un dado uno dei valori  $i$  appartenenti ad  $A$  esce”.

Esempio d)  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}, \mu_G)$  con  $\mu_G$  l'unica misura su borelliani che dà ai parallelepipedi  $P_{I_1, \dots, I_n}$  la misura

$$(\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^n \left( \int_{I_i} e^{-x_i^2} dx_i \right)$$

è una misura di probabilità ( $\mu_G(\mathbb{R}^n) = 1$ ).

Non è una misura invariante per traslazione in  $\mathbb{R}^n$ . (I cubi lontani dall'origine pesano esponenzialmente meno di quelli prossimi all'origine).

Chiudiamo questa sezione con un teorema, che non dimostreremo (malgrado la dimostrazione non sia complicata), che caratterizza una sottofamiglia di

insiemi in  $\Sigma$  la cui misura definisce univocamente quella di tutti gli insiemi della  $\sigma$ -algebra.

Sia  $\mathcal{A}$  un'algebra di sottoinsiemi di  $\Omega$  che contiene  $\Omega$  (la mancanza del  $\sigma$  significa che la famiglia di sottoinsiemi  $\mathcal{A}$  è chiusa per complementazione e unione **finita** di insiemi). Sia  $\Sigma$  la più piccola  $\sigma$ -algebra che contiene  $\mathcal{A}$ .

Una misura su  $\Sigma$  è definita in maniera unica dai suoi valori sugli insiemi di  $\mathcal{A}$ ? A questa domanda risponde in maniera positiva il seguente:

**Teorema 2 ( Teorema di unicità )** : *siano  $\mu_1$  e  $\mu_2$  due misure  $\sigma$ -additive su  $\Sigma$  che coincidono sugli insiemi di  $\mathcal{A}$ . Se esistono insiemi  $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \in \mathcal{A}$  di misura finita (notare che la richiesta è più restrittiva della  $\sigma$ -finitezza dovendo tutti gli insiemi appartenere all'algebra), tali che  $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$  allora le due misure coincidono su tutta  $\Sigma$ .*

## 3.2 Integrazione (teoria astratta)

Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  si dice **misurabile** se gli insiemi di livello

$$L_f(t) = \{x \in \Omega \mid f(x) > t\}, \quad t \in \mathbb{R}$$

sono misurabili  $\forall t$  (cioè  $L_f(t) \in \Sigma, \forall t$ ).

Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  si dice misurabile se la sua parte reale e la sua parte immaginaria sono misurabili.

Considerazioni e conseguenze della definizione:

- a) definizioni equivalenti si ottengono sostituendo al  $>$  nella definizione ogni altra relazione d'ordine  $\geq, <, \leq$ . Gli insiemi di livello con ciascuna definizione si ottengono per intersezioni o unioni numerabili di insiemi di livello con definizione alternativa (o per complementazione)
- b) per la misurabilità degli insiemi di livello, per ogni  $t \in \mathbb{R}$  è sufficiente la misurabilità degli insiemi di livello per i soli  $t$  razionali.
- c) se  $f(x)$  e  $g(x)$  sono misurabili, lo sono anche
  - $\lambda f(x)$  per  $\lambda \in \mathbb{C}$

- $f(x) + g(x)$
- $f(x) \cdot g(x)$
- $|f(x)|$
- $\max\{f(x), g(x)\}$  ,  $\min\{f(x), g(x)\}$ .

### 3.2.1 Definizione di integrale su $(\Omega, \Sigma, \mu)$

Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$  è una funzione misurabile non negativa, definiamo

$$F_f(t) = \mu(\{x \in \Omega \mid f(x) > t\}) .$$

Poiché  $\{x \in \Omega \mid f(x) > t\} \supset \{x \in \Omega \mid f(x) > s\}$  se  $s > t$ ,  $F_f(t)$  è una funzione positiva non crescente il cui integrale di Riemann è sempre definito (finito o infinito).

**Osservazione 3** Ricordarsi che per ogni suddivisione di  $[t, T]$  in  $N$  intervalli  $[t_i, t_{i+1}]$ , con  $t_0 = t$  e  $t_N = T$  e per ogni funzione non crescente  $g(t) \geq 0$  le somme superiore  $S$  ed inferiore  $s$  sono date esplicitamente da

$$S = \sum_{i=0}^{N-1} g(t_i)(t_{i+1} - t_i) \geq s = \sum_{i=0}^{N-1} g(t_{i+1})(t_{i+1} - t_i)$$

Quindi

$$\begin{aligned} S - s &= \sum_{i=0}^{N-1} (g(t_i) - g(t_{i+1}))(t_{i+1} - t_i) \\ &\leq (g(t) - g(T)) \max_i (t_{i+1} - t_i) \end{aligned}$$

tende a 0 quando l'ampiezza massima degli intervalli della suddivisione tende a 0.

#### Definizione di integrale

$$\int_{\Omega} f(x) \mu(dx) \equiv \int_0^{\infty} F_f(s) ds \quad \left( = \lim_{t \rightarrow 0, T \rightarrow \infty} \int_t^T F_f(\xi) d\xi \right) \quad (3.1)$$

Se l'integrale così definito è finito, la funzione  $f$  si dice **integrabile** o **sommabile**. Se la funzione  $f$  risulta integrabile è naturalmente necessario che  $F_f(t) \rightarrow 0$  quando  $t$  tende all'infinito. La funzione  $f$  deve quindi essere finita  $\mu - q.o.$ . Si noti inoltre che, se la funzione  $f$  è  $\mu - q.o.$  strettamente positiva si ha che  $F_f(0) = \mu(\Omega)$  che, in molti casi di interesse, risulta infinita. L'integrale di Riemann nella definizione (3.1) risulta quindi un integrale improprio nell'origine e va inteso come indicato in parentesi.

Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $f$  può essere scritta

$$f = (\operatorname{Re}f)_+(x) - (\operatorname{Re}f)_-(x) + i(\operatorname{Im}f)_+(x) - i(\operatorname{Im}f)_-(x)$$

con  $(\operatorname{Re}f)_+(x) = \max\{(\operatorname{Re}f)(x), 0\}$   $(\operatorname{Re}f)_-(x) = -\min\{(\operatorname{Re}f)(x), 0\}$  . . . . .

**Definizione**  $f$  si dice integrabile se  $|f|$  lo è (alternativamente, se  $(\operatorname{Re}f)_+$ ,  $(\operatorname{Re}f)_-$ ,  $(\operatorname{Im}f)_+$  e  $(\operatorname{Im}f)_-$  lo sono).

**Definizione**

$$\int_{\Omega} f(x)\mu(dx) = \int_{\Omega} (\operatorname{Re}f)_+(x)\mu(dx) - \int_{\Omega} (\operatorname{Re}f)_-(x)\mu(dx) + i \int_{\Omega} (\operatorname{Im}f)_+(x)\mu(dx) - i \int_{\Omega} (\operatorname{Im}f)_-(x)\mu(dx) \quad (3.2)$$

**Osservazione 4** È importante notare che la definizione (3.2) di integrale della funzione complessa  $f$  ha senso solo se la funzione  $f$  è sommabile. Non esiste una definizione di integrale della  $f$  se la funzione non è sommabile

Se  $\chi_A(x)$  è la funzione caratteristica di un insieme misurabile  $A$   $\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$

$$\begin{aligned} \mu(x | \chi_A(x) > t) &= 0 && \text{se } t \geq 1 \\ &= \mu(A) && \text{se } 0 \leq t < 1 \end{aligned}$$

quindi

$$\int_{\Omega} \chi_A(x)\mu(dx) = \mu(A)$$

Se  $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$  sono costanti positive e  $A_1, \dots, A_n, \dots$  una famiglia numerabile di insiemi disgiunti

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \chi_{A_i}(x)$$

(**funzione a scala**) è misurabile e

$$\int_{\Omega} f(x) \mu(dx) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mu(A_i).$$

Infatti

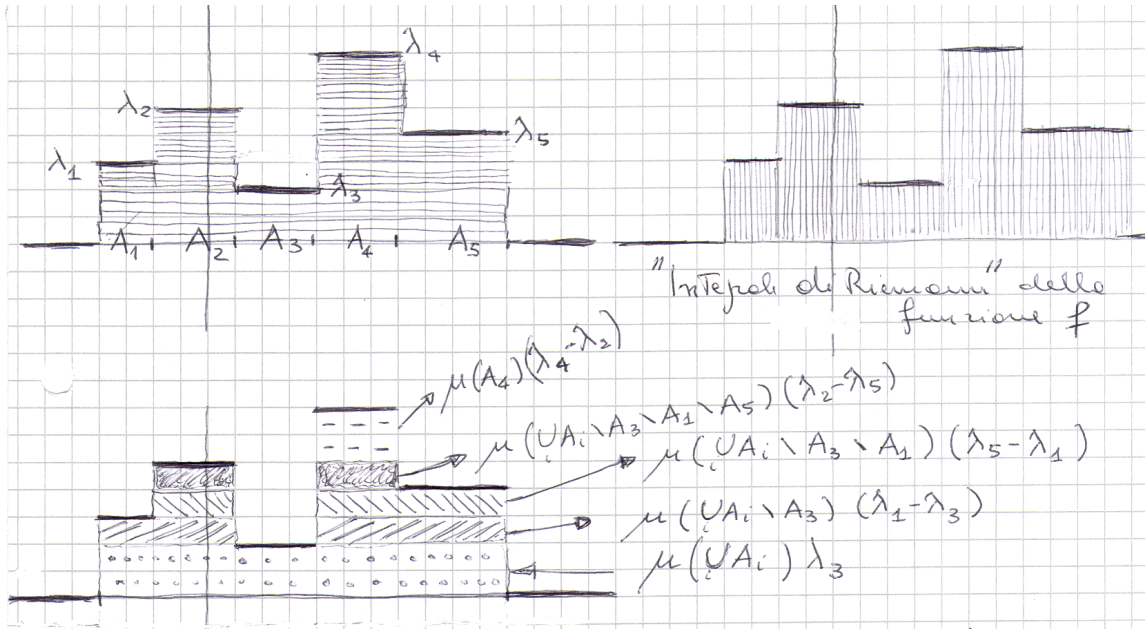
$$F_f(t) = \mu\{x \mid f(x) > t\} = \sum_{j:\lambda_j > t} \mu(A_j)$$

quindi ciascun  $\mu(A_j)$  appare nella somma che dà il valore della funzione integranda  $F_f(t)$  fino al valore  $t = \lambda_j$ :

$$\int_0^{\infty} F_f(t) dt = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \mu(A_i)$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} F_f(t) dt &= \left( \sum_i \mu(A_i) \right) \lambda_3 + \left( \sum_{i \neq 3} \mu(A_i) \right) (\lambda_1 - \lambda_3) \\ &+ \left( \sum_{\substack{i \neq 3 \\ i \neq 1}} \mu(A_i) \right) (\lambda_5 - \lambda_1) + \left( \sum_{\substack{i \neq 3 \\ i \neq 1 \\ i \neq 5}} \mu(A_i) \right) (\lambda_2 - \lambda_5) + \\ &+ \mu(A_4) (\lambda_4 - \lambda_2) = \sum_i \mu(A_i) \lambda_i = \text{“Area sotto la curva”} \end{aligned}$$

Con funzioni a scala è possibile approssimare l'integrale di una qualunque funzione integrabile. Sia infatti  $f$  una funzione misurabile, non negativa, definita in  $\Omega$  e sia data una qualunque suddivisione di  $[0, \infty)$  in intervalli  $[t_i, t_{i+1})$ . Gli insiemi  $A_i = \{x \in \Omega \mid t_i < f(x) \leq t_{i+1}\}$  sono misurabili e la funzione a scala  $\sum_i t_i \chi_{A_i}$  ha integrale uguale alla somma inferiore nell'integrale di Riemann che appare nella definizione (3.1).



In questo modo si prova che date  $f$  e  $g$  integrabili, ogni combinazione lineare  $\lambda f + \beta g$ , con  $\lambda, \beta \in \mathbb{C}$  è sommabile (parte facile) e vale

$$\int_{\Omega} (\lambda f(x) + \beta g(x)) \mu(dx) = \lambda \int_{\Omega} f(x) \mu(dx) + \beta \int_{\Omega} g(x) \mu(dx)$$

(parte un po' più difficile).

Per la misura di Lebesgue in  $\mathbb{R}$  useremo da ora in poi la notazione utilizzata per l'integrale di Riemann  $\mu(dx) \equiv dx$

**Esercizio 1** *Provare che se  $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$  è una funzione abbastanza regolare (specificare), allora l'integrale definito in precedenza su  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, dx)$  è uguale all'integrale di Riemann della stessa funzione.*

### 3.3 Tre teoremi della teoria dell'integrazione

Dato lo spazio di misura  $(\Omega, \Sigma, \mu)$ :

**Teorema 5 (Convergenza monotona)** Sia  $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  una successione di funzioni non negative, crescente ( $f_{n+1}(x) \geq f_n(x)$  per quasi ogni  $x \in \Omega$ ).

Sia  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  (che certamente esiste - finito o infinito - per quasi ogni  $x$ ). Le  $f_n(x)$  siano tutte integrabili. Allora:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$$

con  $f$  integrabile se e solo se il limite al primo membro è finito.

**Dimostrazione** Per ogni  $t$  fissato, gli insiemi  $\{x \in \Omega \mid f_n(x) > t\}$  sono ciascuno contenuto nel successivo, data la non decrescenza della successione. Per le proprietà della misura, dunque:

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega \mid f_n(x) > t\}) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \mid f_n(x) > t\}\right) \\ &= \mu(\{x \mid f(x) > t\}) \end{aligned}$$

**Osservazione 6** L'uguaglianza degli insiemi garantisce la misurabilità dell'ultimo, quindi di  $f$ .

Resta dunque da dimostrare una proprietà dell'integrale di Riemann:

**Proposizione 7** Sia data una successione di funzioni positive non crescenti ( $g_n(t) > 0$ ,  $g_n(t) \geq g_n(s)$   $s > t$ ), tali che esista, finito,  $\int_0^{\infty} g_n(t) dt$ . Se la successione è crescente in  $n$ , a  $t$  fissato ( $g_{n+1}(t) \geq g_n(t)$ ), allora

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} g_n(t) dt = \int_0^{\infty} \left( \lim_{n \rightarrow \infty} g_n(t) \right) dt$$

(Provarlo per l' $\int_v^V g_n dt$ , con  $0 < v < V < \infty$ , dimostrando che le somme superiori e inferiori  $S^n$  e  $s^n$  convergono per  $n \rightarrow \infty$  e la loro differenza va a 0, raffinando la suddivisione, uniformemente in  $n$ . Passare poi al limite per  $v \rightarrow 0$ ,  $V \rightarrow \infty$ ).

Questo chiude la dimostrazione del teorema.

**Teorema 8 (Lemma di Fatou)** Se  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  è una successione di funzioni non negative  $\Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \equiv f(x)$  è misurabile e

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) \mu(dx) \geq \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$$

Se il membro di sinistra risulta finito,  $f$  è integrabile.

(Se  $a_n$  è una successione di numeri reali,  $\inf_{k \geq n} a_k$  è una successione non decrescente in  $n$ , e per definizione  $\sup_n \inf_{k \geq n} a_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k \equiv \liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$ ).

Per la prova del lemma vedi il capitolo III degli appunti nella forma estesa

**Teorema 9 (Convergenza dominata)** Se  $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$  è una successione di funzioni complesse, integrabili, che convergono a  $f(x)$  per  $\mu$ -quasi ogni  $x$ , ed esiste una funzione integrabile, non negativa,  $G(x)$ , tale che

$$|f_n(x)| \leq G(x) \quad \forall n = 1, \dots, m, \dots \quad \text{e per quasi ogni } x$$

allora

$$\underbrace{|f(x)| \leq G(x)}_{\text{ovvio}} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) \mu(dx) = \int_{\Omega} f(x) \mu(dx)$$

Per la prova del lemma vedi il capitolo III degli appunti nella forma estesa. Il teorema di dominata convergenza fornisce una condizione sufficiente per lo scambio di limite e integrale che sarà fondamentale per le applicazioni che seguiranno.

## 3.4 Misura prodotto e teorema di Fubini

Il risultato che segue, di cui non verrà data dimostrazione, è anche la definizione di misura prodotto. Siano  $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$  e  $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$  due spazi di misura.

Consideriamo lo spazio prodotto cartesiano  $\Omega_1 \times \Omega_2$ :

$$\Omega \equiv \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in \Omega_1, \quad x_2 \in \Omega_2\}$$

Si dicono **rettangoli** gli insiemi  $A = A_1 \times A_2$  con  $A_1 \in \Sigma_1$ ,  $A_2 \in \Sigma_2$

$$A_1 \times A_2 = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in A_1, x_2 \in A_2\}$$

Definiamo la  $\sigma$ -algebra  $\Sigma \equiv \Sigma_1 \times \Sigma_2$  come la più piccola  $\sigma$ -algebra di sottoinsiemi di  $\Omega$  che contiene tutti i rettangoli.

Dato  $A \in \Sigma$ , siano

$$A_1(x_2) = \{x_1 \in \Omega_1 \mid (x_1, x_2) \in A\} \text{ e } A_2(x_1) = \{x_2 \in \Omega_2 \mid (x_1, x_2) \in A\}$$

le “**sezioni** a  $x_2$  o  $x_1$  fissato”. Si può dimostrare che ogni insieme della  $\sigma$ -algebra  $\Sigma$  ha la **proprietà delle sezioni** cioè vale che

$$\forall A \in \Sigma \forall x_2 \in \Omega_2, x_1 \in \Omega_1 \quad A_1(x_2) \in \Sigma_1, \quad A_2(x_1) \in \Sigma_2$$

.

**Misura prodotto** Siano  $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$  e  $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$  due spazi di misura  $\sigma$ -finita. Sia  $A$  un insieme misurabile ( $\in \Sigma_1 \times \Sigma_2$  definito precedentemente) e indichiamo con  $A_1(x)$  le sue sezioni per ciascun  $x$  di  $\Omega_2$  (tutte misurabili, cioè  $\in \Sigma_1$ ) e con  $A_2(y)$  le sezioni per ciascun  $y$  di  $\Omega_1$  (tutte misurabili cioè  $\in \Sigma_2$ ).

Allora:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_2} \mu(A_1(x)) \mu_2(dx) &= \int_{\Omega_1} \mu(A_2(y)) \mu_1(dy) \\ &\equiv (\mu_1 \times \mu_2)(A) \end{aligned}$$

**Teorema 10** (*Teorema di Fubini*)

Se  $(\Omega_1, \Sigma_1, \mu_1)$ ,  $(\Omega_2, \Sigma_2, \mu_2)$  sono due spazi di misura  $\sigma$ -finita,  $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione misurabile (i suoi insiemi di livello sono in  $\Sigma_1 \times \Sigma_2$ ) e integrabile rispetto a  $\mu_1 \times \mu_2$ . Allora:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(x, y) (\mu_1 \times \mu_2)(dx dy) &= \int_{\Omega_1} \left( \int_{\Omega_2} f(x, y) \mu_2(dy) \right) \mu_1(dx) \\ &= \int_{\Omega_2} \left( \int_{\Omega_1} f(x, y) \mu_1(dx) \right) \mu_2(dy) \end{aligned}$$

### 3.5 Spazi $L^p$

Sia  $(\Omega, \Sigma, \mu)$  uno spazio di misura, e consideriamo l'insieme delle funzioni  $f$  da  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$  misurabili, tali che  $|f|^p$  sia integrabile (l'esponente  $p$  è in principio un qualunque valore reale  $1 \leq p < \infty$ , anche se noi considereremo solo valori razionali).

**Lemma 11** *Se  $f$  e  $g$  sono  $p$ -integrabili ( $\equiv |f|^p$  e  $|g|^p$  sono integrabili), allora  $\lambda f$  e  $f + g$  lo sono.*

*Infatti:*

$$|\lambda f(x)|^p = |\lambda|^p |f(x)|^p \quad \text{e} \quad |f(x) + g(x)|^p \leq 2^{p-1}(|f(x)|^p + |g(x)|^p)$$

**Dimostrazione** Per  $p = 1$  è certamente vero che  $|a + b| \leq |a| + |b|$ . Ipotizziamo la disuguaglianza vera per  $p$ . Allora

$$\begin{aligned} |a + b|^{p+1} &= |a + b| |a + b|^p \leq (|a| + |b|)(|a|^p + |b|^p)2^{p-1} \\ &= 2^p(|a|^{p+1} + |b|^{p+1}) + 2^{p-1}(|a| |b|^p + |b| |a|^p - |a|^{p+1} - |b|^{p+1}) \\ &= 2^p(|a|^{p+1} + |b|^{p+1}) + \underbrace{2^{p-1}(|b|^p - |a|^p)(|a| - |b|)}_{<0} \\ &\leq 2^p(|a|^{p+1} + |b|^{p+1}) \end{aligned}$$

(generalizzare la prova ad ogni  $p$  reale  $> 1$ ).

Lo spazio delle funzioni  $p$ -integrabili è quindi uno spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ . Per ogni  $f$   $p$ -integrabile definiamo

$$\|f\|_p \equiv \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/p}$$

con le proprietà:

$$\mathbf{A)} \quad \|\lambda f\|_p = |\lambda| \|f\|_p$$

$$\|f\|_p = 0 \Rightarrow f(x) = 0 \quad \text{per } \mu - \text{quasi ogni } x \text{ in } \Omega$$

$\|f\|_p = 0$  non implica dunque che  $f(x) = 0$  ovunque, che sia cioè lo zero della somma nello spazio vettoriale. Perché  $\|\cdot\|_p$  definisca una “distanza dall'origine” bisogna ridefinire l'uguaglianza a zero di una funzione (e quindi l'uguaglianza tra due funzioni).

Si consideri nello spazio vettoriale delle funzioni  $p$ -integrabili la relazione di equivalenza

$$f \sim g \text{ se } f(x) - g(x) = 0 \text{ } \mu - \text{quasi ovunque}$$

(che ha evidentemente le proprietà di una relazione di equivalenza

$$f \sim f; \quad f \sim g \Leftrightarrow g \sim f; \quad f \sim g \text{ e } g \sim h \Rightarrow f \sim h)$$

Ad ogni  $f$  possiamo associare la **classe di equivalenza** di tutte le funzioni equivalenti a  $f$ . Due funzioni non equivalenti appartengono a classi differenti. Se  $f \sim g \Rightarrow \lambda f \sim \lambda g$  e se  $f_1 \sim g_1$  e  $f_2 \sim g_2$ ,  $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$ , quindi all'insieme delle classi di equivalenza si può dare la struttura di spazio vettoriale.

Consideriamo ora lo spazio vettoriale delle funzioni  $f(x) : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  che sono **essenzialmente limitate** ( $\exists k > 0 : |f(x)| < k$  per  $\mu$ -quasi ogni  $x$ ), e definiamo:

$$\|f\|_\infty = \inf\{k > 0 : |f(x)| < k \text{ per } \mu - \text{quasi ogni } x\}$$

Come precedentemente

$$\begin{aligned} \|\lambda f\|_\infty &= |\lambda| \|f\|_\infty \\ \|f\|_\infty = 0 &\Rightarrow f = 0 \text{ per } \mu - \text{quasi ogni } x \in \Omega \end{aligned}$$

Ancora:  $\|f\|_\infty = 0$  non implica che  $f = 0$  ovunque, e conviene definire nello spazio vettoriale delle funzioni essenzialmente limitate la relazione di equivalenza e le corrispondenti classi di equivalenza definite precedentemente. Come precedentemente all'insieme delle classi di equivalenza, si può dare la struttura di spazio vettoriale.

**Proposizione 12** : Se  $\|f\|_p < \infty$  e  $\|f\|_\infty < \infty$  allora

a)  $\|f\|_{p'} < \infty \forall p' > p$ . In particolare se  $\mu(\Omega) < \infty$  allora  $\|f\|_\infty < \infty$  implica  $\|f\|_p < \infty$  per ogni  $p \geq 1$  (o meglio  $\|f\|_{p'} < \infty$  implica  $\|f\|_p < \infty \forall p \leq p'$ );

b)

$$\|f\|_\infty = \lim_{p' \rightarrow \infty} \|f\|_{p'}$$

**Dimostrazione** Basta notare che per  $\mu$  quasi ogni  $x$

$$\begin{aligned} |f(x)|^{p'} &\leq \|f\|_\infty^{p'-p} |f(x)|^p \\ \Rightarrow \|f\|_{p'} &\leq \|f\|_\infty^{(p'-p)/p'} \|f\|_p^{p/p'} \end{aligned}$$

Se  $\mu(\Omega) < \infty$  ogni funzione essenzialmente limitata è anche integrabile dato che  $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \mu(\Omega)$ . In questo caso quindi,  $\|f\|_\infty < \infty$  implica  $\|f\|_p < \infty \forall p \geq 1$ . Sempre nel caso di spazi di misura finita, l'applicazione della disuguaglianza di Hölder (vedi la pagina successiva per enunciato e prova) al prodotto della funzione identità per la funzione  $|f|^p$  fornisce la disuguaglianza

$$\|f\|_p \leq \mu(\Omega)^{1/p'} \|f\|_{pq'} \quad \forall q' > 1 \quad \frac{1}{q'} + \frac{1}{p'} = 1$$

che conclude la prova dell'enunciato a) della proposizione.

La prova della proprietà b) è lasciata come esercizio.

**Definizione** Indicando col simbolo  $/ \sim$  l'operazione di quoziente di un insieme rispetto alla relazione di equivalenza  $\sim$  definiamo

$$\begin{aligned} L^p(\Omega) &= \text{funzioni } p\text{-integrabili} / \sim \\ L^\infty(\Omega) &= \text{funzioni essenzialmente limitate} / \sim \end{aligned}$$

ovvero  $L^p$  (rispettivamente  $L^\infty$ ) è lo spazio vettoriale delle classi di equivalenza di funzioni  $p$ -integrabili (rispettivamente essenzialmente limitate) uguali  $\mu$ -quasi ovunque in  $\Omega$ .

In  $L^p(\Omega)$

$$\mathbf{B)} \quad \|f\|_p = 0 \Rightarrow f = 0 \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

dove  $\|f\|_p$  non dipende da quale elemento della classe di equivalenza di  $f$  viene usato per il calcolo dell'integrale e  $f = 0$  indica la classe di equivalenza della funzione nulla ovunque, cioè la classe delle funzioni  $= 0$   $\mu$ -quasi ovunque.

Per provare che  $\| \cdot \|_p$  soddisfa la disuguaglianza triangolare e può quindi definire una distanza dall'origine, proviamo l'importante disuguaglianza:

**Teorema 13 (Disuguaglianza di Hölder)** *Se  $1 \leq p \leq \infty$  e  $q$  è tale che  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  (indice "duale a  $p$ ") e*

$$f \in L^p(\Omega), \quad g \in L^q(\Omega)$$

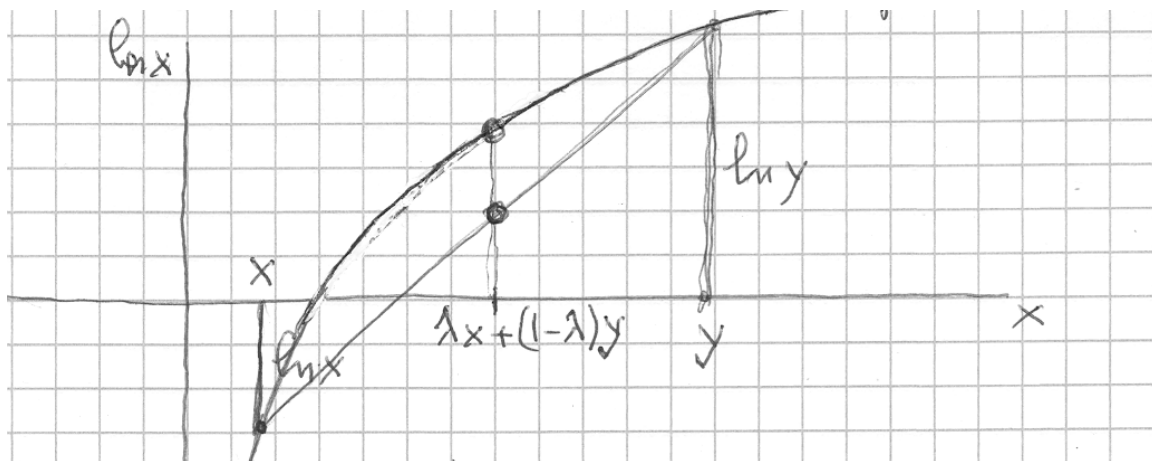
allora

$$f \cdot g \in L^1(\Omega)$$

e

$$\|fg\|_1 = \int_{\Omega} |f(x)g(x)| \mu(dx) \leq \|f\|_p \|g\|_q$$

**Dimostrazione** La prova discende da una disuguaglianza che è una semplice conseguenza delle proprietà di concavità della funzione logaritmo.



La corda che congiunge nel grafico i punti di coordinate  $(x, \ln x)$  e  $(y, \ln y)$  rimane sempre al di sotto del grafico della funzione nell'intervallo  $[x, y]$ .

Parametrizzando i punti dell'intervallo  $[x, y]$  con  $\lambda x + (1 - \lambda)y$ ,  $0 \leq \lambda \leq 1$ , la disuguaglianza si legge

$$\begin{aligned} \lambda \ln x + (1 - \lambda) \ln y &\leq \ln(\lambda x + (1 - \lambda)y) \\ \Rightarrow x^\lambda y^{1-\lambda} &\leq \lambda x + (1 - \lambda)y \end{aligned}$$

essendo il logaritmo una funzione crescente.

Scegliendo

$$\begin{aligned} x &= \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} & y &= \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} & \lambda &= \frac{1}{p} \quad \left( \Rightarrow 1 - \lambda = \frac{1}{q} \right) \\ \Rightarrow \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} &\leq \frac{1}{p} \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q} \end{aligned}$$

che integrata su  $\Omega$  prova la disuguaglianza:

$$\frac{1}{\|f\|_p \|g\|_q} \int_{\Omega} |f(x)| |g(x)| \mu(dx) \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Esercizio 2** *Provare che se  $f \in L^{p'}(\Omega) \cap L^{p''}(\Omega)$  con  $p'' > p'$  allora  $f \in L^p(\Omega) \forall p' \leq p \leq p''$  qualunque sia la misura di  $\Omega$ .*

Dalla disuguaglianza di Hölder si ricava facilmente la disuguaglianza triangolare

**C)** se  $f, g \in L^p(\Omega)$   $\|f + g\|_p \leq \|f\|_p + \|g\|_p$

Infatti

$$\begin{aligned} |f(x) + g(x)|^p &= |f(x) + g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} \\ &\leq |f(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} + |g(x)| |f(x) + g(x)|^{p-1} \end{aligned}$$

Tenendo conto che  $p = 1 + p/q$ , integrando i due membri su  $\Omega$  e utilizzando la disuguaglianza di Hölder:

$$\|f + g\|_p^p \leq (\|f\|_p + \|g\|_p) \underbrace{\left( \int_{\Omega} |f(x) + g(x)|^p \mu(dx) \right)^{1/q}}_{\|f+g\|_p^{p-1}}$$

$\| \cdot \|_p$  è dunque una norma in  $L^p(\Omega)$ , cioè un'applicazione da  $L^p(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$  con le proprietà **A)**, **B)** e **C)**.

Nel caso  $p = q = 2$  la disuguaglianza di Hölder diventa la disuguaglianza Schwarz

$$\left| \int_{\Omega} f(x)g(x)\mu(dx) \right| \leq \int_{\Omega} |f(x)| |g(x)| \mu(dx) \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

La disuguaglianza assicura che per ogni coppia di funzioni (classi, in effetti)  $\in L^2(\Omega)$  esiste il prodotto scalare

$$(f, g) \equiv \int_{\Omega} \bar{f}(x)g(x)\mu(dx) \tag{3.3}$$

e in termini di tale prodotto la norma risulta

$$\|f\|_2^2 = (f, f)$$

Il prodotto scalare (3.3) ha le proprietà:

- $(f, g + h) = (f, g) + (f, h)$
- $(f, \lambda g) = \lambda(f, g)$
- $(f, g) = \overline{(g, f)}$
- $(f, f) \geq 0$ , con  $(f, f) = 0 \Leftrightarrow f = 0$

dalle quali, come abbiamo visto nella prima parte del corso, la disuguaglianza di Schwarz potrebbe essere dedotta senza ulteriori ipotesi.

**Teorema 14 (Completezza degli spazi  $L^p(\Omega)$ )**  $1 \leq p \leq \infty$  sia  $f_n(x)$  una successione di Cauchy in  $L^p(\Omega)$ <sup>1</sup>.

Allora esiste un'unica  $f \in L^p(\Omega)$  tale che

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n - f\|_p = 0$$

ed esiste una successione  $\{f_{n_k}\}$ , con  $n_{k+1} > n_k$ , con le proprietà

- $|f_{n_k}(x)| \leq F(x) \quad \forall k$  e  $\mu$ -quasi ogni  $x$ , con  $F(x) \in L^p(\Omega)$  non negativa
- $\lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f(x) \quad$  per  $\mu$  quasi ogni  $x$  (convergenza puntuale  $\mu$ -q.o.).

Per la prova del teorema vedi il capitolo III degli appunti nella forma estesa. Qui basterà sottolineare un corollario del teorema

**Corollario 15** Se  $f^{(j)}$  è una successione di funzioni continue dall'insieme aperto  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{C}$  che converge in  $L^p(\Omega)$  alla funzione continua  $f$  allora esiste una sottosuccessione  $f^{(j_k)}$  che tende a  $f$  puntualmente  $\lim_{k \rightarrow \infty} f^{(j_k)}(x) = f(x) \quad \forall x \in \Omega$

### Esempi di spazi $L^p(\Omega)$

---

<sup>1</sup> $(\forall \epsilon > 0 \exists N(\epsilon) \rightarrow \|f_n - f_m\|_p < \epsilon \text{ per } n, m > N(\epsilon))$

•

$$\begin{aligned} \Omega &= \{1, \dots, N\}, \quad \Sigma = \mathcal{P}(\Omega) \text{ insieme delle parti } \Omega \\ \mu(A) &= \#(A) = \text{numero di punti di } \Omega \text{ in } A \\ f &: \Omega \rightarrow \mathbb{C} = N\text{-pla di numeri complessi } f(1), f(2), \dots, f(N) \\ f(x) &= \sum_{i=1}^N f(i)\chi_i(x), \quad \text{con } \chi_i(x) = 1 \quad x = i \\ &\qquad\qquad\qquad \chi_i(x) = 0 \quad x \neq i \\ \|f\|_p &= \left\{ \sum_{i=1}^N |f(i)|^p \right\}^{1/p} \end{aligned}$$

In particolare  $L^2(\Omega)$  è l'insieme delle  $N$ -ple di complessi  $\{Z_i\}_{i=1}^N \equiv Z$ , con norma

$$\|Z\|_2 = \left( \sum_{i=1}^N |Z_i|^2 \right)^{1/2} = (Z, Z)^{1/2}$$

dove

$$(Z, W) = \sum_{i=1}^N \bar{Z}_i W_i \quad (3.4)$$

$L^2(\Omega) = \mathbb{C}^N$  con la struttura euclidea data dal prodotto scalare (3.4).

- $\Omega = N = \{0, 1, \dots, n, \dots\}$ ,  $\Sigma = \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\mu(A) = \#A$   
 $L^p(\Omega) (\equiv l^p) =$  insieme delle successioni  $\{a_n\}_{n=0}^\infty \equiv a$ ,  $a_n \in \mathbb{C}$ ,  $\forall n$  e

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^p &< \infty \\ \|a\|_p &= \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|^p \right\}^{1/p} \end{aligned}$$

Vale la disuguaglianza di Hölder

$$\|ab\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i| |b_i| \leq \|a\|_p \|b\|_q \quad 1 \leq p, q \leq \infty \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

Per  $p = 2$

$$L^p(\Omega) = l^2 \quad \text{successioni } \{a_n\}_{n=0}^\infty \equiv a$$

$$\sum_{i=0}^\infty |a_n|^2 < \infty \quad \|a\|_2 = \left\{ \sum_{i=0}^\infty |a_n|^2 \right\}^{1/2}$$

$$\|a\|_2 = (a, a)^{1/2} \quad \text{con } (a, b) = \sum_{i=0}^\infty \bar{a}_i b_i$$

- $\Omega$  aperto di  $\mathbb{R}^n$ ,  $\Sigma = \mathcal{B}_\Omega$  insieme degli insiemi di Borel di  $\Omega$ ,  $\mu(dx) \equiv dx$  misura di Lebesgue su  $\Omega$ .

$L^p(\Omega) =$  funzioni  $p$ -integrabili su  $\Omega$

$$\|f\|_p = \left\{ \int_\Omega |f(x)|^p dx \right\}^{1/p}$$

$L^2(\Omega) =$  funzioni a quadrato sommabile su  $\Omega$

$$\|f\|_2 = \left\{ \int_\Omega |f(x)|^2 dx \right\}^{1/2} = (f, f)^{1/2}, \quad \text{con } (f, g) = \int_\Omega \bar{f}(x) g(x) dx$$

**Osservazione 16** *Il teorema di completezza degli spazi  $L^p(\Omega)$ , alla luce degli esempi dati precedentemente, costituisce una prova unificata della completezza degli spazi  $\mathbb{C}^n$  (con norma euclidea) e di  $l^2$  data indipendentemente nel capitolo 2.*

### 3.6 Alcune proprietà di $L^p(\mathbb{R}^n)$

Per le funzioni da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{C}$  utilizzeremo alcune notazioni e definizioni che indichiamo qui di seguito:

- si definirà supporto di una funzione continua  $f$  la chiusura dell'insieme di  $\mathbb{R}^n$  in cui la funzione è diversa da 0  $\text{supp } f = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) \neq 0\}}$ ;

- è facile rendersi conto che la definizione precedente non costituisce una definizione non ambigua di supporto per funzioni definite solamente quasi-ovunque. Definiremo quindi supporto essenziale di una funzione  $g$  di  $L^p(\mathbb{R}^n)$  il complementare del più grande aperto in cui la funzione è nulla quasi ovunque:  $esssupp g = \mathbb{R}^n \setminus \Omega$  con  $\Omega = \bigcup O$ ,  $\{O$  aperti di  $\mathbb{R}^n$  |  $g(x) = 0$  per q.o.  $x \in O$  (verificare che per una funzione continua le due definizioni sono equivalenti);
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  è lo spazio vettoriale delle funzioni a valori complessi, definite su  $\mathbb{R}^n$ , tali da avere derivate parziali continue di tutti gli ordini, e che hanno inoltre supporto compatto (esiste quindi una sfera chiusa al di fuori della quale la funzione è identicamente nulla);
- $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  è lo spazio vettoriale delle funzioni  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  con derivate parziali continue di tutti gli ordini;
- Sia  $\underline{\alpha} = \alpha_1 \dots \alpha_n$  con  $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  un multi-indice di  $n$  numeri interi maggiori o uguali a zero. Definiamo  $|\underline{\alpha}| = \sum_{i=1}^n \alpha_i$ . Con  $D^{\underline{\alpha}}g$  indicheremo una generica derivata parziale di ordine  $|\underline{\alpha}|$  della funzione  $g$ :

$$D^{\underline{\alpha}}g \equiv \frac{\partial^{|\underline{\alpha}|} g}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (3.5)$$

**Definizione** Date due funzioni  $f$  e  $g$  definite in  $\mathbb{R}^n$ , a valori in  $\mathbb{C}$ , misurabili, si definisce loro **convoluzione** la funzione  $f * g$ ,  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ :

$$(f * g)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x-y) dy$$

Per analizzare condizioni sufficienti su  $f$  e  $g$  perché la convoluzione sia ben definita, notiamo:

- la funzione  $|f(x-y)| |g(y)|$  da  $\mathbb{R}^{2n}$  in  $\mathbb{C}$  è misurabile
- se  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$  e  $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$  allora la convoluzione esiste finita per ogni  $x$
- se  $f$  e  $g$  appartengono a  $L^1(\mathbb{R}^n)$  esiste l'integrale

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)| dx \right\} dy = \|f\|_1 \|g\|_1$$

quindi la convoluzione è integrabile, in particolare finita quasi ovunque, e la sua norma  $L^1$  è pari a  $\|f\|_1 \|g\|_1$

- se  $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$   $f * g$  esiste per quasi ogni  $x$  e appartiene a  $L^\infty$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |g(y)| |f(x-y)| dy \leq \|f\|_\infty \|g\|_1$$

Se  $\Omega$  è un insieme borelliano di  $\mathbb{R}^n$  e  $f$  e  $g$  sono due funzioni da  $\Omega$  a  $\mathbb{C}$ , si considerano le loro estensioni  $\tilde{f}$  e  $\tilde{g}$  da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{C}$ :

$$\begin{array}{ll} \tilde{f}(x) = f(x) & x \in \Omega \\ \tilde{f}(x) = 0 & x \notin \Omega \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ll} \tilde{g}(x) = g(x) & x \in \Omega \\ \tilde{g}(x) = 0 & x \notin \Omega \end{array}$$

e si definisce loro convoluzione la funzione da  $\Omega \rightarrow \mathbb{C}$  che associa ad ogni  $x \in \Omega$

$$(f * g)(x) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x-y) \tilde{g}(y) dy$$

**Definizione** Sia  $J_m(x)$ ,  $m = 1, \dots, k, \dots$  una successione di funzioni integrabili in  $\mathbb{R}^n$  con le proprietà:

- $\|J_m\|_1 \leq k \quad \forall m$ , per qualche  $k > 0$
- $\int_{\mathbb{R}^n} J_m(x) dx = 1 \quad \forall m$
- $\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |J_m(x)| g(x) dx = 0$

per ogni funzione  $g$  continua da  $\mathbb{R}^n$  a  $\mathbb{C}$ , limitata e tale che  $g(0) = 0$ .

La successione  $J_m$  si dice essere una **unità approssimata**. (Quando avremo introdotto la teoria delle distribuzioni analizzeremo le relazioni tra unità approssimate e approssimazioni della distribuzione "delta nell'origine").

**Esempi** Data una funzione  $J \in L^1(\mathbb{R}^n)$  con  $\int_{\mathbb{R}^n} J(x) dx = 1$ , la successione  $J_m(x) = m^n J(mx)$  soddisfa le proprietà elencate precedentemente:

- $\int_{\mathbb{R}^n} J_m(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} J(x) dx = 1$
- $\int_{\mathbb{R}^n} |J_m(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^n} |J(x)| dx = \|J\|_1$
- $\int_{\mathbb{R}^n} |J_m(x)| g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} |J(y)| g\left(\frac{y}{m}\right) dy$

poiché  $|J(y)| g\left(\frac{y}{m}\right) \leq (\sup_{\mathbb{R}^n} |g|) |J(y)|$ , per il teorema di dominata convergenza

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^n} |J(y)| g\left(\frac{y}{m}\right) dy = g(0) \int_{\mathbb{R}^n} |J(y)| dy$$

In particolare:

$$\begin{aligned} \text{a) } J^{(1)}(x) &= \frac{1}{\pi^{n/2}} e^{-|x|^2} \\ \text{b) } J^{(2)}(x) &= \frac{e^{-\frac{1}{1-|x|^2}}}{\int_{|x| \leq 1} e^{-\frac{1}{1-|x|^2}} dx} \quad |x| \leq 1 \\ &= 0 \quad |x| > 1 \end{aligned} \quad (3.6)$$

**Teorema 17 (Teorema di Approssimazione)** *Se  $f : L^p(\mathbb{R}^n)$  e  $J_m(x)$  è una unità approssimata, allora  $f_m(x) \equiv (J_m * f)(x)$  ha le proprietà:*

- a)  $\|f_m\|_p \leq k \|f\|_p \quad (f_m \in L^p(\mathbb{R}^n))$
- b)  $\lim_{m \rightarrow \infty} \|f_m - f\|_p = 0 \quad (f_m \rightarrow f \text{ in } L^p(\mathbb{R}^n))$
- c) *se  $J_m(x) = m^n J(mx)$  con  $J \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  (vedi  $J^{(2)}$ ), allora  $f_m \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$  e  $D^\alpha f_m = (D^\alpha J_m) * f$ .*

Il teorema garantisce che le funzioni  $L^p$ , infinitamente differenziabili, siano dense in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  e fornisce un metodo “costruttivo” di regolarizzazione locale, tramite convoluzione, di ogni funzione  $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ .

Un teorema analogo è naturalmente valido per ogni  $L^p(\Omega)$ , con  $\Omega$  borelliano di  $\mathbb{R}^n$ .

Il risultato si estende al seguente:

**Teorema 18 (Densità di  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ )** *Le funzioni infinitamente differenziabili a supporto compatto in  $\mathbb{R}^n$  (che certamente appartengono a  $L^p(\mathbb{R}^n)$  per ogni  $p$ ) sono dense in  $L^p(\mathbb{R}^n)$ .*

Il teorema di densità è, a sua volta, una semplice conseguenza del

**Lemma 19** *Per ogni  $\Omega$  aperto, limitato, di  $\mathbb{R}^n$  esiste una successione di funzioni reali non negative  $g_m \leq 1$ , infinitamente differenziabili, a supporto compatto  $0 \leq g_m(x) \leq 1$ , tali che  $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(x) = 1$  per ogni  $x \in \Omega$ .*

**prova del lemma** Per provare il lemma è sufficiente considerare l'insieme  $\Omega_\epsilon$  dei punti di  $\mathbb{R}^n$  che distano da  $\Omega$  meno di  $\epsilon$ .

Sia  $\chi_{\Omega_\epsilon}$  la funzione caratteristica di  $\Omega_\epsilon$  e consideriamo la funzione  $J_m^{(2)} * \chi_{\Omega_\epsilon}$  con  $J_m^{(2)}$  l'identità approssimata, con funzioni a supporto compatto, definita in (3.6). È facile verificare che per  $m > 1/\epsilon$  la funzione così definita vale 1 in  $\Omega$  e il suo supporto è contenuto nell'insieme  $\Omega_{2\epsilon}$  dei punti di  $\mathbb{R}^n$  che distano da  $\Omega$  meno di  $2\epsilon$ . La funzione è inoltre infinitamente derivabile.

**prova del teorema di densità** Il teorema di approssimazione garantisce che esista una successione di funzioni  $f_m \in L^p(\Omega)$ , infinitamente differenziabili, convergenti a  $f$  in  $L^p(\Omega)$ . Sia  $g_m$  la successione che si ottiene, come nel lemma precedente, approssimando con funzioni  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  le funzioni caratteristiche delle sfere di raggio  $m$ . La successione  $g_m f_m$  è costituita da funzioni infinitamente derivabili, a supporto compatto e tende a  $f$  in  $L^p(\Omega)$  essendo

$$\|g_m f_m - f\|_p \leq \|g_m f_m - f_m\|_p + \|f_m - f\|_p \quad (3.7)$$

e

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{|x| > m} |f_m(x)|^p dx = 0 \quad (3.8)$$

per il teorema di dominata convergenza.

La prova del teorema di approssimazione non verrà data qui di seguito e può essere trovata, per il solo caso  $p = 2$ , nella versione estesa del cap. 3 degli appunti. La dimostrazione non è immediata e utilizza le proprietà di regolarità interna ed esterna della misura di Lebesgue che abbiamo solo enunciato senza darne dimostrazione.

Riferendoci alle definizioni date a inizio corso possiamo sintetizzare le proprietà degli spazi  $L^p(\mathbb{R}^n)$  come segue:

- $L^p(\mathbb{R}^n)$  è uno spazio di Banach per ogni  $1 \leq p \leq \infty$  e per ogni  $n$  naturale
- $L^2(\mathbb{R}^n)$  è uno spazio di Hilbert per ogni  $n$  naturale
- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  è un sottoinsieme denso in  $L^2(\mathbb{R}^n)$

Con pochi passaggi ulteriori si può provare il

**Teorema 20**  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (o  $L^2(\Omega)$  per  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ) è separabile.

Non dimostreremo il teorema, ma è facile rendersi conto che le funzioni a valori razionali (cioè con parte reale e parte immaginaria razionale), costanti in cubi di lato razionale, che ricoprono  $\mathbb{R}^n$ , possono approssimare in norma  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ogni funzione infinitamente differenziabile a supporto compatto, e quindi ogni funzione di  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

In particolare, come abbiamo dimostrato,  $L^2(\mathbb{R}^n)$  (o  $L^2(\Omega)$  per  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ) ha certamente una base ortonormale numerabile ed è omeomorfo a  $l^2$ .

### 3.7 Gli spazi $L^2(I)$ , $I \subset \mathbb{R}$ intervallo di $\mathbb{R}$

Consideriamo inizialmente il caso  $I = (-1, 1)$  e dimostriamo che i polinomi costituiscono un insieme denso in  $L^2(I)$ .

**Teorema 21** Per ogni  $f \in L^2(I)$  ed ogni  $\varepsilon > 0$ , esiste un polinomio  $P(x)$  tale che

$$\|f - P\|_{L^2(I)} < \varepsilon$$

**Dimostrazione** Utilizziamo il teorema di approssimazione con  $J_m(x) = \frac{(1-x^2)^m}{\int_{-1}^1 (1-y^2)^m dy}$

e dimostriamo innanzitutto che le  $J_m$  abbiano le caratteristiche delle unità approssimate.

Essendo  $J_m(x) \geq 0$  si ha evidentemente

$$\int_{-1}^1 J_m(x) dx = \|J_m\|_1 = 1 \quad \forall m$$

Il calcolo esplicito dell'integrale al denominatore dà

$$\int_{-1}^1 (1-y^2)^m dy = 2 \frac{2m(2m-2) \cdots 2}{(2m+1)(2m-1) \cdots 1}$$

Per provarlo basterà verificare il risultato per  $m = 1$ , caso in cui l'integrale vale  $4/3$ , e l'uguaglianza

$$\int_{-1}^1 (1 - y^2)^{m+1} dy = \frac{2m + 2}{(2m + 3)} \int_{-1}^1 (1 - y^2)^m dy$$

che si ottiene integrando per parti nell'integrale al primo membro.

Usando la formula di Stirling ( $n! \sim \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ ), verificare che l'andamento per grandi  $m$  dell'integrale è

$$\int_{-1}^1 (1 - y^2)^m dy \sim \frac{1}{\sqrt{m}}$$

È ora facile provare la terza proprietà richiesta ad una unità approssimante. Per ogni funzione continua  $f$  in  $[-1, 1]$  si ha

$$\frac{\int_{-1}^1 f(x) (1 - x^2)^m dx}{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^m dx} = f(0) + \frac{\int_{-1}^1 (f(x) - f(0))(1 - x^2)^m dx}{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^m dx}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : |f(x) - f(0)| < \varepsilon \quad \text{se } |x| < \delta$$

dunque

$$\begin{aligned} &= f(0) + \frac{\int_{|x| < \delta} (f(x) - f(0))(1 - x^2)^m dx}{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^m dx} + \frac{\int_{|x| > \delta} (f(x) - f(0))(1 - x^2)^m dx}{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^m dx} \\ &= f(0) + \Delta \end{aligned}$$

$$\text{con } |\Delta| \leq \varepsilon + 2 \sup_{-1 \leq x \leq 1} |f(x) - f(0)| (1 - \delta^2)^m \sqrt{m}$$

Quindi:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\int_{-1}^1 f(x)(1 - x^2)^m dx}{\int_{-1}^1 (1 - x^2)^m dx} = f(0)$$

Per il teorema di approssimazione

$$\|J_m * f - f\|_2 \xrightarrow{m \rightarrow \infty} 0$$

con

$$(J_m * f)(x) = \frac{\int_{-1}^1 f(y) (1 - (x - y)^2)^m dy}{\int_{-1}^1 (1 - y^2)^m dy}$$

che è evidentemente un polinomio di grado  $2m$  in  $x$ .  $\forall \varepsilon > 0$  esiste dunque un polinomio  $P_m(\varepsilon)$  di grado  $2m(\varepsilon)$  tale che:

$$\|P_{m(\varepsilon)} - f\|_2 < \varepsilon$$

### 3.7.1 I Polinomi di Legendre

Poiché ogni polinomio è approssimabile in  $L^2(I)$  con un polinomio a coefficienti razionali, è possibile costruire una base ortonormale completa a partire da quest'ultimo insieme di polinomi.

Definiamo i polinomi  $R_j(x) = \frac{d^j}{dx^j} (x^2 - 1)^j$  di ordine  $j$ . Si verifichi, per integrazione per parti, che per ogni  $m, n$  con  $m \neq n$

$$\int_{-1}^1 R_m(x) R_n(x) dx = 0$$

e che

$$\int_{-1}^1 R_n^2(x) dx = (2n)! \int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 R_m(x) R_n(x) dx &= \delta_{mn} (2n)! \frac{2n(2n-2) \cdots 2}{(2n+1)(2n-1) \cdots 1} \\ &= \delta_{mn} \frac{(n!)^2 2^{2n+1}}{2n+1} \end{aligned}$$

Il sistema  $w_n(x) = \frac{1}{n! 2^n} \sqrt{\frac{2n+1}{2}} R_n(x)$  è quindi un sistema ortonormale di polinomi di qualunque grado. Poiché le combinazioni lineari delle  $w_n(x)$  contengono tutti i polinomi, il sistema ortonormale è completo.

Storicamente sono stati utilizzati i polinomi non normalizzati

$$P_n(x) = w_n(x) \sqrt{\frac{2}{2n+1}} = \frac{1}{n! 2^n} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

detti **polinomi di Legendre**.

**Esercizio 3** Verificare (Teorema di approssimazione di Weierstrass) che se  $f(x)$  è una funzione continua in  $(-1, 1)$ , limitata in  $[-1, 1]$  (quindi appartiene a  $L^2(-1, 1)$ ), allora  $J_m * f$  tende a  $f$  uniformemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists M \quad : \quad \sup_{|x| \leq 1} |(J_m * f)(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall m > M$$

### 3.7.2 La base trigonometrica

Mostriamo ora che il sistema ortonormale  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin n\pi x, \cos n\pi x \right\}$  (provarne l'ortonormalità) o equivalentemente il sistema  $w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{in\pi x}$ , con  $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , è completo in  $L^2(-1, 1)$ . A tale scopo dobbiamo mostrare che le somme parziali  $S_N$

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^N c_n \frac{e^{in\pi x}}{\sqrt{2}}$$

della serie trigonometrica di Fourier  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{e^{in\pi x}}{\sqrt{2}}$  tendono, per  $N \rightarrow \infty$ , in  $L^2(-1, 1)$  alla funzione  $f$  i cui coefficienti di Fourier sono i  $c_n$ :

$$c_n = (w_n, f) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-1}^1 e^{-in\pi y} f(y) dy$$

Infatti:

$$\begin{aligned} S_N(x) &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sum_{n=-N}^N e^{in\pi(x-y)} f(y) dy \\ &= (D_N * f)(x) \quad -1 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

con

$$D_N(x) = \frac{1}{2} \frac{\sin[(N + 1/2)\pi x]}{\sin \frac{\pi x}{2}}$$

come si deduce da

$$\begin{aligned} \sum_{n=-N}^N e^{in\alpha} &= \sum_{n=0}^N e^{in\alpha} + \sum_{n=1}^N e^{-in\alpha} = \frac{1 - e^{i(N+1)\alpha}}{1 - e^{i\alpha}} + \frac{e^{-i\alpha} - e^{-i(N+1)\alpha}}{1 - e^{-i\alpha}} = \\ &= \frac{e^{-i\frac{\alpha}{2}}(1 - e^{i(N+1)\alpha})}{e^{-i\frac{\alpha}{2}} - e^{i\frac{\alpha}{2}}} + \frac{e^{i\frac{\alpha}{2}}(e^{-i\alpha} - e^{-i(N+1)\alpha})}{e^{i\frac{\alpha}{2}} - e^{-i\frac{\alpha}{2}}} = \frac{\sin(N + 1/2)\alpha}{\sin \frac{\alpha}{2}} \end{aligned}$$

Mostriamo che la successione  $D_N$  (**nucleo di Dirichlet**) **non** ha tutte le caratteristiche richieste ad una unità approssimata.

Se è vero, infatti, che

$$\int_{-1}^1 D_N(x) dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \sum_{n=-N}^N e^{in\pi x} dx = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dx = 1 \quad \forall N$$

e che

$$\lim_{N \rightarrow \infty} D_N(0) = \frac{1}{2} \lim_{N \rightarrow \infty} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin[(N + \frac{1}{2})\pi x]}{\sin \frac{\pi x}{2}} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(N + \frac{1}{2}\right) = \infty$$

vedremo che la condizione  $\|D_N\|_1 < c$ , con  $c$  indipendente da  $N$ , non è soddisfatta.

Consideriamo infatti due zeri consecutivi del  $\sin\left[\left(N + \frac{1}{2}\right)\pi x\right]$ ,

$$x_n = \frac{n}{N + \frac{1}{2}} \quad \text{e} \quad x_{n+1} = \frac{n+1}{N + \frac{1}{2}} \quad \text{con } n \neq 0$$

Il modulo della funzione  $\sin \frac{\pi x}{2}$ , al denominatore di  $D_N$ , raggiunge il suo massimo, tra due zeri, per  $n$  positivo, nell'estremo superiore  $x_{n+1}$ , dove vale  $\sin\left[\frac{\pi}{2}\left(\frac{n+1}{N + \frac{1}{2}}\right)\right]$ .

Si ha quindi

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{|\sin[(N + \frac{1}{2})\pi x]|}{|\sin \frac{\pi x}{2}|} dx &\geq \sum_{n=1}^N \frac{1}{\left| \sin \left[ \frac{\pi}{2} \left( \frac{n+1}{N+\frac{1}{2}} \right) \right] \right|} \int_{\frac{n}{N+\frac{1}{2}}}^{\frac{n+1}{N+\frac{1}{2}}} |\sin \left[ \left( N + \frac{1}{2} \right) \pi x \right]| dx \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{\frac{1}{(N+\frac{1}{2})}}{\left| \sin \left[ \left( \frac{n+1}{N+\frac{1}{2}} \right) \frac{\pi}{2} \right] \right|} \int_n^{n+1} |\sin \pi y| dy, \\
&= \sum_{n=0}^N \frac{1}{n+1} \left[ \frac{\frac{n+1}{N+\frac{1}{2}} \frac{\pi}{2}}{\left| \sin \left[ \left( \frac{n+1}{N+\frac{1}{2}} \right) \frac{\pi}{2} \right] \right|} \frac{2}{\pi} \int_{+n}^{n+1} |\sin \pi y| dy \right]
\end{aligned}$$

che diverge per  $N \rightarrow \infty$ , essendo l'espressione in parentesi quadra strettamente positiva per ogni  $n$ .

**Osservazione 22** *Si noti che richieste più restrittive sulla funzione  $f$  garantiscono comunque la convergenza delle  $S_N(x) = (D_N * f)(x)$  alla  $f$  stessa. Infatti:*

$$\left| \int_{-1}^1 D_N(x-y) f(y) dy - f(x) \right| = \left| \int_{-1}^1 D_N(z) f(x-z) dz - f(x) \right|$$

in cui si definisce  $f(x-z) = f(x-z \pm 1)$  se  $x-z \notin [-1, 1]$

$$= \frac{1}{2} \left| \int_{-1}^1 \sin \left( N + \frac{1}{2} \right) \pi z \left( \frac{f(x-z) - f(x)}{\sin \frac{\pi z}{2}} \right) dz \right| \quad (3.9)$$

dove si è tenuto conto che  $\int_{-1}^1 D_N(x) dx = 1$ .

Ogni condizione sulla  $f$  che garantisca la convergenza a 0 per  $N \uparrow \infty$  della (3.9), garantisce anche la convergenza puntuale di  $S_N(x)$  a  $f(x)$ . Torneremo su questo punto in seguito, dopo che avremo provato il lemma di Riemann – Lebesgue, che fornisce una condizione sufficiente per la convergenza a 0 di (3.9) quando  $N$  tende all'infinito.

Per analizzare la convergenza in  $L^2(-1, 1)$  delle  $S_N(x)$  dimostriamo che una differente “risommazione” della serie converge in  $L^2(-1, 1)$  allo stesso limite delle  $S_N$ .

Definiamo somma di Fejer della funzione  $f$  il limite, se esiste, della successione di funzioni

$$\sigma_N(x) = \frac{\left( \sum_{i=0}^N S_i(x) \right)}{N+1} \quad \left( S_0 = \frac{c_0}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(y) dy \right)$$

Calcoliamo i coefficienti di Fourier della  $\sigma_N$  nel sistema ortonormale  $w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{in\pi x}$ :

$$\begin{aligned} (w_n, \sigma_N) &= \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^N (w_n, S_i) = \\ &= \begin{cases} 0 & \text{se } |n| > N \\ \sum_{i=|n|}^N \frac{c_n}{N+1} = c_n \frac{N+1-|n|}{N+1} \end{cases} \end{aligned}$$

dove i  $c_n$  sono i coefficienti di Fourier della funzione  $f$ .

Poiché  $\sigma_N$  e  $S_N$  sono entrambi combinazioni lineari dei  $w_n$ , si ha

$$\|\sigma_N - S_N\|_2^2 = \sum_{|n|=0}^N |c_n|^2 \left( 1 - \frac{(N+1-|n|)}{N+1} \right)^2$$

che tende a 0 quando  $N$  tende all'infinito (provarlo usando il teorema di dominata convergenza).

Quindi  $\sigma_N(x)$  ha norma limitata, uniformemente in  $N$ , da  $\|f\|_2$  ( $\|\sigma_N(x)\| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \leq \|f\|_2^2$  per la disuguaglianza di Bessel) e converge allo stesso limite di  $S_N(x)$ .

Mostriamo che  $\sigma_N(x) = (F_{N+1} * f)(x)$ , con

$$F_N(x) = \frac{1}{2N} \frac{\sin^2(N \frac{\pi x}{2})}{\sin^2(\frac{\pi x}{2})} \quad (3.10)$$

detto **nucleo di Fejer**.

Infatti:

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} D_j(x) \\ &= \frac{1}{2N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\sin[(2j+1)\frac{\pi x}{2}]}{\sin \frac{\pi x}{2}} \end{aligned}$$

che prova la (3.10), essendo:

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} \sin(2j+1)\alpha &= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{e^{i(2j+1)\alpha} - e^{-i(2j+1)\alpha}}{2i} \\ &\quad (\text{sommando le due geometriche}) \\ &= \frac{1}{2i} \left[ \frac{1 - e^{i2N\alpha}}{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}} - \frac{1 - e^{-i2N\alpha}}{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}} \right] \\ &= \frac{1}{2i} \frac{-e^{i2N\alpha} + e^{-i2N\alpha} + 2}{e^{-i\alpha} - e^{i\alpha}} = \frac{\sin^2 N\alpha}{\sin \alpha} \end{aligned}$$

Le  $F_N(x)$  hanno tutte le proprietà richieste nel teorema di approssimazione:

$$\int_{-1}^1 F_N(x) dx = \int_{-1}^1 |F_N(x)| dx = 1 \quad \forall N$$

essendo  $F_N(x) \geq 0$  e  $\int_{-1}^1 F_N(x) dx = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \int_{-1}^1 S_i(x) dx = 1$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 F_N(x) f(x) dx &= \int_{-1}^1 F_N(x) (f(x) - f(0)) dx + f(0) \\ &\xrightarrow{N \rightarrow \infty} f(0) \quad \forall f \text{ continua in } (-1, 1) \text{ limitata in } [-1, 1] \end{aligned}$$

Quest'ultimo risultato è conseguenza delle due disuguaglianze

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta : |f(x) - f(0)| < \delta$$

e

$$\frac{\sin^2(N\frac{\pi x}{2})}{\sin^2 \frac{\pi x}{2}} < \frac{1}{\sin^2 \frac{\pi \delta}{2}} \quad |x| > \delta$$

da cui

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 |f(x) - f(0)| F_N(x) dx &= \int_{|x| < \delta} + \int_{1 \geq |x| \geq \delta} \\ &\leq \varepsilon \int |F_N(x)| dx + 4 \sup_{|x| \leq 1} |f(x)| \frac{1}{N \sin^2 \frac{\pi \delta}{2}} \\ &\leq C\varepsilon \quad \text{per } N > \frac{1}{\varepsilon \sin^2 \frac{\pi \delta}{2}} \end{aligned}$$

Essendo  $\varepsilon$  arbitrario, la convergenza di  $\int_{-1}^1 F_N(x) f(x) dx$  a  $f(0)$  è provata.

Il teorema di approssimazione ci garantisce quindi che  $(F_N * f) \xrightarrow{L^2[-1,1]} f$ , quindi che le  $\sigma_N$  e quindi le  $S_N$  convergono in  $L^2(-1, 1)$  a  $f$ . La verifica che si ha convergenza di  $S_N$  a  $f$  puntuale o uniforme quando richieste più restrittive siano fatte sulla  $f$  verrà fatta in seguito.

### $L^2(0, 1)$

Ad ogni funzione  $f \in L^2(0, 1)$  è possibile associare le due funzioni  $f_p$  e  $f_d$  in  $L^2(-1, 1)$  così definite:

$$f_p(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{\sqrt{2}} & 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{f(-x)}{\sqrt{2}} & -1 \leq x < 0 \end{cases} \quad f_d(x) = \begin{cases} \frac{f(x)}{\sqrt{2}} & 0 \leq x \leq 1 \\ -\frac{f(-x)}{\sqrt{2}} & -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

(trattandosi di funzioni in  $L^2$  le definizioni precedenti vanno lette come q.o. in  $[0, 1]$ ).

Si ha:

$$\|f_p\|_{L^2[-1,1]} = \|f_d\|_{L^2[-1,1]} = \|f\|_{L^2(0,1)}$$

Le applicazioni  $U_p : f_p = U_p f$  e  $U_d : f_d = U_d f$  sono quindi applicazioni unitarie (isometriche e biunivoche) tra  $L^2[0, 1]$  e, rispettivamente, gli spazi  $L^2_p[-1, 1]$  e  $L^2_d[-1, 1]$  delle funzioni pari e dispari, a quadrato sommabile in  $[-1, 1]$ .

Da quanto detto precedentemente, si deduce dunque che i sistemi ortonormali  $\{1, \sqrt{2} \cos n\pi x\}$  e  $\{\sqrt{2} \sin n\pi x\}$  sono due possibili basi ortonormali per  $L^2(0, 1)$ .

Analogamente, la trasformazione

$$U : (Uf)(y) = \sqrt{b-a} f((b-a)y + a)$$

e la sua inversa

$$U^{-1} : (U^{-1}g)(x) = \frac{1}{\sqrt{b-a}} g\left(\frac{x-a}{b-a}\right)$$

applicano in maniera unitaria  $L^2[a, b]$  in  $L^2(0, 1)$  e viceversa. I risultati ottenuti in  $L^2[-1, 1]$  possono quindi essere tradotti in  $L^2[a, b]$  per ogni intervallo  $[a, b]$  di  $\mathbb{R}$ .

Alternativamente, per  $I = [-L, L]$  possiamo costruire l'applicazione unitaria  $U_L$  che trasforma  $L^2(-1, 1)$  in  $L^2(-L, L)$ :

$$\forall f \in L^2(-1, 1) \quad (U_L f)(x) = \frac{1}{\sqrt{L}} f\left(\frac{x}{L}\right) \in L^2(-L, L) \quad \text{con } x \in [-L, L]$$

con inversa:

$$\forall g \in L^2[-L, L] \quad (U_L^{-1}g)(y) = \sqrt{L} g(Ly) \in L^2[-1, 1] \quad \text{con } y \in [-1, 1]$$

(verificare l'unitarietà).

**Esercizio 4** Verificare che la trasformazione che a  $f \in L^2(c, d)$  associa la funzione  $g \in L^2(a, b)$

$$g(x) = \sqrt{\frac{d-c}{b-a}} f\left(\frac{d-c}{b-a}x + \frac{cb-da}{b-a}\right)$$

è una trasformazione unitaria da  $L^2(c, d)$  a  $L^2(a, b)$  per qualunque coppia di intervalli  $(a, b)$  e  $(c, d) \in \mathbb{R}$ .

Considerare il caso  $(c, d) = (-1, 1)$  e  $(a, b) = (0, 1)$  e trovare la base che si ottiene applicando la trasformazione appena definita alla base trigonometrica in  $L^2(-1, 1)$ . Verificare che essa non corrisponde né alla base dei seni né a quella dei coseni trovate precedentemente.

**Esercizio 5** Considerare in  $L^2(0,1)$  gli operatori  $D_D$ ,  $D_N$ ,  $D_P$  che operano sui vettori di base rispettivamente dei seni, dei coseni e dei  $\{w_n\}$   $n = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$  trovati alla fine dell'esercizio precedente nella maniera seguente

$$\begin{aligned} D_D \sin(n\pi x) &\equiv n^2 \pi^2 \sin(n\pi x) - \frac{d^2}{dx^2} \text{ con condizioni al bordo di Dirichlet} \\ D_N \cos(n\pi x) &\equiv n^2 \pi^2 \cos(n\pi x) - \frac{d^2}{dx^2} \text{ con condizioni al bordo di Neumann} \\ D_P w_n &\equiv 4n^2 \pi^2 w_n - \frac{d^2}{dx^2} \text{ con condizioni al bordo periodiche} \end{aligned}$$

Utilizzando la proposizione 15 del capitolo II, provare che sono autoaggiunti e caratterizzarne il dominio di autoaggiuntezza.

### 3.7.3 Applicazione del Teorema di Plancherel alla disuguaglianza isoperimetrica [2]

Nel piano  $xy$  consideriamo una curva chiusa descritta dalle equazioni parametriche  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  con  $-1 \leq \tau \leq 1$ . Assumiamo che le funzioni  $x(\tau)$ ,  $y(\tau)$  siano derivabili con derivate in  $L^2(-1,1)$ . Indichiamo con  $P$  la lunghezza del perimetro della curva e con  $A$  l'area racchiusa dalla curva nel piano. Proviamo che:

$$P^2 \geq 4\pi A$$

dove l'eguaglianza vale solo nel caso in cui la curva sia un cerchio.

Introduciamo l'ascissa curvilinea

$$s(\tau) = \int_{-\pi}^{\tau} \sqrt{\dot{x}(v)^2 + \dot{y}(v)^2} dv$$

che misura la lunghezza della curva fino a  $\tau$  ( in particolare  $s(-\pi) = 0$ ,  $s(\pi) = P$ ).

Si avrà

$$P = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2} d\tau = \int_0^P ds \quad A = \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau) \dot{y}(\tau) d\tau$$

(Vi sono vari modi per convincersi che l'area racchiusa dalla curva è data dalla formula scritta sopra. Il teorema di Stokes applicato alla forma differenziale  $xdy = x(\tau)\dot{y}(\tau)d\tau$ , che ha componente normale del rotore uguale a 1, costituisce il modo probabilmente più formale per provarla)

La riparametrizzazione  $x(s) \equiv x(\tau(s)), y(s) \equiv y(\tau(s))$  è caratterizzata da funzioni per le quali  $\sqrt{\dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2} = \dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 = 1, \forall 0 \leq s \leq P$ .

Riscalando l'ascissa curvilinea definendo le nuove coordinate

$$x(t) \equiv x(s = P(t + 1)/2), y(t) \equiv y(s = P(t + 1)/2)$$

otteniamo una nuova parametrizzazione in  $[-1, 1]$  con funzioni  $x(t), y(t)$  tali che  $\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 = \frac{P^2}{4} \quad \forall t \in [-1, 1]$ .

In  $L^2(-1, 1)$  scegliamo la base trigonometrica  $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos n\pi t, \sin n\pi t \right\}$ . Nelle ipotesi fatte, saranno valide le seguenti uguaglianze in  $L^2(-1, 1)$

$$x(t) = \frac{a_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\pi t + b_n \sin n\pi t)$$

$$y(t) = \frac{c_0}{\sqrt{2}} + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos n\pi t + d_n \sin n\pi t)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi(-a_n \sin n\pi t + b_n \cos n\pi t)$$

$$\dot{y}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi(-c_n \sin n\pi t + d_n \cos n\pi t)$$

Scrivendo la norma quadra di una funzione di  $L^2(-1, 1)$  come somma dei moduli quadri dei suoi coefficienti di Fourier

$$\begin{aligned} \frac{P^2}{2} &= \int_{-1}^1 (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2) dt = \pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 (a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2) \\ A &= \int_{-1}^1 x(t)\dot{y}(t) dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{-1}^1 (x(t) + \dot{y}(t))^2 - (x(t) - \dot{y}(t))^2 dt \\ &= \pi \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n d_n - b_n c_n) \end{aligned}$$

Pochi passaggi algebrici provano l'eguaglianza

$$\frac{P^2}{2\pi} - 2A = \pi \sum_{n=1}^{\infty} [n(a_n - d_n)^2 + n(b_n + c_n)^2] + n(n-1)(a_n^2 + b_n^2 + c_n^2 + d_n^2)$$

Il termine al primo membro è quindi sempre positivo o nullo. L'uguaglianza a zero si ha solamente nel caso in cui solo  $a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 + d_1^2 \neq 0$  con  $a_1 - d_1 = 0$  e  $b_1 + c_1 = 0$ . Quindi vale l'uguaglianza solo per curve di equazione

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{a_0}{\sqrt{2}} + (a_1 \cos t - c_1 \sin t) \\ y(t) &= \frac{c_0}{\sqrt{2}} + (c_1 \cos t + a_1 \sin t) \end{aligned}$$

che rappresentano circonferenze.

Vogliamo ora indagare, prima a livello intuitivo, cosa diventi la serie di Fourier rispetto alla base trigonometrica in  $L^2(-L, L)$  quando  $L$  tende all'infinito. Come abbiamo visto l'insieme ortonormale

$$w_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{in\pi x/L}, \quad n = 0, \pm 1, \dots$$

è una base ortonormale in  $L^2(-L, L)$  e ogni funzione  $f$  di  $L^2(-L, L)$  può essere scritta in tale base come

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{c_n}{\sqrt{2L}} e^{in\pi x/L}$$

con

$$c_n = (w_n, f) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^L e^{-in\pi x/L} f(x) dx$$

Per  $f(x)$  integrabile in  $\mathbb{R}$  si ha:

$$\left| c_n \sqrt{\frac{L}{\pi}} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left| \int_{-L}^L e^{-in\pi x/L} f(x) dx \right| < \infty$$

e  $c_n \sqrt{\frac{L}{\pi}}$  può quindi essere interpretato come il valore in  $k = \frac{n\pi}{L}$  di una funzione  $c(k)$  che, nel limite  $L \rightarrow \infty$ , dovrebbe risultare:

$$c(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx$$

Nello stesso limite la serie di Fourier relativa a  $f(x)$  assume la forma della somma di Riemann

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\sqrt{\frac{L}{\pi}} c_n}_{c(k=\frac{n\pi}{L})} e^{i(\frac{n\pi}{L})x} \underbrace{\left(\frac{\pi}{L}\right)}_{\Delta}$$

che suggerisce che i “coefficienti” di Fourier diano la seguente rappresentazione della  $f$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} c(k) e^{ikx} dk$$

### 3.8 Trasformata di Fourier

Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . Sulla base delle considerazioni formali fatte precedentemente, definiamo sua trasformata di Fourier  $\hat{f}(k)$  la funzione

$$\hat{f}(k) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} f(x) dx$$

$k \in \mathbb{R}^n$ ,  $k \cdot x = \sum_{i=1}^n k_i x_i$ . L'integrale è convergente per ogni  $k \in \mathbb{R}^n$ , data l'ipotesi  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ . La trasformata di Fourier è evidentemente un'operazione lineare in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

È facile inoltre dimostrare le seguenti proprietà:

- la funzione  $\hat{f}(k)$  è continua in  $k$
- $\hat{f}(k) \in L^\infty$  e  $\|\hat{f}\|_\infty \leq (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1$ . In particolare se una successione di funzioni  $f_m \in L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\forall m$  converge in  $L^1$  alla funzione  $f$  allora le trasformate di Fourier  $\hat{f}_m$  tendono a  $\hat{f}$  in  $L^\infty$ .
- se  $f \geq 0$  allora  $\|\hat{f}\|_\infty = (2\pi)^{-n/2} \int f(x) dx = (2\pi)^{-n/2} \|f\|_1$ .

Vale il

**Lemma 23 (Lemma di Riemann - Lebesgue)** *Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  allora*  
 $\lim_{|k| \rightarrow \infty} \hat{f}(k) = 0$ .

**Dimostrazione** La proprietà è vera, per calcolo diretto, per la funzione caratteristica di un qualunque parallelepipedo  $P_{\underline{a}, \underline{b}} = \{x \mid a_i \leq x_i \leq b_i\}$ :

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-n/2} \int_{P_{\underline{a}, \underline{b}}} e^{-ik \cdot x} dx &= (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^n \int_{a_i}^{b_i} e^{-ik_i x_i} dx_i = \\ &= (-1)^n (2\pi)^{-n/2} \prod_{i=1}^n \frac{e^{-ik_i b_i} - e^{-ik_i a_i}}{ik_i} \xrightarrow{|k| \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

È quindi vera per ogni combinazione lineare finita di funzioni costanti su parallelepipedi.

I seguenti passi permettono di provare il lemma

- Ogni funzione a supporto compatto in  $\mathbb{R}^n$  è limite uniforme (e quindi in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  essendo la funzione a supporto compatto) di funzioni  $\phi^{(m)}$  che sono combinazioni lineari di funzioni costanti su parallelepipedi.
- Per la proprietà b) della trasformata di Fourier, indicata precedentemente le trasformate di Fourier  $\hat{\phi}^{(m)}$  delle  $\phi^{(m)}$  convergono in  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$  alla trasformata di Fourier  $\hat{\phi}$  della funzione  $\phi$ . La trasformata di Fourier di una funzione  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  tende quindi a zero per grandi valori di  $|k|$ , come fanno le funzioni a scala che la approssimano.
- Poiché  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  è denso in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ , tale proprietà risulta vera per ogni funzione in  $L^1(\mathbb{R}^n)$ .

La prova verrà dettagliata, in maniera alternativa, a fine capitolo quando analizzeremo le proprietà delle trasformate di Fourier delle funzioni infinitamente differenziabili a decrescenza rapida.

Altre conseguenze della definizione sono

- d) per le funzioni traslate  $f_h(x) = f(x - h)$  e riscalate  $s_\lambda f(x) = f(x/\lambda)$ ,  $h \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \in \mathbb{C}$  valgono le uguaglianze:

$$\widehat{f_h}(k) = e^{-ik \cdot h} \hat{f}(k) \quad ; \quad \widehat{s_\lambda f}(k) = \lambda^n \hat{f}(\lambda k)$$

- f) Se  $f$  e  $g$  sono due funzioni in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  (come abbiamo osservato in precedenza la loro convoluzione esiste e appartiene a  $L^1(\mathbb{R}^n)$ ) vale

l'uguaglianza

$$\begin{aligned} \widehat{(f * g)}(k) &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} \left( \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right) dx \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot y} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot (x-y)} f(x-y) dx dy \\ &= (2\pi)^{n/2} \hat{f}(k) \hat{g}(k) \end{aligned}$$

- g) Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  è tale che  $x_j f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  per qualche  $j \in \{1, \dots, n\}$  allora la trasformata di Fourier di  $f$  è differenziabile rispetto a  $k_j$ , con derivata parziale continua, e vale la relazione

$$\frac{\partial}{\partial k_j} \hat{f}(k) = (-ix_j \widehat{f})(k) \quad \forall k \in \mathbb{R}^n \quad (3.11)$$

Infatti, dalla definizione di trasformata di Fourier

$$\frac{\hat{f}(k + he_j) - \hat{f}(k)}{h} = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-i(k+he_j) \cdot x} - e^{-ik \cdot x}}{h} f(x) dx$$

dove con  $e_j$  abbiamo indicato il versore della direzione  $j$  e  $h \in \mathbb{R}$ . Poiché vale la stima

$$\left| \frac{e^{-i(k+he_j) \cdot x} - e^{-ik \cdot x}}{h} \right| \leq |x_j|$$

il teorema di dominata convergenza assicura che il limite del membro di destra dell'uguaglianza sia uguale all'integrale del limite che è quanto affermato nella (3.11).

- h) Se  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  è tale che  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^1(\mathbb{R}^n)$  per qualche  $j \in \{1, \dots, n\}$  allora la trasformata di Fourier di  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  soddisfa la relazione

$$\widehat{\frac{\partial f}{\partial x_j}}(k) = ik_j \hat{f}(k) \quad \forall k \in \mathbb{R}^n \quad (3.12)$$

Si ha infatti

$$ik_j \hat{f}(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} i k_j e^{-ik \cdot x} f(x) dx = -(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-ik \cdot x} \right) f(x) dx$$

La (3.12) si ottiene per integrazione per parti rispetto alla variabile  $x_j$ . È necessario a tale scopo convincersi che ogni funzione  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  con derivata parziale rispetto a  $x_j$  in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  è tale che  $\lim_{|x_j| \rightarrow \infty} f(x) = 0$ .

Questo semplice risultato è lasciato come esercizio.

Nello studio delle proprietà della trasformata di Fourier utilizzeremo costantemente una unità approssimata ottenuta per riscalamento di una gaussiana. Sarà essenziale, in questa prospettiva, conoscere la trasformata di Fourier di una gaussiana di varianza qualunque. Proviamo che:

$$g_\sigma(x) = e^{-|x|^2/(2\sigma)} \implies \hat{g}_\sigma(k) = \sigma^{n/2} e^{-|k|^2\sigma/2} \quad (3.13)$$

Poiché  $g_\sigma(x) = g_1(x/\sqrt{\sigma})$  basterà provare il risultato per  $\sigma = 1$ . Poiché

$$\hat{g}_1(k) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-ik \cdot x} e^{-|x|^2/2} dx = \left[ (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-x^2/2} dx \right]^n$$

basterà calcolare la trasformata di Fourier della gaussiana  $g_1$  di in  $\mathbb{R}$ . Chiudendo il quadrato all'esponente otteniamo

$$\begin{aligned} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} e^{-x^2/2} dx &= e^{-k^2/2} (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+ik)^2/2} dx \\ &= e^{-k^2/2} (2\pi)^{-1/2} \int_{\Gamma} e^{-z^2/2} dz \end{aligned}$$

dove  $\Gamma$  è la retta  $\text{Im } z = k$  del piano complesso. Poiché la funzione  $e^{-z^2/2}$  è una funzione intera, l'ultimo integrale non può dipendere da  $k$  (provarlo) e assumerà sempre il valore 1 che si ottiene ponendo  $k = 0$ . Risulta quindi provato il risultato (3.13) per  $\sigma = 1$ .

Siamo ora in grado di provare il **Teorema di Plancherel**. Concentreremo in un unico teorema anche la formula di inversione della trasformata di Fourier:

**Teorema 24** *La trasformata di Fourier di una funzione  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  appartiene a  $L^2(\mathbb{R}^n)$  e conserva la norma  $L^2(\mathbb{R}^n)$ . L'applicazione che ad  $f$  associa la sua trasformata di Fourier  $\hat{f}$  può essere estesa ad una isometria da  $L^2(\mathbb{R}^n)$  a  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .*

Vale quindi la formula di Parseval: se  $f$  e  $g$  appartengono a  $L^2(\mathbb{R}^n)$

$$(f, g) \equiv \int_{\mathbb{R}^n} \bar{f}(x)g(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \bar{\hat{f}}(k)\hat{g}(k) dk \equiv (\hat{f}, \hat{g})$$

L'isometria è in effetti un'applicazione unitaria da  $L^2(\mathbb{R}^n)$  a  $L^2(\mathbb{R}^n)$  valendo, per ogni funzione  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ , la formula di inversione

$$\widetilde{(\hat{f})}(x) \equiv (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ik \cdot x} \hat{f}(k) dk = \widehat{(\tilde{f})}(-x) = f(x)$$

dove le eguaglianze sono naturalmente intese come appartenenza alla stessa classe di equivalenza in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ .

**Dimostrazione** Lo strumento tecnico usato per la prova consiste nell'utilizzare la proprietà che le unità approssimate hanno trasformate di Fourier che tendono alla funzione costante identicamente pari a 1.

Consideriamo la funzione  $g_m(k) = e^{-|k|^2/(2m)}$  per  $m = 1, 2, \dots$ . La funzione  $g_m$  è limitata, appartiene a  $L^p \forall p$  e  $\lim_{m \rightarrow \infty} g_m(k) = 1 \forall k \in \mathbb{R}^n$ .

Abbiamo già notato che ogni funzione  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  ha una trasformata di Fourier limitata;  $|\hat{f}(k)|^2 g_m(k)$  è quindi una funzione integrabile.

Le proprietà della trasformata di Fourier di una convoluzione e il teorema di Fubini garantiscono che valgono le uguaglianze

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{f}(k)|^2 g_m(k) dk &= (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^{3n}} \bar{f}(x) f(y) e^{-ik \cdot (y-x)} g_m(k) dx dy dk \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^{2n}} \bar{f}(x) f(y) \hat{g}_m(y-x) dx dy \quad (3.14) \end{aligned}$$

È facile verificare che  $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \hat{g}_m(x) = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{n/2} e^{-m|x|^2/2}$  è un'unità approssimata e che quindi  $\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \hat{g}_m * f$  tende in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  a  $f$  per  $m \rightarrow \infty$ .

Passando al limite nel primo (monotona convergenza) e nell'ultimo (dominata convergenza e teorema di Fubini) membro dell'uguaglianza (3.14) si ottiene finalmente che  $\hat{f}$  è in  $L^2$  e che  $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ .

Come abbiamo già dimostrato un operatore isometrico su uno spazio di Hilbert conserva il prodotto scalare. La formula di Parseval è dunque una immediata conseguenza del fatto che l'applicazione  $f \rightarrow \hat{f}$  conserva la norma.

**Osservazione 25** *Deve essere chiaro che noi non abbiamo una definizione di integrale per una funzione complessa che non sia integrabile. Non abbiamo quindi una definizione esplicita della trasformata di Fourier di una funzione che sia a quadrato sommabile, ma non sia sommabile.*

*Poiché però  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  è certamente denso in  $L^2(\mathbb{R}^n)$ , il teorema di Plancherel assicura che l'applicazione  $f \rightarrow \hat{f}$  possa essere estesa a tutto  $L^2(\mathbb{R}^n)$  per continuità.*

*Questo significa che alla trasformata di Fourier di una funzione  $f$  in  $L^2(\mathbb{R}^n)$  ma non in  $L^1(\mathbb{R}^n)$  si dà significato solo come limite di trasformate di Fourier di funzioni in  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ .*

*Verificare che se  $f \notin L^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$  allora  $\chi_{B_R} f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n) \forall R > 0$ . La definizione della trasformata di Fourier della  $f$  può dunque essere data nel modo seguente*

$$\hat{f}(k) = \lim_{R \rightarrow \infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{B_R} e^{-ik \cdot x} f(x) dx$$

Utilizzando la proprietà dell'unità approssimata  $g_m$  è possibile provare la formula di inversione.

La formula di inversione è una conseguenza della formula

$$(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{g}_m(x-y) f(y) dy = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} g_m(k) \hat{f}(k) e^{ik \cdot x} dk$$

Gli integrali ai due membri dell'eguaglianza sono certamente finiti per ogni funzione  $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  e, in questo caso l'uguaglianza è una conseguenza della uguaglianza di Parseval, ma può alternativamente essere verificata sostituendo a  $\hat{g}_m(x-y)$  la sua definizione e scambiando l'ordine di integrazione (verificare che le ipotesi per l'applicazione del teorema di Fubini sono soddisfatte).

Tenendo conto

- che  $(2\pi)^{-n/2} \hat{g}_m$  è una unità approssimata;
- che  $g_m$  tende al valore 1 puntualmente;
- che  $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$  è denso in  $L^2(\mathbb{R}^n)$

concludere la dimostrazione della formula di inversione.

Siamo ora in grado di aggiungere alle proprietà della trasformata di Fourier la seguente, di facile dimostrazione (vedi proprietà  $f$ )

i) Se  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$  allora

$$\widehat{(fg)}(k) = (2\pi)^{-n/2}(\hat{f} * \hat{g})(k)$$

### 3.8.1 Le funzioni degli spazi $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ e $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ e le loro trasformate di Fourier

Diremo che una funzione  $f$  in  $C^\infty(\mathbb{R}^n)$  è a decrescenza rapida se (vedi 3.5 per la notazione)

$$\forall \underline{\alpha} \quad \underline{\beta} \quad \exists K_{\underline{\alpha} \underline{\beta}} > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \quad |x^{\underline{\beta}} D^{\underline{\alpha}} f| \leq K_{\underline{\alpha} \underline{\beta}}$$

dove  $x^{\underline{\beta}} = \prod_{j=1}^n x_j^{\beta_j}$ . Le derivate, di qualunque ordine, della funzione  $f$  decrescono quindi più velocemente di ogni potenza del modulo di  $x$  quando  $|x|$  tende all'infinito.

Consideriamo lo spazio vettoriale  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  (che spesso indicheremo solo con  $\mathcal{S}$ ) delle funzioni infinitamente differenziabili a decrescenza rapida. Le funzioni in  $\mathcal{S}$  sono alternativamente caratterizzate dal fatto che le norme

$$\|f\|_{m,l} = \sup_{|\underline{\alpha}| \leq l} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |D^{\underline{\alpha}} f(x)| (1 + |x|)^m$$

siano finite  $\forall m$  e  $l$  interi  $\geq 0$ .

Senza entrare nei dettagli sulla definizione e sulle proprietà della topologia indotta in  $\mathcal{S}$  dal “sistema” di norme  $\|\cdot\|_{m,l}$ , riportiamo solamente il seguente risultato (di facile dimostrazione).

Definiamo convergenza (rispettivamente convergenza di Cauchy) di una successione di funzioni in  $\mathcal{S}$  la convergenza (rispettivamente la convergenza di Cauchy) rispetto a tutte le norme  $\|\cdot\|_{m,l}$  (nessuna uniformità rispetto alle norme è richiesta) allora

**Proposizione 26**  $\mathcal{S}$  è uno spazio sequenzialmente-completo: ogni successione di Cauchy di funzioni in  $\mathcal{S}$  è convergente e converge a una funzione di  $\mathcal{S}$ .

Possiamo ora dimostrare un risultato che sarà fondamentale nel seguito

**Teorema 27** *La trasformata di Fourier è un'applicazione biunivoca e continua dello spazio  $\mathcal{S}$  su se stesso (con inversa data dalla formula di inversione). Specificamente valgono, per ogni  $f \in \mathcal{S}$  e per ogni multi-indice  $\underline{\alpha}$  le relazioni*

$$(D^{\underline{\alpha}} \hat{f})(k) = (\widehat{(-i x)^{\underline{\alpha}} f})(k) \quad \forall k \in \mathbb{R}^n \quad (3.15)$$

$$(\widehat{D^{\underline{\alpha}} f})(k) = ((i k)^{\underline{\alpha}} \hat{f})(k) \quad \forall k \in \mathbb{R}^n \quad (3.16)$$

**Dimostrazione** Sia  $f$  una funzione in  $\mathcal{S}$  allora

**passo 1)**  $x^{\underline{\beta}} D^{\underline{\alpha}} f$  appartiene a  $\mathcal{S}$  per ogni  $\underline{\beta}$  e  $\underline{\alpha}$ . In effetti, per qualche costante  $K > 0$

$$\|x^{\underline{\beta}} D^{\underline{\alpha}} f\|_{m,l} \leq K \|f\|_{m+|\underline{\beta}|,l+|\underline{\alpha}|}$$

e si ha inoltre (provarlo)

$$\|x^{\underline{\beta}} D^{\underline{\alpha}} f\|_1 \leq K \|f\|_{n+1+|\underline{\beta}|,|\underline{\alpha}|} \quad (3.17)$$

(notare che  $n$  indica la dimensione dello spazio).

**passo 2)** In particolare ogni funzione  $f \in \mathcal{S}$  appartiene a  $L^1(\mathbb{R}^n)$  assieme a tutte le sue derivate. Un'applicazione ripetuta della proprietà g) della trasformata di Fourier prova la (3.15)

$$(D^{\underline{\alpha}} \hat{f})(k) = (\widehat{(-i x)^{\underline{\alpha}} f})(k) \quad \forall k \in \mathbb{R}^n$$

$\hat{f}$  è quindi infinitamente differenziabile.

**passo 3)** Utilizzando la proprietà h) della trasformata di Fourier si ha quindi

$$k^{\underline{\beta}} (D^{\underline{\alpha}} \hat{f})(k) = k^{\underline{\beta}} (\widehat{(-i x)^{\underline{\alpha}} f})(k) = (-i D^{\underline{\beta}}) [\widehat{(-i x)^{\underline{\alpha}} f}](k)$$

che per  $\alpha = 0$  prova la (3.16). Si ha inoltre

$$\sup_k |k^{\underline{\beta}} (D^{\underline{\alpha}} \hat{f})(k)| \leq \|D^{\underline{\beta}} [(x)^{\underline{\alpha}} f]\|_1$$

che, utilizzando la (3.17), prova che tutte le norme della  $\hat{f}$  sono limitate

$$\|\hat{f}\|_{m,l} \leq K \|f\|_{n+1+l,m}$$

La trasformata di Fourier è dunque una applicazione lineare limitata da  $\mathcal{S}$  in  $\mathcal{S}$ . Poiché l'applicazione inversa è anch'essa una trasformata di Fourier ( $\check{f}(k) = \hat{f}(-k)$ ) l'applicazione è in effetti biunivoca.

### Lo spazio delle funzioni test $D(\mathbb{R}^n)$

Ancora una volta senza entrare nei dettagli topologici, definiremo una nozione di convergenza nello spazio  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ . Diremo che una successione  $\phi^{(n)}$  di funzioni in  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  è di Cauchy se

- esiste un compatto  $\mathcal{K}$  che contiene i supporti di tutte le funzioni della successione;
- $\forall \epsilon > 0 \exists N : \forall n, m > N \sup_{x \in \mathcal{K}, |\alpha| \leq j} |D^\alpha \phi^{(n)}(x) - D^\alpha \phi^{(m)}(x)| < \epsilon \forall j = 0, 1, \dots$

Lo spazio vettoriale delle funzioni  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ , con la convergenza sopra definita, verrà indicato in seguito come  $D(\mathbb{R}^n)$  (spesso solamente con  $D$ ). La stessa costruzione può essere fatta considerando le funzioni infinitamente differenziabili a supporto compatto contenuto in una regione aperta  $\Omega$  di  $\mathbb{R}^n$ . In questo caso utilizzeremo la notazione  $D(\Omega)$ . Si dimostra che  $D(\mathbb{R}^n)$  (alternativamente  $D(\Omega)$ ) è sequenzialmente completo.

Poiché ogni funzione infinitamente differenziabile a supporto compatto appartiene a  $\mathcal{S}$  il teorema (27) prova che la trasformata di Fourier è un'applicazione da  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{S}$ . La proposizione che segue prova, nel caso  $n = 1$ , che la trasformata di Fourier di una funzione infinitamente differenziabile a supporto compatto, pur appartenendo sempre ad  $\mathcal{S}$ , non ha mai supporto compatto. Il risultato si generalizza a  $n$  qualunque.

**Proposizione 28** *Se  $f \in D(\mathbb{R})$  allora il supporto di  $\hat{f}$  è l'intero asse reale*

**Dimostrazione** Per definizione

$$\hat{f}(k) = (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-ik \cdot x} f(x) dx = (2\pi)^{-1/2} \int_{\text{supp } f} e^{-ik \cdot x} f(x) dx$$

Poiché il supporto di  $f$  è limitato e  $|e^{-ik \cdot x}| \leq e^{|\text{Im } k| |x|}$  la definizione di  $\hat{f}(k)$  può essere estesa a valori di  $k$  in tutto il piano complesso e fornisce una funzione intera di  $k$  che ha, come valori sull'asse reale, la trasformata di Fourier della funzione  $f$ .

Poiché una funzione intera, non nulla, può avere solo zeri isolati, la  $\hat{f}(k)$  può solo essere nulla in punti isolati di  $\mathbb{R}$  e il suo supporto coincide quindi con l'intero asse reale.

Il teorema (27) e il fatto che  $D(\mathbb{R}^n)$  sia contenuto in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  permette di dare una prova semplice del lemma di Riemann- Lebesgue. È chiaro infatti che  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , contenendo le funzioni infinitamente differenziabili a supporto compatto, è denso in  $L^p(\mathbb{R}^n)$  per ogni  $p$ , in particolare per  $p = 1$ . Per ogni funzione  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  è dunque possibile costruire una successione di funzioni  $f_m \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  che convergono a  $f$  nella norma  $L^1$ . Per la proprietà b) della trasformata di Fourier, la successione delle trasformate  $\hat{f}_m$  tende uniformemente alla funzione  $\hat{f}$  (si noti che le funzioni  $\hat{f}_m$  e la funzione limite  $\hat{f}$  sono continue per cui la convergenza nella norma  $L^\infty$  coincide con la convergenza uniforme). Per ogni  $\epsilon > 0$  è possibile scegliere dunque un  $\bar{m}$  tale che  $\sup |\hat{f}_{\bar{m}} - \hat{f}| < \epsilon$ . Si avrà dunque

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{f}(k)| \leq \sup |\hat{f}_{\bar{m}} - \hat{f}| + \lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{f}_{\bar{m}}| \leq \epsilon$$

dove si è utilizzato il fatto che  $\hat{f}_{\bar{m}}(k)$ , essendo  $\hat{f}_{\bar{m}}$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ha limite nullo quando  $|k|$  tende all'infinito. Poiché la disuguaglianza vale per ogni  $\epsilon > 0$  se ne deduce che

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\hat{f}(k)| = 0$$

Il fatto che la trasformata di Fourier di una funzione a supporto compatto non possa avere supporto compatto può essere interpretato come un'informazione sul rapporto tra “scarto” attorno alla media di una funzione e corrispondente scarto della sua trasformata di Fourier. Il risultato che quantifica questo rapporto è denominato “Principio di Indeterminazione” perché esprime la forma matematica del principio di indeterminazione di Heisenberg della Meccanica Quantistica.

Sia  $f$  una funzione di  $L^2(\mathbb{R})$ , chiameremo suo scarto rispetto all'origine la quantità

$$\Delta_0 f = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx} \quad (3.18)$$

L'interpretazione di  $\Delta_0 f$  come dispersione intorno all'origine discende dal fatto che  $\Delta_0 f$  è il coefficiente che determina la “dispersione” della funzione

$f$  lontano dall'origine, nel senso che

$$\frac{\int_{|x|>K} |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx} \leq \frac{1}{K^2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx} = \frac{\Delta_0 f}{K^2}$$

(giustificare la disuguaglianza).

La relazione quantitativa che lega lo scarto rispetto all'origine di una funzione e quello della sua trasformata di Fourier è data nella seguente

**Proposizione 29 (Principio di Indeterminazione)** *Se  $f \in L^2(\mathbb{R})$  è tale che  $x f$  e  $\frac{df}{dx}$  appartengono a  $L^2(\mathbb{R})$  allora vale la disuguaglianza*

$$\Delta_0 f \Delta_0 \hat{f} \geq \frac{1}{4}$$

*L'eguaglianza si ha se e solo se la funzione  $f$  è una gaussiana centrata nell'origine.*

**Dimostrazione** La prova si ottiene con la successione di uguaglianze e disuguaglianze

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx &= - \int_{-\infty}^{\infty} x \frac{d|f(x)|^2}{dx} dx = -2\operatorname{Re} \int_{-\infty}^{\infty} x \overline{f(x)} \frac{df}{dx} dx \\ &\leq 2 \int_{-\infty}^{\infty} |x| |f(x)| \left| \frac{df}{dx} \right| dx \leq 2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{df}{dx} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &= 2 \left( \int_{-\infty}^{\infty} |x f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \left( \int_{-\infty}^{\infty} |k \hat{f}(k)|^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

Nell'integrazione per parti che dà la prima uguaglianza il lettore è richiesto di giustificare l'assenza di termini all'infinito. Nella prima disuguaglianza è stata utilizzata la disuguaglianza di Schwarz, mentre l'ultima uguaglianza è conseguenza della proprietà g) della trasformata di Fourier.

La tesi del teorema è provata quadrando la disuguaglianza ottenuta e tenendo conto che  $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$ .

Se la funzione  $f$  è una gaussiana, sappiamo che la sua trasformata di Fourier è anch'essa una gaussiana e l'uguaglianza è provata per calcolo diretto. Se vale l'uguaglianza il segno di uguale deve valere nella disuguaglianza di Schwarz utilizzata nella prova. È lasciato come esercizio al lettore di provare che questo implica che la  $f$  debba soddisfare una equazione differenziale che ha per soluzioni solo le gaussiane.

### 3.8.2 La base di Hermite in $L^2(\mathbb{R})$

Utilizzando le proprietà di  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  possiamo caratterizzare una base numerabile di  $L^2(\mathbb{R})$  di grande importanza nelle applicazioni (in particolare in meccanica quantistica e in teoria delle probabilità).

In  $L^2(\mathbb{R})$  definiamo i due operatori lineari  $\mathbf{x}, D_{\mathbf{x}}$  e  $\mathbf{p}, D_{\mathbf{p}}$  con dominio e azione definiti come segue

$$D_{\mathbf{x}} = D_{\mathbf{p}} = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \quad (3.19)$$

$$(\mathbf{x}f)(x) = xf(x) \quad (\mathbf{p}f)(x) = -i \frac{df}{dx} = \overline{(kf)}(x) \quad (3.20)$$

Le proprietà di  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  viste nel paragrafo precedente garantiscono che i due operatori e ogni loro potenza trasformino funzioni di  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  in funzioni di  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  e quindi in funzioni di  $L^2(\mathbb{R})$ . È facile vedere che la (3.20) definisce (sull'insieme  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$  denso in  $L^2(\mathbb{R})$ ) due operatori simmetrici. Infatti, per ogni  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$(f, \mathbf{x}g) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(x) x g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{x f}(x) g(x) dx = (\mathbf{x}f, g)$$

$$(f, \mathbf{p}g) = -i \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f}(x) \frac{dg}{dx}(x) dx = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\overline{df}}{dx}(x) g(x) dx = (\mathbf{p}f, g)$$

Sullo stesso dominio sono quindi ben definiti gli operatori  $a$  e  $a^\dagger$  (e ogni loro potenza)

$$D_a = D_{a^\dagger} = \mathcal{S}(\mathbb{R})$$

$$a = \frac{\mathbf{x} + i\mathbf{p}}{\sqrt{2}} a^\dagger = \frac{\mathbf{x} - i\mathbf{p}}{\sqrt{2}} \quad (3.21)$$

Per calcolo diretto è facile verificare le seguenti uguaglianze, valide quando gli operatori sono applicati a funzioni in  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

$$[a, a^\dagger] \equiv aa^\dagger - a^\dagger a = 1 \quad [\mathbf{x}, \mathbf{p}] \equiv \mathbf{x}\mathbf{p} - \mathbf{p}\mathbf{x} = i \quad (3.22)$$

Si noti inoltre che, a meno di una costante moltiplicativa di modulo unitario, esiste un solo vettore normalizzato  $w^{(0)}$  di  $L^2(\mathbb{R})$  che l'operatore  $a$  trasforma nel vettore nullo. Infatti

$$(aw^{(0)}) = 0 \implies xw^{(0)}(x) - i \frac{dw^{(0)}}{dx}(x) = 0 \implies f(x) = Ce^{-\frac{x^2}{2}}. \quad (3.23)$$

Perché la funzione  $w^{(0)}$  risulti di norma unitaria in  $L^2(\mathbb{R})$ , deve risultare, per qualche  $0 \leq \xi < 2\pi$ ,  $C = e^{i\xi} \pi^{-1/4}$ . Si noti che la funzione  $w^{(0)}$  appartiene a  $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ .

L'osservazione fatta alla fine del capitolo II e il teorema (17) implicano che i vettori

$$w^{(n)} = \frac{(a^\dagger)^n}{\sqrt{n!}} w^{(0)} = \frac{(\mathbf{x} - i\mathbf{p})^n}{2^{n/2} \sqrt{n!}} w^{(0)} = \frac{(x - \frac{d}{dx})^n}{2^{n/2} \sqrt{n!} \pi^{-1/4}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (3.24)$$

formino una base ortonormale in  $L^2(\mathbb{R})$  interamente costituita da funzioni infinitamente differenziabili a decrescenza rapida.

Come abbiamo dimostrato nel capitolo II l'operatore  $N = a^\dagger a$  opera sulla base appena definita come  $Nw^{(n)} = nw^{(n)}$  ed è autoaggiunto sul dominio  $D_N = \{f \in L^2(\mathbb{R}) \mid \sum_{j=0}^{\infty} n^2 |(w^{(j)}, f)|^2 < \infty\}$ .

# Bibliografia

- [1] E.M. Lieb and M. Loss, *Analysis* (second edition), AMS, 1997.
- [2] M.A. Pinsky, *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets*, AMS, 2002.
- [3] Ph. Blanchard and E. Brüning, *Mathematical Methods in Physics*, Birkhäuser, 2003.