

Capitolo 4

Operatori lineari in spazi di Hilbert II

Riprendiamo ora lo studio degli operatori lineari in spazi di Hilbert. Considereremo esempi di operatori di moltiplicazione e di operatori differenziali in $L^2(\mathbb{R}^n)$ e daremo cenni di teoria spettrale per operatori autoaggiunti. La trattazione seguirà, spesso sintetizzandola, quella proposta da diversi autori quali, ad esempio, ([G]) ([BB]). Per trattazioni più approfondite sull'argomento si veda ad esempio ([K])([RS]). Come nei capitoli precedenti, verranno riportati in rosso i risultati validi negli spazi di Hilbert complessi di dimensioni finite e in blu gli approfondimenti.

4.1 Spettro di operatori lineari chiusi su $\mathcal{H}$

Sia $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert separabile e T un operatore lineare chiuso con dominio D_T denso in $\mathcal{H}$. Useremo le notazioni:

- $\text{Ran}_T \equiv \text{co-dominio di } T$ (range di T) $\equiv \{\phi \in \mathcal{H} \mid \exists \psi \in D_T : T\psi = \phi\}$;
- $\text{Ker}_T \equiv \text{nucleo di } T$ (kernel di T) $\equiv \{\phi \in D_T \mid T\phi = 0\}$;
- $(T - z) \equiv (T - z\mathbb{1})$, $z \in \mathbb{C}$ notazione “contratta” che useremo sempre in seguito.

Diremo che $z \in \mathbb{C}$ è un **autovalore** dell'operatore T se esiste un vettore, non nullo, $\phi \in D_T$ tale che $T\phi = z\phi$. Il vettore ϕ viene, in questo caso, indicato come **autovettore** di T relativo all'autovalore z (naturalmente, se ϕ è un

autovettore anche $\lambda \phi$, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, è un autovettore relativo allo stesso autovalore).

Allo scopo di analizzare la struttura degli autovalori o dei “quasi-autovalori” dell’operatore T indagheremo le singolarità della funzione $z \rightarrow (T - z)^{-1}$, nel piano complesso.

Se z non è un autovalore di T , $(T - z)$ è un operatore chiuso, iniettivo tra D_T e $\text{Ran}_{(T-z)}$. Esiste in questo caso l’inverso $R_T(z) \equiv (T - z)^{-1}$ che applica $\text{Ran}_{(T-z)}$ su D_T .

Se $\text{Ran}_{(T-z)} = \mathcal{H}$, $(T - z)^{-1}$ esiste ed è limitato da $\mathcal{H}$ a D_T . z si dice allora appartenente all’ **insieme risolvente** di T . Il nome deriva dal fatto che, in questo caso, l’equazione

$$(T - z) \phi = \psi$$

ha una ed una sola soluzione (in D_T) per ogni $\psi \in \mathcal{H}$. Indicando con $\rho(T)$ l’insieme risolvente di T il suo complemento in $\mathbb{C}$, $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ viene definito come **spettro** dell’operatore T . L’operatore $R_T(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$, per $z \in \rho(T)$, si dice risolvente dell’operatore T .

Teorema 1 *Siano z e z' in $\rho(T)$. Allora vale l’identità (identità del risolvente)*

$$R_T(z) - R_T(z') = (z - z') R_T(z) R_T(z') = (z - z') R_T(z') R_T(z)$$

Per ogni $z_0 \in \rho(T)$ esiste un intorno aperto I_{z_0} di z_0 tale che per ogni $z \in I_{z_0}$ si ha che (serie di Neumann)

$$R_T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (z - z_0)^n R_T^{n+1}(z_0).$$

Dimostrazione Dalle identità

$$R_T(z) - R_T(z') = \begin{cases} R_T(z)(T - z')R_T(z') - R_T(z)(T - z)R_T(z') \\ R_T(z')(T - z')R_T(z) - R_T(z')(T - z)R_T(z) \end{cases}$$

si ricava

$$R_T(z) - R_T(z') = \begin{cases} R_T(z) [(T - z') - (T - z)] R_T(z') \\ R_T(z') [(T - z') - (T - z)] R_T(z) \end{cases}$$

- se $\sigma(T)$ e $\rho(T)$ sono entrambi sottoinsiemi non vuoti del piano complesso allora

$$\|R_T(z)\| \geq \frac{1}{\text{dist}(z, \sigma(T))}$$

- Se $T \in B(\mathcal{H})$ e se $|z| > \|T\|$ allora $z \in \rho(T)$ e

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \|R_T(z)\| = 0 \quad \lim_{|z| \rightarrow \infty} \|zR_T(z) + \mathbb{1}\| = 0 \quad (4.1)$$

Dimostrazione La prova dei primi tre punti è immediata. Proviamo il quarto e il quinto.

Nella prova del teorema abbiamo verificato che se $z_0 \in \rho(T)$ e $\|R_T(z_0)\| |z - z_0| < 1$ allora la serie di Neumann di punto iniziale z_0 converge a $R_T(z)$. In particolare, in queste ipotesi, $z \in \rho(T)$.

Se, al contrario, $z \in \sigma(T)$ dovremo quindi avere $\|R_T(z_0)\| |z - z_0| \geq 1$. Poiché la disuguaglianza è vera per ogni $z \in \sigma(T)$ essa rimane vera per il punto z (che appartiene allo spettro essendo lo spettro chiuso) più vicino a z_0 dove $|z - z_0| = \text{dist}(z_0, \sigma(T))$.

Per provare le stime della norma del risolvente quando $|z|$ tende all'infinito è sufficiente notare che

$$R_T(z) = -\frac{1}{z} \frac{1}{\mathbb{1} - \frac{T}{z}} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{T}{z}\right)^n$$

dove la serie risulta convergente in norma per $\|\frac{T}{z}\| < 1$. È possibile quindi portare il limite all'interno della somma e provare la seconda delle (4.1). La prima è una conseguenza immediata della presenza del fattore $1/z$ davanti alla serie.

Ricordiamo che l'operatore lineare S con dominio D_S , denso in $\mathcal{H}$, si dice **simmetrico** se $S \subseteq S^*$, **autoaggiunto** se $S = S^*$ (si dirà essenzialmente autoaggiunto se la chiusura di S è un operatore autoaggiunto: $\overline{S} = S^*$).¹ Alcune proprietà rilevanti dello spettro di un operatore simmetrico S sono contenute o conseguenze del

¹la seguente tabella riporta le possibili "inclusioni" per operatori simmetrici:

simmetrico $S \subseteq \overline{S} = S^{**} \subseteq S^*$

simmetrico chiuso $S = \overline{S} = S^{**} \subseteq S^*$

Teorema 3

- i) Se z è autovalore di S allora z è un numero reale.
- ii) Autovettori corrispondenti a differenti autovalori di S sono ortogonali.
- iii) Se $\text{Im}z \neq 0$ allora $(S - z)$ è invertibile su $\text{Ran}_{(S-z)}$ e vale la

$$\|R_S(z)\| \leq \frac{1}{|\text{Im}z|}$$

Dimostrazione

i) Se $S\phi = z\phi$ allora $z = \frac{(\phi, S\phi)}{(\phi, \phi)} \in \mathbb{R}$

ii) Se $S\phi_1 = z_1\phi_1$ e $S\phi_2 = z_2\phi_2$ con $z_1 \neq z_2$

$$0 = (\phi_1, S\phi_2) - (S\phi_1, \phi_2) = (z_2 - z_1)(\phi_1, \phi_2)$$

(ricordarsi che z_1 e z_2 sono reali) da cui otteniamo che $(\phi_1, \phi_2) = 0$ essendo $z_1 \neq z_2$

iii) con $\phi \in D_S$

$$\begin{aligned} \|(S - z)\phi\|^2 &= \|(S - \text{Re}z)\phi - i\text{Im}z\phi\|^2 = \\ &= \|(S - \text{Re}z)\phi\|^2 - i\text{Im}z[(S - \text{Re}z)\phi, \phi] - i\text{Im}z[(\phi, (S - \text{Re}z)\phi)] + (\text{Im}z)^2\|\phi\|^2 \\ &= \|(S - \text{Re}z)\phi\|^2 + (\text{Im}z)^2\|\phi\|^2 \\ &\geq (\text{Im}z)^2\|\phi\|^2 \end{aligned}$$

Se $\text{Im}z \neq 0$ z non può quindi essere un autovalore di S e $(S - z)$ applica in maniera iniettiva D_S su $\text{Ran}_{(S-z)}$. Se $\psi \in \text{Ran}_{(S-z)}$, cioè se esiste un $\phi \in D_S$ tale che $(S - z)\phi = \psi$ si ha allora

$$\|R_S(z)\psi\|^2 = \|\phi\|^2 \leq \frac{1}{(\text{Im}z)^2} \|(S - z)\phi\|^2 = \frac{1}{(\text{Im}z)^2} \|\psi\|^2$$

da cui si deduce l'ultima affermazione del teorema.

essenz. autoaggiunto $S \subseteq \overline{S} = S^{**} = S^*$

autoaggiunto $S = \overline{S} = S^{**} = S^*$

Osservazione 1 *Si noti che il teorema prova che $(S-z)$ è sempre invertibile per $\text{Im}z \neq 0$, per ogni operatore simmetrico S . $\text{Ran}_{(S-z)}$ non coincide però necessariamente con tutto $\mathcal{H}$. z può quindi appartenere a $\sigma(S)$ solo nel caso in cui $\overline{\text{Ran}_{(S-z)}} \neq \mathcal{H}$*

Prima di affrontare il teorema che caratterizza le condizioni di autoaggiuntezza per operatori simmetrici proviamo il lemma:

Lemma 4 *Se T è un operatore lineare con dominio D_T denso in $\mathcal{H}$ allora il complemento ortogonale del codominio di T coincide con il nucleo dell'operatore aggiunto T^**

$$(\text{Ran}_T)^\perp = \text{Ker}_{T^*}$$

Dimostrazione Se $\phi \in (\text{Ran}_T)^\perp$ allora $(\phi, T\psi) = 0$ per ogni $\psi \in D_T$. Allora $\phi \in D_{T^*}$ e $(T^*\phi, \psi) = 0$ per ogni $\psi \in D_T$ e quindi per ogni $\psi \in \mathcal{H}$ essendo D_T denso. ϕ appartiene dunque a $(\text{Ran}_T)^\perp$ se e solo se ϕ appartiene a Ker_T

Conseguenza del precedente è il lemma seguente che è lasciato al lettore come esercizio.

Lemma 5 *Se T è un operatore lineare densamente definito, iniettivo e con codominio denso in $\mathcal{H}$ ($\overline{\text{Ran}_T} = \mathcal{H}$), allora l'aggiunto T^* di T ha un inverso e*

$$(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$$

In particolare se $z \in \rho(T)$, $(T - z)$ è invertibile con $\text{Ran}_{(T-z)} = \mathcal{H}$ ed il lemma precedente asserisce che

$$R_{T^*}(z) = R_T(\bar{z})$$

Come abbiamo visto precedentemente se S è un operatore lineare simmetrico densamente definito, allora $(S-z)$ è invertibile su $\text{Ran}_{(S-z)}$, con inverso $R_S(z)$ di norma finita, per $\text{Im}z \neq 0$. Lo spettro $\sigma(S)$ dell'operatore S è quindi un sottoinsieme dell'asse reale unito ai punti z in $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ dove $\text{Ran}_{(S-z)}$ non coincide con tutto $\mathcal{H}$. Il teorema che segue asserisce che l'assenza di punti di questo secondo tipo è quello che caratterizza l'autoaggiuntezza dell'operatore S .

Teorema 6 *Sia S simmetrico densamente definito in $\mathcal{H}$: allora S è autoaggiunto se e solo se*

$$\text{Ran}_{(S-z)} = \text{Ran}_{(S-\bar{z})} = \mathcal{H} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \quad (4.2)$$

*Perché S sia autoaggiunto è sufficiente che (4.2) valga per $z = \imath$.
 S è essenzialmente autoaggiunto se e solo se*

$$\overline{\text{Ran}_{S \mp \imath}} = \mathcal{H}$$

Dimostrazione Proviamo innanzitutto che se $R_S(\imath) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ allora $R_S(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ per ogni z con $\text{Im}z > 0$.

Infatti, se $\imath \in \rho(S)$ allora $z \in \rho(S)$ per ogni z tale che $|z - \imath| < 1$ ed $R_S(z)$ è, per tali valori di z , esplicitamente dato dalla serie di Neumann. In più, la simmetria di S garantisce che $\|R_S(z)\| \leq \frac{1}{\text{Im}z}$. Iterando il procedimento è quindi possibile provare che $R_S(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ per ogni z con $\text{Im}z > 0$.

Lo stesso risultato vale naturalmente per i punti z del semipiano $\text{Im}z < 0$, nell'ipotesi che $R_S(-\imath)$ appartenga a $\mathcal{B}(\mathcal{H})$

Osservazione 2 *Se definiamo i due numeri positivi*

$$m_{\pm} = \dim \text{Ran}_{(S \pm \imath)}^{\perp} = \dim \text{Ker}_{(S^* \mp \imath)}$$

*(dim indica la dimensione dei corrispondenti sottospazi) le considerazioni precedenti indicano che se $m_{\pm} = 0$ allora $\dim \text{Ran}_{(S \pm \imath)}^{\perp} = 0$ per ogni z rispettivamente nei semipiani superiore ed inferiore del piano complesso. Tramite i due numeri m_{+} ed m_{-} , detti **indici di difetto** dell'operatore simmetrico S , il teorema asserisce che condizione necessaria e sufficiente perchè l'operatore simmetrico sia autoaggiunto è che $m_{\pm} = 0$.*

Siano quindi $m_{\pm} = 0$.

Sia $\phi \in D_{S^*}$. Definiamo $\psi = (S - \imath)^{-1} (S^* - \imath) \phi$. Dalla definizione $\psi \in D_S$ e, dalla simmetria di S , $\psi \in D_{S^*}$ e $S^* \psi = S \psi$. Si ha inoltre $(S - \imath) \psi = (S^* - \imath) \phi$, che implica

$$(S^* - \imath) (\phi - \psi) = 0 \quad \text{e} \quad (\phi - \psi) \in \text{Ker}_{(S^* - \imath)}.$$

Poichè, per ipotesi, $\text{Ker}_{(S^* - \imath)} = \text{Ran}_{(S + \imath)}^{\perp} = \{0\}$ si deduce che $\psi = \phi$ ovvero che $\phi \in D_S$ e che $S^* \phi = S \phi$. S estende quindi S^* ed è quindi autoaggiunto.

Inversamente supponiamo che S sia uguale ad S^* . Sia $\phi \in \text{Ran}_{(S-z)}^\perp$ con $\text{Im} z \neq 0$. Allora $\phi \in \ker_{(S^*-\bar{z})}$ ed è quindi un autovettore di S^* relativo all'autovalore (non reale) $\bar{z}$. Se $S = S^*$ la stessa cosa varrebbe per S che, essendo simmetrico, non può che avere autovalori reali. Se ne deduce che $\phi = 0$ e che, quindi, $\text{Ran}_{(S-z)} = \mathcal{H}$.

La prova delle condizioni per l'essenziale autoaggiuntezza sono praticamente identiche a quelle riportate precedentemente e sono lasciate come esercizio.

Corollario 7 *Se A è un operatore autoaggiunto allora $\sigma(A) \subset \mathbb{R}$*

Esempio (operatore di moltiplicazione) $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$, operatore di moltiplicazione per la funzione continua $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$

$$A_g \phi = g \phi \quad \phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Il dominio naturale D_{A_g} dell'operatore A_g è il seguente

$$D_{A_g} = \{\phi \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid g \phi \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

Certamente A_g è densamente definito: $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ è certamente contenuto in D_{A_g} ed è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Anche l'insieme D che si ottiene moltiplicando le funzioni di $L^2(\mathbb{R}^n)$ per le funzioni caratteristiche delle palle chiuse di raggio $r > 0$ ed è un insieme denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$ e contenuto in D_{A_g} . Infatti se

$$D = \{\chi_{B_r} \phi \quad \text{con} \quad \phi \in L^2(\mathbb{R}^n), \quad r > 0\}$$

ogni $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ è tale che $\|\chi_{B_r} \phi - \phi\|_2 \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ e $\|\chi_{B_r} \phi g\|_2 \leq \sup_{x \in B_r} |g(x)| \|\phi\|_2$ (notare che il $\sup_{x \in B_r} |g(x)|$ è finito per ogni funzione continua g , anche non limitata). Cerchiamo di caratterizzare il dominio ed il modo di operare dell'aggiunto A_g^* dell'operatore A_g .

Sia $\phi \in D_{A_g}^*$ e poniamo $\phi^* = A_g^* \phi$. Per definizione di aggiunto, per ogni $\psi \in D_{A_g}$ si ha $(\phi, A_g \psi) = (\phi^*, \psi)$. Poichè la moltiplicazione per la funzione g e per χ_{B_r} commutano $\forall r > 0$ si avrà

$$\begin{aligned} (\phi, A_g \chi_{B_r} \psi) &= (\phi, g \chi_{B_r} \psi) = (\chi_{B_r} \bar{g} \phi, \psi) \\ &\parallel \\ (\chi_{B_r} \phi^*, \psi) \end{aligned}$$

Poichè D_{A_g} è denso in $L^2(\mathbb{R}^n)$ questo implica che $\chi_{B_r} \phi^* = \chi_r \bar{g} \phi$. In particolare $\forall r > 0$

$$\int_{|x| \leq r} |\bar{g} \phi|^2(x) dx = \int_{|x| \leq r} |\phi^*|^2(x) dx \leq \|\phi^*\|_2^2.$$

Passando al limite per $r \rightarrow \infty$ (teorema di dominata convergenza) si ottiene

- $\bar{g} \phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$
- $\phi^* = A_g^* \phi = \bar{g} \phi$

ovvero $\phi \in D_{A_{\bar{g}}} = D_{A_g}$ e $A_g^* = A_{\bar{g}}$ cioè l'aggiunto di A_g è definito sullo stesso dominio di A_g e su tale dominio opera come operatore di moltiplicazione per la funzione $\bar{g}$.

In particolare se la funzione g è reale l'operatore A_g è autoaggiunto. Si noti che l'unica proprietà della funzione g utilizzata nella prova è che essa sia limitata sui compatti di $\mathbb{R}^n$. La prova, pertanto, si applica all'operatore di moltiplicazione per ogni funzione $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ che sia limitata sui compatti di $\mathbb{R}^n$.

Nel paragrafo successivo impareremo che ogni operatore autoaggiunto è, in un senso che preciseremo, l'operatore di moltiplicazione per la funzione $g(x) = x$ in uno spazio di misura opportuno.

Esempio (operatore di derivazione) In questo esempio discuteremo gli operatori di derivazione su $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^n)$. Sia

$$P(D) = \sum_{|\underline{\alpha}| \leq l} a_{\underline{\alpha}} D^{\underline{\alpha}}$$

un operatore differenziale a coefficienti costanti $a_{\underline{\alpha}} \in \mathbb{C}$ scritto nella notazione introdotta nel capitolo precedente. Studiando le proprietà delle trasformate di Fourier abbiamo provato che, se una funzione ϕ ha tutte le derivate fino all'ordine k in $L^2(\mathbb{R}^n)$ allora la trasformata di Fourier di $P(D)\phi$ è legata alla trasformata di Fourier di ϕ dalla

$$\widehat{P(D)\phi}(k) = \left(\sum_{|\underline{\alpha}| \leq l} a_{\underline{\alpha}} (i k)^{\underline{\alpha}} \right) \hat{\phi}(k)$$

L'operatore di derivazione diventa quindi un operatore di moltiplicazione, per un polinomio nelle componenti di k , in trasformata di Fourier.

Risulta giustificata quindi la definizione

$$P(D)\phi = \widehat{P(\imath k)\hat{\phi}}$$

sul dominio naturale

$$D_{P(D)} = \left\{ \phi \in L^2(\mathbb{R}^n) \mid P(\imath k)\hat{\phi}(k) \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

In particolare l'operatore "Hamiltoniana libera" (per una particella quantistica senza gradi di libertà interni) $H_0 = -\Delta$ in $L^2(\mathbb{R}^3)$ è l'operatore autoaggiunto

$$-\Delta\phi = \widehat{(|k|^2\hat{\phi}(k))}$$

sul dominio

$$D_{(-\Delta)} = \left\{ \phi \in L^2(\mathbb{R}^3) : |k|^2\hat{\phi}(k) \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\}$$

Esempio (operatore impulso in un intervallo limitato) L'operatore impulso per una particella quantistica in una regione limitata di $\mathbb{R}$ è l'operatore $P = \imath \frac{d}{dx}$ su $L^2(0, 1)$. Analizziamo il dominio su cui P può essere definito.

La più larga classe di funzioni da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ su cui si possa definire la derivata è la classe delle funzioni **assolutamente continue**. Una funzione da $[0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ si dice assolutamente continua se esiste una funzione $\psi \in L^1(0, 1)$ tale che $\phi(x) - \phi(x_0) = \int_{x_0}^x \psi(y)dy$. Ne segue che ϕ è continua e, quasi ovunque, $\phi' = \psi$.

L'operatore massimale P è dovunque definito sul dominio

$$D_P = \left\{ \phi \in L^2(0, 1) \mid \phi \text{ è assolutamente continua e } \phi' \in L^2(0, 1) \right\}$$

D_P è certamente denso in $L^2(0, 1)$: contiene certamente $C_0^\infty(0, 1)$ che è denso in $L^2(0, 1)$.

Su D_P l'operatore agisce calcolando la derivata e moltiplicandola per $\imath$:

$$P\phi = \imath\phi'$$

L'operatore così definito non è certamente simmetrico essendo le funzioni e^x e e^{-x} autovettori relativi agli autovalori rispettivamente $\pm\imath$. Del resto la

condizione di simmetria non è soddisfatta essendo, per generiche funzioni ϕ e ψ in D_P

$$(\phi, P\psi) = \int_0^1 \bar{\phi}(x) \imath \psi'(x) dx = \imath [\bar{\phi}(1)\psi(1) - \bar{\phi}(0)\psi(0)] + (P\phi, \psi). \quad (4.3)$$

Se definiamo l'operatore P_{min} con dominio $D_{P_{min}} = \{\phi \in D_P \mid \phi(0) = \phi(1) = 0\}$

e azione

$$P_{min}\phi = \imath \phi' \quad \forall \phi \in D_{P_{min}},$$

allora P_{min} risulta una restrizione simmetrica di P , come si deduce dalla (4.3) in cui il termine “di bordo” si annulla per funzioni in $D_{P_{min}}$.

P_{min} non è autoaggiunto come ci si convince facilmente verificando che il suo spettro $\sigma(P_{min})$ coincide con tutto il piano complesso. Infatti mostriamo che $\text{Ran}_{(P_{min}-z)}$ non può contenere le funzioni costanti $\xi(x) = a \quad \forall x \in [0, 1], a \in \mathbb{C}$ per alcun valore di z .

$(P_{min} - z)\phi = \imath \phi' - z\phi = a$ ha infatti la soluzione generale $C e^{-\imath z x} - \frac{a}{z}$ ed è facile verificare che tale soluzione non può essere contemporaneamente nulla in $x = 0$ ed in $x = 1$ per nessun valore della costante C . Si ha dunque $(P_{min} - z)^{-1} \notin \mathcal{B}(L^2(0, 1))$ per alcun valore di z e $\rho(P_{min}) = \emptyset$.

Tornando alla (4.3) si nota che la più generale relazione lineare tra i valori delle funzioni in 1 ed in 0 che annullano i termini di bordo è data dalla: $\phi(1) = e^{\imath \alpha} \phi(0), \psi(1) = e^{\imath \alpha} \psi(0)$ con α reale.

Definiremo quindi gli operatori simmetrici P_α con dominio

$$D_{P_\alpha} = \{\phi \in L^2(0, 1) \mid \phi \text{ è assolutamente continua e } \phi(1) = e^{\imath \alpha} \phi(0)\}$$

e azione

$$P_\alpha \phi = \imath \phi' \quad \forall \phi \in D_{P_\alpha}.$$

Dimostriamo che per ogni α reale P_α è autoaggiunto.

Sia $\phi \in D_{P_\alpha^*}$ e $\phi^* = P_\alpha^* \phi$ che apparterrà ad $L^2(0, 1)$ e quindi ad $L^1(0, 1)$. Definiamo la funzione assolutamente continua

$$\psi(x) = \imath \int_0^x \phi^*(y) dy + c$$

(verificare che appartiene ad $L^2(0, 1)$). Per costruzione $\imath \psi' = \phi^*$. Per dimostrare che P_α^* opera come i -volte la derivata dobbiamo mostrare che $\psi = \phi$.

Infatti per ogni $\xi \in D_{P_\alpha}$

$$\begin{aligned}
 (\phi, P_\alpha \xi) &= (\phi^*, \xi) = -\imath \int_0^1 \overline{\psi'}(x) \xi(x) dx \\
 &= -\imath \overline{\psi}(x) g(x) \Big|_0^1 + \imath \int_0^1 \overline{\psi}(x) \xi'(x) dx \\
 &\quad - \imath [\overline{\psi}(1) e^{\imath\gamma} - \overline{\psi}(0)] \xi(0) + (\psi, P_\alpha \xi)
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

dove abbiamo utilizzato il fatto che ogni $\xi \in D_{P_\alpha}$ è tale che $\xi(1) = e^{\imath\gamma} \xi(0)$.

Dalla (4.4) si ricava che

$$(\phi - \psi, P_\alpha \xi) = -\imath [\overline{\psi}(1) e^{\imath\gamma} - \overline{\psi}(0)] \xi(0) \tag{4.5}$$

Si verifichi che il sottoinsieme lineare di $L^2(0, 1)$

$$\{\eta \in L^2(0, 1) \mid \eta = \imath \xi' \text{ con } \xi \in P_\alpha \text{ e } \xi(0) = 0\}$$

è denso in $L^2(0, 1)$. Ammesso tale risultato dalla (4.5) si ricava

- $\phi = \psi$
- $\psi(1) e^{-\imath} = \psi(0) = \phi(0) = \phi(1) e^{-\imath}$

Quindi $\phi \in D_{P_\alpha}$ e $P_\alpha^* \phi = P_\alpha \phi$ che prova che $P_\alpha^* = P_\alpha$ cioè che P_α è autoaggiunto.

4.2 Il teorema spettrale

Vediamo come la struttura spettrale caratterizzi in modo unico un operatore autoaggiunto. La prova del teorema spettrale verrà solo data in spazi di Hilbert $\mathcal{H}$ di dimensione finita.

Sia A un operatore autoaggiunto in $\mathcal{H}$ di dimensione $n < \infty$. Come abbiamo ricordato nel capitolo II :

- data una qualunque base $\{e_k\}_{k=1}^n$ di $\mathcal{H}$ ad A è associata la matrice hermitiana $A_{kl} = (e_k, A e_l) = \overline{A_{lk}}$;
- $A - z$ non è invertibile per i solo valori di z per cui $\det |A_{kl} - \delta_{kl} z| = 0$ (valori che non dipendano dalla base scelta). Esistono quindi $m \leq n$ valori (reali per quanto abbiamo visto in questo capitolo) $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$ che costituiscono lo spettro di A . Per ogni altro $z \in \mathbb{C}$ infatti $A - z$ è invertibile su tutto $\mathcal{H}$.

$R_A(z)$ è dunque una funzione analitica in $\mathbb{C} \setminus \{\lambda_j\}_{j=1}^m$ ed ha nei punti λ_j singolarità isolate. Le due disuguaglianze provate in precedenza sulla norma dell'operatore risolvente per operatori rispettivamente chiusi e simmetrici, si leggono in questo caso

$$\|R_A(\lambda_j + \imath h)\| \geq \frac{1}{h} \quad \text{e} \quad \|R_A(\lambda_j + \imath h)\| \leq \frac{1}{h}$$

per h reale.

Per un operatore autoaggiunto A le singolarità isolate non possono quindi essere altro che poli di ordine 1.

Teorema 8 *Sia A un operatore autoaggiunto in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ di dimensione $n < \infty$. esistono allora $m \leq n$ proiettori ortogonali P_{λ_j} , ciascuno associato a una soluzione λ_j dell'equazione caratteristica $\det |A_{kl} - z\delta_{kl}| = 0$, con le proprietà:*

- $\sum_{j=1}^m P_{\lambda_j} = \mathbb{1}$

- $P_{\lambda_j} P_{\lambda_s} = \delta_{js} P_{\lambda_j} \quad P_{\lambda_j} = P_{\lambda_j}^* \quad \forall j = 1, \dots, m$

-

$$R_A(z) = \sum_{j=1}^m \frac{P_{\lambda_j}}{\lambda_j - z} \quad A = \sum_{j=1}^m \lambda_j P_{\lambda_j} \quad (4.6)$$

Osservazione 3 *Il teorema asserisce che a ciascun operatore autoaggiunto A su $\mathcal{H}$, finito dimensionale, siano associati $m \leq n$, sottospazi di $\mathcal{H}$, mutuamente ortogonali $M_j = P_{\lambda_j} \mathcal{H}$ con le proprietà:*

- ogni vettore ϕ di $\mathcal{H}$ è la somma delle sue proiezioni ortogonali sugli

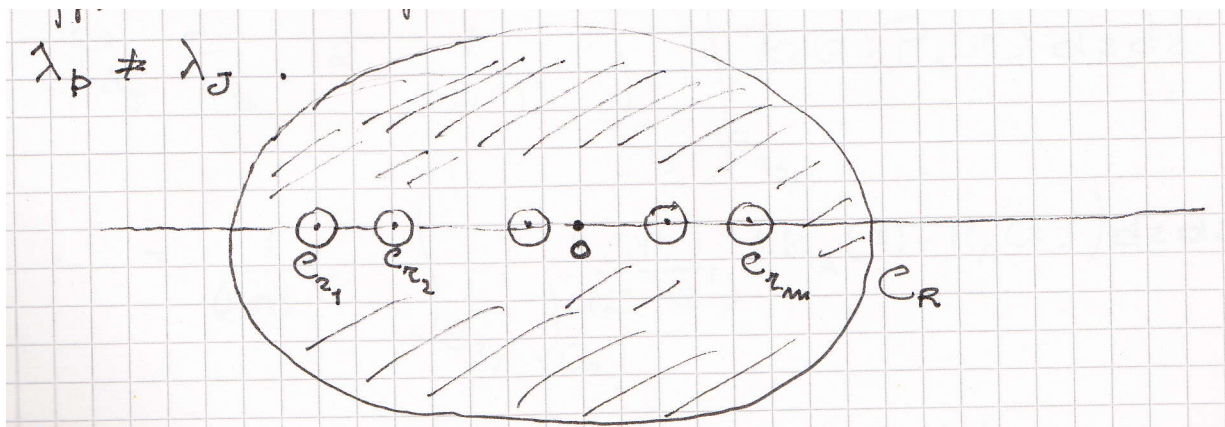
$$M_j : \phi = \sum_{j=1}^m \phi_{M_j} = \sum_{j=1}^m P_{\lambda_j} \phi$$

- su ogni M_j l'operatore A opera moltiplicando il vettore per λ_j (ogni vettore di M_j è autovettore relativo all'autovalore λ_j).

Il risolvente agisce su M_j quindi come moltiplicazione per $\frac{1}{\lambda_j - z}$ e in effetti ogni funzione continua dell'operatore A può essere definita come l'operatore che, su ogni M_j , moltiplica il vettore per $f(\lambda_j)$: $f(A)\phi = \sum_{j=1}^m f(\lambda_j) P_{\lambda_j} \phi$

Dimostrazione La forma (4.6) che il risolvete assume suggerisce che gli operatori $-P_{\lambda_j}$ siano i residui della funzione $R_A(z)$ nei punti di singolarità λ_j .

Sia C_R una circonferenza di raggio sufficientemente grande da contenere tutti i $\{\lambda_j\}_{j=1}^m$ e siano C_{r_j} circonferenze, di centro λ_j , di raggi sufficientemente piccoli da non contenere alcun $\lambda_p \neq \lambda_j$



$R_A(z)$ è olomorfa nella regione interna a C_R ed esterna a tutti i C_{r_j} . Per il teorema di Cauchy si ha dunque

$$\int_{C_R} R_A(z) dz = \sum_{j=1}^m \int_{C_{r_j}} R_A(z) dz.$$

Per il lemma del cerchio grande (Lemma 2.6 del Capitolo 1) e tenuto conto della (4.1) del corollario (2) si ha

$$\lim_{R \nearrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} R_A(z) dz = -\mathbb{1}$$

Quindi

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^m \int_{-C_{r_j}} R_A(z) dz = \mathbb{1}$$

($-C_{r_j}$ indica che l'integrale sulla curva C_{r_j} è calcolato circolando in senso orario).

Definiamo $P_{\lambda_j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-C_{r_j}} R_A(z) dz$. Allora per $j \neq s$

$$\begin{aligned}
P_{\lambda_j} P_{\lambda_s} &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_{r_j}} \int_{C_{r_s}} R_A(z) R_A(z') dz dz' \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_{r_j}} \int_{C_{r_s}} \frac{1}{z - z'} (R_A(z) - R_A(z')) dz dz'
\end{aligned}$$

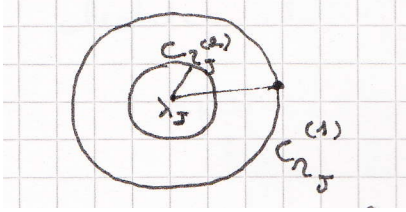
per l'identità del risolvete. Ma

$$\int_{C_{r_s}} \frac{1}{z - z'} R_A(z) dz = \int_{C_{r_j}} \frac{1}{z - z'} R_A(z') dz = 0$$

essendo $\frac{R_A(z)}{z - z'}$ olomorfa in z' per z' interno a C_{r_s} (e $z \in C_{r_j}$) e $\frac{R_A(z')}{z - z'}$ olomorfa in z per z interno a C_{r_j} (e $z' \in C_{r_s}$).

Si ha quindi che $P_{\lambda_j} P_{\lambda_s} = 0$ per $j \neq s$.

Sia $j = s$ e $r_j^1 \equiv r_j > r_s \equiv r_j^{(2)}$



$$\begin{aligned}
P_{\lambda_j}^2 &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_{r_j}^{(1)}} \int_{C_{r_j}^{(2)}} R_A(z) R_A(z') dz dz' \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{C_{r_j}^{(1)}} \int_{C_{r_j}^{(2)}} \frac{1}{z - z'} (R_A(z) - R_A(z')) dz dz'
\end{aligned}$$

Tenuto conto che

$$\int_{C_{r_j}^{(2)}} \frac{1}{z - z'} R_A(z) dz = 0$$

essendo $\frac{R_A(z)}{z - z'}$ olomorfa all'interno di $C_{r_j}^{(2)}$ come funzioni di z' per $z \in C_{r_j}^{(1)}$ e

$$- \int_{C_{r_j}^{(1)}} \frac{1}{z - z'} R_A(z') dz = -2\pi i R_A(z')$$

come si ottiene per calcolo diretto di

$$\int_{C_{r_j^{(1)}}} \frac{1}{z - z'} dz = 2\pi i$$

con z' interno a $C_{r_j^{(1)}}$, si ottiene

$$P_{\lambda_j}^2 = P_{\lambda_j}$$

Per la simmetria della circonferenza C_{r_j} rispetto alla coniugazione complessa: $z \in C_{r_j} \leftrightarrow \bar{z} \in C_{r_j}$, si deduce che

$$P_{\lambda_j} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_j}} R_A(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_{r_j}} R_A(\bar{z}) dz = P_{\lambda_j}^*$$

dove si è utilizzata l'autoaggiuntezza di A . Poichè $R_A(z)$ ha solo poli del primo ordine con residui $-P_{\lambda_j}$ nei punti λ_j , la funzione da $\mathbb{C} \rightarrow B(\mathcal{H})$

$$R_A(z) + \sum_{j=1}^m \frac{P_{\lambda_j}}{z - \lambda_j}$$

è una funzione intera che tende a 0 per $|z|$ tendente all'infinito ed è quindi la funzione nulla. Si ha cioè:

$$R_A(z) = \sum_{j=1}^m \frac{P_{\lambda_j}}{\lambda_j - z}.$$

Per ogni $\psi \in M_j = P_{\lambda_j} \mathcal{H}$ si ha $(A - z) \frac{1}{\lambda_j - z} \psi = (A - z) R_A(z) \psi = \psi$ cioè $A\psi = \lambda_j \psi$. Per ogni $\phi \in \mathcal{H}$ si ha dunque

$$A\phi = A \sum_{j=1}^m P_{\lambda_j} \phi = \left(\sum_{j=1}^m \lambda_j P_{\lambda_j} \right) \phi$$

che dimostra il teorema.

Seguono alcune definizioni necessarie per introdurre il Teorema Spettrale nel caso generale di spazi di Hilbert di dimensione infinita.

Intuitivamente ci farà da guida il risultato ottenuto precedentemente per un operatore autoaggiunto A in uno spazio di Hilbert $\mathcal{H}$ di dimensione $n < \infty$ che possieda $m \leq n$ autovalori $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_m$.

Riferendoci a questo caso, definiamo $E_\lambda \equiv \sum_{j: \lambda_j \leq \lambda} P_{\lambda_j}$ $\lambda \in \mathbb{R}$. Essendo i P_{λ_j}

operatori di proiezione ortogonale, su sottospazi mutuamente ortogonali, gli E_λ sono operatori di proiezione ortogonale per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$.

Dalla definizione discendono le seguenti proprietà della funzione E_λ

$$\text{a) } s - \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} E_\lambda = 0 \quad s - \lim_{\lambda \rightarrow \infty} E_\lambda = \mathbb{1}^2$$

$$\text{b) } E_\lambda E_{\lambda'} = E_{\lambda'} E_\lambda = E_{\min\{\lambda, \lambda'\}}$$

$$\text{c) } E_{\lambda+0} \equiv s - \lim_{\epsilon \downarrow 0} E_{\lambda+\epsilon} = E_\lambda$$

Per ogni $\phi \in \mathcal{H}$ con $\|\phi\| = 1$ la funzione positiva di variabile reale $\lambda \rightarrow (\phi, E_\lambda \phi)$ è crescente, vale 0 per $\lambda < \lambda_1$ e vale 1 per $\lambda \geq \lambda_m$. Ogni funzione di questo tipo definisce una misura e un integrale su $\mathbb{R}$ (integrale di Stieltjes) che nel caso in esame è la misura di probabilità (vedi capitolo II) $\mu_\phi = \sum_{j=1}^m (\phi, P_{\lambda_j} \phi) \delta_{\lambda_j}$.

In termini di tale misura la (4.6) del teorema spettrale si legge

$$(\phi, A\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \mu_\phi(d\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(\phi, E_\lambda \phi)$$

che verrà sintetizzata nella

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d E_\lambda \quad f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d E_\lambda$$

per ogni funzione continua e limitata f .

Sia ora $\mathcal{H}$ uno spazio di Hilbert di dimensione qualunque.

Definizione Si dice famiglia spettrale, o schiera spettrale, o risoluzione dell'identità una famiglia $\{E_\lambda\}_{\lambda \in \mathbb{R}}$ di operatori di proiezione ortogonale che soddisfino le proprietà a), b) e c).

Vale il teorema

²Data una successione di operatori T_n si dirà che tende **fortemente** all'operatore T , scrivendolo $T = s - \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$, se $\forall \phi \in \mathcal{H}$, $T_n \phi$ tende a $T \phi$ in $\mathcal{H}$

Teorema 9 (Teorema Spettrale) E_λ sia una famiglia spettrale nello spazio di Hilbert $\mathcal{H}$. Ad essa è allora associato un operatore autoaggiunto A formalmente denotato come

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d E_\lambda \quad (4.7)$$

ovvero con dominio e azione seguenti

$$D_A = \left\{ \phi \in \mathcal{H} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d(\phi, E_\lambda \phi) < \infty \right. \right\}$$

$$(\phi, A\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d(\phi, E_\lambda \phi) \quad (4.8)$$

Viceversa se A è un operatore autoaggiunto allora esiste una (e una sola) schiera spettrale E_λ tale che valga la (4.7).

Esempio In $L^2(\mathbb{R})$ definiamo la famiglia di operatori E_λ di moltiplicazione per la funzione caratteristica dell'intervallo $(-\infty, \lambda]$: $E_\lambda \phi(x) \equiv \chi_{(-\infty, \lambda]}(x) \phi(x)$. Essendo operatori di moltiplicazione per funzioni limitate e reali gli E_λ sono autoaggiunti e limitati. È immediato verificare che le proprietà a), b) e c) delle schiere spettrali sono verificate dagli E_λ . L'operatore autoaggiunto A associato alla schiera spettrale è definito dalle

$$D_A = \left\{ \phi \in L^2(\mathbb{R}) \left| \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, d \int_{-\infty}^{\lambda} |\phi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |\phi(\lambda)|^2 d\lambda < \infty \right. \right\}$$

$$(\phi, A\phi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d \int_{-\infty}^{\lambda} |\phi(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda |\phi(\lambda)|^2 d\lambda$$

A è quindi l'operatore autoaggiunto in $L^2(\mathbb{R})$ di moltiplicazione per la funzione $f(x) = x$.

Osservazione 4 La forma quadratica (4.8), via l'identità di polarizzazione, fornisce tutti i prodotti scalari $(\psi, A\phi)$ per ogni $\phi, \psi \in \mathcal{H}$ e specifica quindi univocamente l'azione dell'operatore A su ogni vettore di $\mathcal{H}$.

Si noti inoltre che, come nel caso finito dimensionale, la decomposizione spettrale fornisce una forma esplicita delle funzioni limitate dell'operatore A : la funzione $f(A)$ dell'operatore autoaggiunto A è definita dalla

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) d E_\lambda$$

In particolare per $z \in \rho(A) \subset \mathbb{C}$ e per $t \in \mathbb{R}$ sono definite le funzioni

$$\frac{1}{A - z} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda - z} dE_{\lambda} \quad e^{itA} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\lambda} dE_{\lambda}$$

La prima esprime il risolvente dell'operatore autoaggiunto A mentre la seconda definisce una famiglia di operatori unitari (e^{-itA} essendo l'inverso di e^{itA}) funzione del parametro reale t .

Definizione Si definisce **gruppo unitario fortemente continuo** in $\mathcal{H}$ una famiglia di operatori unitari $U(t)$ con $t \in \mathbb{R}$ tale che valgano le proprietà

- $U(t + t') = U(t)U(t')$
- $U(t)$ è fortemente continuo: $\lim_{t \rightarrow 0} U(t) = \mathbb{1}$

Osservazione 5 Si noti che la forte continuità per $t = 0$, espressa dalla seconda proprietà, implica, per la prima proprietà, che la continuità valga per ogni valore di t .

Si noti inoltre che la prima proprietà implica che $U(-t)$ sia l'inverso (e quindi l'aggiunto trattandosi di un operatore unitario) di $U(t)$: $U(-t)U(t) = U(t)U(-t) = U(0) = \mathbb{1} \implies U(-t) = U(t)^{-1} = U(t)^*$

Vale il seguente

Teorema 10 (Teorema di Stone) Se A è un operatore autoaggiunto, allora la famiglia di operatori unitari $U(t) = e^{-itA}$ è un gruppo fortemente continuo su $\mathcal{H}$ con le proprietà

- conserva il dominio di A : $e^{-itA}D_A \subset D_A$
- commuta con A (come tutte le funzioni di A): $e^{-itA}A = Ae^{-itA}$
- per ogni $\phi \in D_A$ "l'evoluto" $\phi(t) = e^{-itA}\phi$ soddisfa l'equazione (di Schrödinger)

$$i \frac{d\phi(t)}{dt} = A\phi(t)$$

con condizione iniziale $\phi(0) = \phi$.

Bibliografia

- [G] S. Graffi, *Alcuni aspetti matematici della Meccanica Quantistica*, Quaderni INDAM, n. 61, 2004.
- [BB] Ph. Blanchard and E. Brüning, *Mathematical Methods in Physics*, Birkhäuser, 2003.
- [K] T. Katō, *Perturbation theory for linear operators*, Springer, 1995.
- [RS] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics 1, 2*, Elsevier, 1975.