

Capitolo 5

Distribuzioni

Le distribuzioni costituiscono una generalizzazione delle funzioni e la teoria delle distribuzioni una generalizzazione del calcolo differenziale sulle funzioni. Senza entrare nel dettaglio delle motivazioni storiche che hanno portato all'elaborazione della Teoria delle Distribuzioni, principalmente dovuta al contributo di L. Schwartz, diamo una lista di applicazioni e risultati della teoria, che ne ha fatto uno strumento insostituibile in Fisica fondamentale e applicata:

- generalizzazione del calcolo differenziale: una distribuzione sarà sempre infinite volte differenziabile. Poiché le funzioni continue sono immerse nelle distribuzioni, sarà possibile definire derivate di ordine qualunque di funzioni anche solo continue.
- Soluzioni deboli di equazioni differenziali: le soluzioni di equazioni differenziali “nel senso delle distribuzioni” hanno un ruolo fondamentale nell'analisi qualitativa e quantitativa dei problemi della Fisica Matematica che prendono a modello le equazioni stesse. In particolare la teoria delle distribuzioni permette una trattazione unificata delle equazioni di campo con sorgenti distribuite in maniera continua e con sorgenti distribuite in maniera singolare, che spesso si incontrano nella modellizzazione fisica (punti materiali, cariche puntiformi, fili percorsi da corrente etc.).
- Estensione da funzioni di punto a funzioni di “regione”: le distribuzioni saranno definite come funzionali su spazi di funzioni molto regolari,

ma non come funzioni di punto. Sono pertanto più adatte a descrivere sistemi fisici in cui, per qualche ragione pratica o fondamentale, le quantità in studio non abbiano valori definibili nei singoli punti.

- Scambio di operazione di limite: nel caso delle distribuzioni lo scambio di operazioni di limite (derivata e somma infinita, limite e integrale, limiti successivi etc.) è sempre permesso e non altera il risultato.

Esistono molte presentazioni di ottimo livello della teoria delle distribuzioni. Questi appunti seguiranno, principalmente, parti scelte dei testi ([Sc], [BB], [St]).

Le parti di testo riportate in blu sono approfondimenti.

5.1 Spazi di funzioni test

Funzioni molto regolari sostituiranno il concetto di punto: intuitivamente il valore di una grandezza fisica “in una funzione” va interpretato come una media, pesata sulla funzione stessa, dei valori puntuali di quella grandezza. I due spazi di funzioni test che utilizzeremo sono già stati introdotti nei capitoli precedenti; la loro definizione verrà qui riportata per completezza.

- Se $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ è un aperto di $\mathbb{R}^n$, consideriamo lo spazio vettoriale $C_0^\infty(\Omega)$ delle **funzioni reali infinitamente differenziabili a supporto compatto** $K \subset \Omega$. Diremo che una successione di funzioni $\{\varphi_j\}$ in $C_0^\infty(\Omega)$ tende a $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ se
 - esiste un compatto $K \subset \Omega$ tale che $\text{supp } \varphi_j \subseteq K, \forall j$ e
 - $\sup_{x \in K} |D^\alpha(\varphi - \varphi_j)(x)| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$ per ogni multi-indice $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_n$ $\alpha_i = 0, 1, \dots,$

$$D^\alpha \equiv \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad |\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n.$$

$C_0^\infty(\Omega)$, con la topologia (di cui non analizzeremo i dettagli) indotta dalla convergenza appena definita è completo, ovvero ogni successione di Cauchy converge a un elemento dello spazio. Lo indicheremo con $\mathcal{D}(\Omega)$, spesso omettendo Ω se $\Omega = \mathbb{R}^n$.

- In $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, aperto, consideriamo lo spazio vettoriale delle funzioni reali infinitamente differenziabili φ tali che le norme

$$\|\varphi\|_{m,l} = \sup_{\substack{x \in \Omega \\ |\alpha| \leq l}} |D^\alpha \varphi(x)| (1 + |x|)^m$$

siano finite $\forall m$ e l interi ≥ 0 .

Lo spazio $\mathcal{S}(\Omega)$ con la topologia definita dal “sistema” di norme $\|\varphi\|_{m,l}$ è uno spazio completo che definiremo delle **funzioni infinitamente differenziabili a decrescenza rapida**.

Naturalmente

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{S}(\Omega)$$

con inclusione continua: ogni funzione di $\mathcal{D}(\Omega)$ appartiene a $\mathcal{S}(\Omega)$ e ogni successione convergente di funzioni in $\mathcal{D}(\Omega)$ risulta convergente in $\mathcal{S}(\Omega)$.

L'insieme dei funzionali lineari continui su $\mathcal{D}(\Omega)$ (il **duale topologico** di $\mathcal{D}(\Omega)$) è denominato insieme delle **distribuzioni** e viene indicato con $\mathcal{D}'(\Omega)$: ogni $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è quindi un funzionale lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$ (quindi un elemento del suo duale algebrico), che risulta inoltre continuo rispetto alla topologia di $\mathcal{D}(\Omega)$. Si ha cioè:

- $T(\varphi) \equiv \langle T, \varphi \rangle \in \mathbb{C}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$
- $\langle T, \alpha \varphi_1 + \beta \varphi_2 \rangle = \alpha \langle T, \varphi_1 \rangle + \beta \langle T, \varphi_2 \rangle \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$
- Se $\{\varphi_j\}$ è una successione di funzioni in D che converge a $\varphi \in D$, nella topologia specificata precedentemente, allora

$$\langle T, \varphi_j \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle T, \varphi \rangle \quad \text{in } \mathbb{C}$$

Il duale topologico dello spazio $\mathcal{S}(\Omega)$ è detto delle **distribuzioni temperate** e viene indicato con $\mathcal{S}'(\Omega)$: $T \in \mathcal{S}'(\Omega)$ se $\langle T, \varphi \rangle$ è un funzionale lineare su $\mathcal{S}(\Omega)$ e se

$$\langle T, \varphi_j \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle T, \varphi \rangle \quad \text{in } \mathbb{C}$$

ogni volta che

$$\sup_x [(1 + |x|)^m |D^\alpha(\varphi_j - \varphi)|(x)] \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

$\forall m$ e l interi positivi o nulli e $|\underline{\alpha}| \leq l$ (con la notazione precedente $\|\varphi_j - \varphi\|_{m,l} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0, \forall m, l \in \mathbb{N}$).

È facile convincersi che l'inclusione $\mathcal{D}(\Omega) \subset \mathcal{S}(\Omega)$, assieme alla continuità dell'inclusione stessa, implicano che $\mathcal{S}'(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega)$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$ e $\mathcal{S}'(\Omega)$ hanno la struttura di spazi vettoriali, quando si definiscono somma e prodotto per uno scalare nella maniera che segue:

- **somma:**

$$\begin{aligned} \langle T_1 + T_2, \varphi \rangle &\equiv \langle T_1, \varphi \rangle + \langle T_2, \varphi \rangle \quad \forall T_1, T_2 \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad (\text{risp. } \mathcal{S}'(\Omega)) \\ &\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (\text{risp. } \mathcal{S}(\Omega)). \end{aligned}$$

- **prodotto per uno scalare:**

$$\begin{aligned} \langle \lambda T, \varphi \rangle &= \lambda \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \quad \forall T \in \mathcal{D}'(\Omega) \quad (\text{risp. } \mathcal{S}'(\Omega)) \\ &\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \quad (\text{risp. } \mathcal{S}(\Omega)). \end{aligned}$$

Osservazione 1 La differenza tra $\mathcal{D}'(\Omega)$ e il duale algebrico di $\mathcal{D}(\Omega)$ è difficile da verificare. È cioè difficile caratterizzare funzionali lineari che non siano anche continui.

La linearità di un funzionale T su $\mathcal{D}(\Omega)$ sembra, da sola, implicare una “certa dose” di continuità: in particolare la continuità lungo direzioni assegnate

$$\langle T, \varphi + th \rangle = \langle T, \varphi \rangle + t \langle T, h \rangle \xrightarrow{t \rightarrow 0} \langle T, \varphi \rangle \quad \forall \varphi, h \in \mathcal{D}(\Omega)$$

cioè: “lungo la direzione h ”, il funzionale è continuo perché è lineare. Una successione $\{\varphi_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ potrebbe però tendere a φ cambiando costantemente “direzione”, e la linearità non implicherebbe, in questo caso, la continuità.

Malgrado la convergenza in $\mathcal{D}(\Omega)$ sia molto forte, si può dimostrare che esistono funzionali lineari su $\mathcal{D}(\Omega)$ che non sono continui. La dimostrazione si basa su assiomi della teoria degli insiemi (assioma della scelta) e non è costruttiva: non permette, cioè, di esplicitare un esempio di funzionale lineare non continuo su $\mathcal{D}(\Omega)$.

5.2 Lo spazio delle distribuzioni $\mathcal{D}'$

Una larga classe di funzioni è inclusa in maniera naturale nelle distribuzioni giustificando l'idea che le distribuzioni costituiscano una generalizzazione del concetto di funzione.

Per semplicità consideriamo $\Omega = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{D}(\Omega) = \mathcal{D}$. Una funzione f da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}$ si definisce localmente sommabile se

$$\int_K |f|(x) dx < \infty \quad \forall K \text{ compatto di } \mathbb{R}^n$$

Lo spazio vettoriale delle funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}$ localmente sommabili si indicherà con $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n)$. Definiamo il funzionale lineare su $\mathcal{D}$

$$\langle T_f, \varphi \rangle \equiv \int f(x) \varphi(x) dx$$

ben definito poiché

$$|\langle T_f, \varphi \rangle| \leq \int |f|(x) |\varphi|(x) dx \leq \sup_x |\varphi| \int_{\text{supp } \varphi} |f|(x) dx < \infty \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

La maggiorazione precedente mostra inoltre che T_f è continuo su $\mathcal{D}$

($\langle T_f, \varphi_j \rangle \rightarrow 0$ quando $\varphi_j \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}$). Quindi $T_f \in \mathcal{D}'$.

Si noti inoltre che:

$$\begin{aligned} \int f(x) \varphi(x) dx &= 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \\ \Rightarrow f(x) &= 0 \quad \text{q. o. in } \mathbb{R}^n \quad (\text{provarlo}) \end{aligned}$$

e quindi due funzioni localmente sommabili definiscono la stessa distribuzione se e solo se sono uguali quasi ovunque.

Le funzioni localmente sommabili (meglio: le classi di equivalenza di funzioni localmente sommabili uguali q.o.) sono quindi immerse nelle distribuzioni.

Esercizio 1 Verificare che $\frac{1}{|x|^n}$ non è localmente sommabile in $\mathbb{R}^n$, mentre $e^{|x|^2}$ lo è.

Le distribuzioni definite da funzioni localmente sommabili sono spesso denominate **distribuzioni regolari**.

Si possono facilmente trovare distribuzioni in $\mathcal{D}'$ che non sono definite da funzioni localmente sommabili. L'esempio classico è costituito dalla distribuzione δ_y ("di Dirac") nel punto $y \in \mathbb{R}^n$:

$$\langle \delta_y, \varphi \rangle = \varphi(y) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

È immediato verificare che δ_y è un funzionale lineare e che

$$|\langle \delta_y, \varphi_j \rangle - \langle \delta_y, \varphi \rangle| \xrightarrow{j \rightarrow \infty} 0$$

se $\varphi_j \xrightarrow{\text{in } \mathcal{D}} \varphi$. Quindi $\delta_y \in \mathcal{D}'$ e $\langle \delta_y, \varphi \rangle = 0$, $\forall \varphi \in \mathcal{D}$, con $\text{supp } \varphi \subset (\mathbb{R}^n \setminus \{y\})$ (compatto, essendo φ in $\mathcal{D}$). Se una funzione f localmente sommabile definisse la stessa distribuzione, si avrebbe dunque

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D} \quad \text{supp } \varphi \subset (\mathbb{R}^n \setminus \{y\})$$

Come precedentemente notato, questo implicherebbe che $f(x) = 0$ q.o. in $\mathbb{R}^n \setminus \{y\}$, ovvero q.o. in $\mathbb{R}^n$.

Le distribuzioni sono dunque un'estensione propria delle funzioni localmente sommabili.

Diamo alcuni esempi di distribuzioni non regolari

Parte principale di Cauchy o valore principale di Cauchy La funzione $\frac{1}{x}$ non è integrabile su alcun compatto di $\mathbb{R}$ contenente l'origine e non è quindi localmente integrabile. Verifichiamo l'esistenza di una distribuzione $p.p. \frac{1}{x}$ (**Parte principale** di $\frac{1}{x}$ o **valore principale** di $\frac{1}{x}$) che, fuori dall'origine, coincide con la funzione $\frac{1}{x}$. Definiamo

$$\left\langle p.p. \frac{1}{x}, \varphi \right\rangle \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \epsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Essendo $\int_{|x|>\epsilon}^{|x|<L} \frac{1}{x} = 0 \quad \forall L > \epsilon > 0$ e tenuto conto del fatto che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ esiste un intervallo $[-L, L]$ che contiene il supporto di φ , se ne deduce che una versione alternativa della definizione precedente è la seguente

$$\langle p.p. \frac{1}{x}, \varphi \rangle \equiv \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{|x|>\epsilon}^{|x|<L} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx \quad (5.1)$$

Per ogni funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, $\left| \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} \right| \leq \sup_{x \in \text{supp } \varphi} |\varphi'(x)|$ e la funzione integranda, nel membro di destra della (5.1), risulta limitata e quindi integrabile in $[-\epsilon, \epsilon]$. Si ha quindi

$$\langle p.p. \frac{1}{x}, \varphi \rangle \equiv \int_{|x|<L} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} dx$$

con $\text{supp } \varphi \subset [-L, L]$.

Il funzionale così definito è evidentemente lineare.

Se $\varphi \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}$ allora $\sup_x |\varphi'(x)| \rightarrow 0$ e $\langle p.p. \frac{1}{x}, \varphi \rangle \rightarrow 0$ in $\mathbb{C}$. Di conseguenza se φ_j è una successione di funzioni test che converge in $\mathcal{D}$ a φ allora $\langle p.p. \frac{1}{x}, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle p.p. \frac{1}{x}, \varphi \rangle$ e il funzionale risulta quindi continuo.

Distribuzione superficiale di “carica” Data una funzione continua $\sigma_S(y)$ definita su una (iper-)superficie regolare S di $\mathbb{R}^n$ si definisce

$$\langle \sigma_S, \varphi \rangle = \int_S \sigma_S(y) \varphi(y) dS(y) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

È un semplice esercizio verificare che σ_S è una distribuzione e che non è una distribuzione regolare.

Osservazione 2 Daremo nel seguito definizioni e proveremo proprietà delle distribuzioni che generalizzano analoghe definizioni e proprietà di funzioni localmente sommabili. Ogni volta che le distribuzioni saranno definite da funzioni localmente sommabili, bisognerà verificare che le proprietà e le operazioni corrispondano a quelle classicamente definite sulle funzioni.

Definizione Una successione di distribuzioni in $\{T_j\} \in \mathcal{D}'$, si dirà di Cauchy se le successioni $\langle T_j, \varphi \rangle$ sono di Cauchy in $\mathbb{C}$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$. Si dirà **convergere** a $T \in \mathcal{D}'$ se

$$\langle T_j, \varphi \rangle \xrightarrow{j \rightarrow \infty} \langle T, \varphi \rangle \quad \text{in } \mathbb{C}, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Esercizio 2 Verificare che se $T_j = T_{f_j}$ e $T = T_f$, per f_j e f funzioni localmente sommabili, la convergenza $T_{f_j} \xrightarrow{j \rightarrow \infty} T_f$ coincide con la convergenza q.o. delle funzioni su ogni compatto.

Gli esempi che seguono dimostrano che successioni di funzioni f_i localmente sommabili, che non convergono nel senso delle funzioni, definiscono successioni di distribuzioni che hanno sempre un limite in $\mathcal{D}'$. Mostriamo anche esempi di successioni di funzioni convergenti nel senso delle funzioni, ma tali che la corrispondente successione di distribuzioni non converge alla distribuzione definita dalla funzione limite. Al lettore è richiesto di convincersi che gli esempi di quest'ultimo tipo non contraddicono l'affermazione sulla convergenza di distribuzioni regolari fatta alla fine del periodo precedente.

Esempio Si consideri la successione di funzioni localmente sommabili sulla retta reale $f_j(x) = \sin(jx)$. Per quasi ogni x non esiste il limite $\lim_{j \rightarrow \infty} \sin(jx)$. La successione non ammette quindi una funzione limite. Integrando per parti e tenendo conto che le funzioni di $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ hanno supporto compatto, si ha però

$$\langle T_{f_j}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(jx) \varphi(x) dx = \frac{1}{j} \int_{-\infty}^{\infty} \cos(jx) \varphi'(x) dx$$

per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Se ne conclude che $\langle T_{f_j}, \varphi \rangle \rightarrow 0$ quando $j \rightarrow \infty$, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, ovvero che la successione di distribuzioni T_{f_j} tende a 0.

Esempio Si consideri la successione di funzioni localmente sommabili sulla retta reale $h_j(x) = \frac{\sin(jx)}{x}$. Come nel caso precedente la successione non ammette limite nel senso della convergenza puntuale di funzioni. Nel senso delle distribuzioni si ha invece $\lim_{j \rightarrow \infty} T_{h_j} = \pi \delta_0$. Infatti, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$

$$\langle T_{h_j}, \varphi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(jx)}{x} \varphi(x) dx = \int_{\text{supp } \varphi} \frac{\sin(jx)}{x} [\varphi(x) - \varphi(0)] dx + \int_{\text{supp } \varphi} \frac{\sin(jx)}{x} \varphi(0) dx$$

Il primo integrale tende a 0 per il lemma di Riemann-Lebesgue. Se $L > 0$ è tale che $\text{supp } \varphi \subseteq [-L, L]$ il secondo integrale diventa

$$\int_{\text{supp } \varphi} \frac{\sin(jx)}{x} \varphi(0) dx = \int_{-L}^L \frac{\sin(jx)}{x} \varphi(0) dx = \varphi(0) \int_{-jL}^{jL} \frac{\sin(x)}{x} dx$$

che nel limite $j \rightarrow \infty$ tende a $\pi\varphi(0)$ provando il risultato. (Per il calcolo dell'integrale col metodo dei residui, si vedano gli esercizi alla fine del capitolo 1).

Unità approssimate Consideriamo in $L^1(\mathbb{R})$ la classe di unità approssimate che si ottengono per riscaldamento di funzioni integrabili non negative (vedi l'esempio nella sezione 3.6). Sia $J(x) \in L^1(\mathbb{R})$ con $J(x) \geq 0$ q.o. tale che $\int_{\mathbb{R}} J(x) dx = 1$. Abbiamo dimostrato nel capitolo 3 che la successione $J_m(x) = m J(mx)$ è un'unità approssimata e che quindi, in particolare,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} J_m(x) f(x) dx = f(0)$$

per ogni funzione complessa di variabile reale continua e limitata. Il risultato è quindi certamente vero per ogni funzione $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ e si traduce, nel linguaggio delle distribuzioni, nell'affermazione $T_{J_m} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \delta_0$.

In particolare scegliendo

$$J(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} \implies J_\epsilon(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \frac{1}{\pi} \text{Im} \frac{1}{x - i\epsilon} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x + i\epsilon} - \frac{1}{x - i\epsilon} \right]$$

(dove si è preso $\epsilon = 1/m$ per unificare la notazione con quella tradizionale) si ottiene il risultato, noto come **formula di Breit-Wigner**

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2} = \pi \delta_0$$

Un esempio in $\mathbb{R}^n$ si ottiene considerando l'unità approssimata, già definita al capitolo 3, $J_m(x) = m^n e^{-\pi m^2 |x|^2}$ che tende quindi alla δ_0 in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Si noti che in entrambi gli esempi precedenti le successioni di funzioni tendono a zero per quasi ogni x mentre le corrispondenti successioni di distribuzioni non tendono alla distribuzione nulla.

Esempio Le funzioni $\frac{1}{x + i\epsilon}$ e $\frac{1}{x - i\epsilon}$ sono, per ogni $\epsilon > 0$, localmente sommabili e definiscono quindi distribuzioni in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Per ϵ che tende a 0 tendono alla funzione $1/x$ che non è localmente sommabile e non definisce quindi una distribuzione. In $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vale però il risultato (**formula di Sokhotskj-Plemelj**)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \mp i\pi\delta_0 + p.p.\frac{1}{x}$$

Infatti

$$\frac{1}{x \pm i\epsilon} = \operatorname{Re} \frac{1}{x \pm i\epsilon} + i \operatorname{Im} \frac{1}{x \pm i\epsilon} = \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} \mp i \frac{\epsilon}{x^2 + \epsilon^2}$$

La parte immaginaria del limite è dunque $\mp \pi\delta_0$ per la formula di Breit-Wigner. È lasciato come esercizio di verificare che, nel senso delle distribuzioni,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{x}{x^2 + \epsilon^2} = p.p.\frac{1}{x}$$

La definizione di convergenza di successioni di distribuzioni in $\mathcal{D}'$ suggerisce e implica la nozione di convergenza di una serie di distribuzioni alla sua somma. La serie $\sum_{i=0}^{\infty} T_i$ di distribuzioni $T_i \in \mathcal{D}'$ si dirà convergere alla somma

$T \in \mathcal{D}'$ se la serie di numeri complessi $\sum_{i=0}^{\infty} \langle T_i, \varphi \rangle$ converge a $\langle T, \varphi \rangle$ per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$.

Ad esempio la distribuzione $T = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \delta_i$, $c_i \in \mathbb{C}$ è ben definita in $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ poiché per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{i: i \in \operatorname{supp} \varphi} c_i \varphi(i)$$

che esiste per ogni scelta dei coefficienti c_i essendo gli $i \in \operatorname{supp} \varphi$ in numero finito.

Concludiamo questa sezione con la definizione di supporto di una distribuzione in $\mathcal{D}'(\Omega)$. La definizione di supporto di una funzione continua come la chiusura dei punti del dominio in cui la funzione è diversa da zero, data all'inizio della sezione (3.6), è ovviamente inadatta a definire dove sia localizzata una distribuzione, che non è una funzione di punto. Come nel caso

del supporto essenziale di una funzione definita quasi ovunque, si comincerà col definire la regione in cui una distribuzione è identicamente nulla.

Diremo che una distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ è **identicamente nulla** nell'aperto $\Omega' \subset \Omega$ se $\langle T, \varphi \rangle = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega')$, cioè se $\langle T, \varphi \rangle = 0$ per ogni funzione φ , infinitamente differenziabile, a supporto compatto contenuto in Ω' .

Conseguentemente si dirà che due distribuzioni T e T' coincidono nell'aperto Ω quando la loro differenza $T - T'$ è identicamente nulla in Ω .

Si dirà **supporto** della distribuzione $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ il complementare in Ω del più grande sottoinsieme aperto di Ω in cui la distribuzione T è identicamente nulla. Alternativamente il supporto di T è caratterizzato come l'intersezione di tutti gli insiemi chiusi C tali che la distribuzione T è identicamente nulla in $\Omega \setminus C$.

Esercizio 3 *Provare che*

- per ogni funzione f continua, localmente sommabile, si ha $\text{supp } f = \text{supp } T_f$;
- il supporto della distribuzione $\delta_y \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con $y \in \Omega$ è l'insieme chiuso $\{y\}$ costituito dal solo punto y .

Il sottoinsieme lineare $\mathcal{E}'(\Omega)$ di $\mathcal{D}'(\Omega)$ delle distribuzioni a supporto compatto in Ω è un sottospazio chiuso di $\mathcal{D}'(\Omega)$: si può dimostrare che è il duale topologico dello spazio vettoriale $C^\infty(\Omega)$ con la topologia indotta dalla convergenza uniforme di tutte le derivate su ogni compatto $K \subset \Omega$, generalmente indicato con $\mathcal{E}(\Omega)$.

5.3 Calcolo differenziale in $\mathcal{D}'$

Per semplicità di notazione in questa sezione considereremo solo distribuzioni in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

Definizione Se $\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, il prodotto di α per una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ è definito dalla

$$\langle \alpha T, \varphi \rangle \equiv \langle T, \alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

La relazione precedente definisce la distribuzione $\alpha T \in \mathcal{D}'$ poiché:

- $\alpha \varphi \in \mathcal{D} \quad \forall \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \varphi \in \mathcal{D}$
- $\alpha \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \alpha \varphi \quad \forall \alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ se } \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$

Definizione Se $T \in \mathcal{D}'$, la sua derivata parziale $D^\alpha T$, di ordine $|\alpha|$, α_i volte rispetto alla variabile x_i , $i = 1 \dots n$, è definita dalla

$$\langle D^\alpha T, \varphi \rangle \equiv (-)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha \varphi \rangle$$

La distribuzione è ben definita poiché

- $D^\alpha \varphi \in \mathcal{D} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$
- l'operazione di derivazione è lineare su $\mathcal{D}$
- l'operazione di derivazione è continua su $\mathcal{D} : D^\alpha \varphi_j \xrightarrow{\mathcal{D}} D^\alpha \varphi \text{ se } \varphi_j, \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$

Se $T = T_f$ con f localmente sommabile e con derivate localmente sommabili fino all'ordine $l \in \mathbb{N}$, allora $D^\alpha T_f = T_{D^\alpha f}$ per $|\alpha| \leq l$ poiché, per integrazione per parti,

$$\langle D^\alpha T_f, \varphi \rangle = (-)^{|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) (D^\alpha \varphi)(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (D^\alpha f)(x) \varphi(x) dx$$

Nel lemma che segue sono contenuti una serie di risultati che sono conseguenza diretta delle precedenti definizioni e della linearità e continuità delle derivate in $\mathcal{D}$

Lemma 3

- *Ogni distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ è infinitamente differenziabile e le derivate successive non dipendono dall'ordine in cui vengono calcolate*

$$D^\beta (D^\alpha T) = D^\alpha (D^\beta T) = D^{\alpha+\beta} T$$

- *Per ogni multi-indice α la derivata D^α è un'applicazione lineare e continua da $\mathcal{D}'$ a $\mathcal{D}'$. In particolare*

– se $T = \lim_{m \rightarrow \infty} T_m$ allora

$$D^\alpha T = D^\alpha \left(\lim_{m \rightarrow \infty} T_m \right) = \lim_{m \rightarrow \infty} D^\alpha T_m$$

– se la serie $\sum_{m=0}^{\infty} T_m$ converge in $\mathcal{D}'$ alla distribuzione T , allora

$$D^\alpha T = D^\alpha \left(\sum_{m=0}^{\infty} T_m \right) = \sum_{m=0}^{\infty} D^\alpha T_m$$

- Se $\alpha(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e $T \in \mathcal{D}'$ allora per la distribuzione prodotto αT , definita precedentemente, vale la regola di Leibniz

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha T) = \frac{\partial \alpha}{\partial x_i} T + \alpha \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Sia $y = Ax + b$ la trasformazione affine di $\mathbb{R}^n$ in se stesso definita dalla trasformazione lineare A , non singolare ($|\det A| \neq 0$), e dalla traslazione $b \in \mathbb{R}^n$.

Per una distribuzione $T \in \mathcal{D}'$ definiremo la composizione di T con la trasformazione affine $y = Ax + b$ tramite la:

$$\langle T \circ (Ax + b), \varphi \rangle \equiv \langle T, \frac{\varphi(A^{-1}(x - b))}{|\det A|} \rangle$$

In particolare la traslazione $\tau_b T$ della distribuzione T è definita:

$$\langle \tau_b T, \varphi(\cdot) \rangle = \langle T, \varphi(\cdot - b) \rangle$$

È facile verificare che l'uguaglianza definisce una distribuzione in $\mathcal{D}'$. Se $T = T_f$ con f localmente sommabile, l'uguaglianza è una conseguenza della formula per il cambio di variabili nell'integrale:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(Ax + b) \varphi(x) dx = \frac{1}{|\det A|} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(A^{-1}(x - b)) dx$$

Esercizio 4 Provare che $\langle \tau_x T, \varphi \rangle$ è una funzione infinitamente differenziabile in x (non necessariamente a supporto compatto) $\forall \varphi \in \mathcal{D}$.

Esempio il “dipolo unitario” in y di $\mathbb{R}^n$, nella direzione $\hat{n}$ è la distribuzione T_{dip}

$$\langle T_{\text{dip}}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\left\langle \frac{1}{\varepsilon} \delta_{y+\hat{n}\varepsilon}, \varphi \right\rangle - \left\langle \frac{1}{\varepsilon} \delta_y, \varphi \right\rangle \right] = \left(\frac{\partial}{\partial \hat{n}} \varphi \right) (y)$$

quindi il dipolo unitario è *definito* dalla distribuzione $-\frac{\partial}{\partial \hat{n}} \delta_y$.

Il nome deriva dal fatto che la distribuzione $-\frac{\partial}{\partial \hat{n}} \delta_y$ applicata al potenziale di carica puntiforme $\frac{1}{|x-\xi|}$ fornisce il potenziale in ξ del dipolo unitario

$$\begin{aligned} \left\langle -\frac{\partial}{\partial \hat{n}} \delta_y, \frac{1}{|x-\xi|} \right\rangle &= \left(\frac{\partial}{\partial \hat{n}_x} \frac{1}{|x-\xi|} \right) (y) \\ &= \frac{\hat{n} \cdot (\xi - y)}{|y - \xi|^3} \end{aligned}$$

Esempio Sia $H(x)$ la funzione di Heaviside da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} H(x) &= 0 & x < 0 \\ &= 1 & x \geq 0 \end{aligned}$$

allora si dimostra che

$$H'(x) = \delta_0$$

Infatti, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}$, dalla definizione discende

$$\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle = -\int_0^\infty \varphi'(x) dx = -[\varphi(x)]_0^\infty = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

Più in generale sia

$$\begin{aligned} f(x) &= f_-(x) & x < 0 \\ &= f_+(x) & x > 0 \end{aligned}$$

con f_+ e f_- funzioni derivabili m volte e tali che le funzioni e le loro derivate abbiano limiti finiti per x che tende a zero rispettivamente da destra e da sinistra. Utilizzeremo le notazioni

- σ_j “salto della j -sima derivata” : $\sigma_j = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_+^{(j)} - \lim_{x \rightarrow 0^-} f_-^{(j)}$

- $\{f^{(j)}\}$ $j \leq m$ la funzione

$$\begin{aligned}\{f^{(j)}\}(x) &= f_-^{(j)}(x) & x < 0 \\ &= f_+^{(j)}(x) & x > 0\end{aligned}$$

- $T_{\{f^{(j)}\}}$ la distribuzione definita dalla funzione localmente sommabile $\{f^{(j)}\}$.

Con le notazioni precedenti, per integrazioni per parti, partendo dalla definizione, si ricava la formula

$$\frac{d^m T_f}{dx^m} = T_{\{f^{(m)}\}} + \sigma_0 \delta_0^{(m-1)} + \sigma_1 \delta_0^{(m-2)} \dots \sigma_{m-1} \delta_0$$

dove con $\delta_0^{(j)}$ abbiamo denotato la derivata j -sima della distribuzione δ_0

$$\langle \delta_0^{(j)}, \varphi \rangle = (-1)^j \langle \delta_0, \varphi^{(j)} \rangle = (-1)^j \varphi^{(j)}(0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}$$

Infatti

$$\left\langle \frac{dT_f}{dx}, \varphi \right\rangle = -\langle T_f, \varphi' \rangle = -\int_{-\infty}^0 f_-(x) \varphi'(x) dx - \int_0^{\infty} f_+(x) \varphi'(x) dx$$

che per integrazione per parti nei due integrali, tenuto conto che φ ha supporto compatto, diventa

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{dT_f}{dx}, \varphi \right\rangle &= -f_-(0^-) \varphi(0) + \int_{-\infty}^0 f'_-(x) \varphi(x) dx + f_+(0^+) \varphi(0) + \int_0^{\infty} f'_+(x) \varphi(x) dx \\ &= \sigma_0 \varphi(0) + \int_{-\infty}^{\infty} \{f'(x)\} \varphi(x) dx = \sigma_0 \langle \delta_0, \varphi \rangle + \langle T_{\{f'\}}, \varphi \rangle\end{aligned}$$

che dimostra la formula per la derivata prima. La formula per ogni altra derivata si ottiene per iterazione dello stesso risultato.

Esempio Consideriamo la generalizzazione dei risultati dell'esempio precedente a $\mathbb{R}^n$ $n > 1$.

Sia S una ipersuperficie regolare (le equazioni parametriche che la definiscono sono espresse come eguaglianza a zero di funzioni “molto regolari”), di

dimensione $n-1$, che divide $\mathbb{R}^n$ in due regioni connesse Ω_1 e Ω_2 . S può essere una ipersuperficie aperta che divide $\mathbb{R}^n$ in due regioni infinite o una superficie chiusa che divide $\mathbb{R}^n$ in una regione limitata, interna all'ipersuperficie, e in una illimitata, esterna all'ipersuperficie.

Sia f una funzione da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}$

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) & x \in \Omega_1 \\ &= f_2(x) & x \in \Omega_2 \end{aligned}$$

con f_1 e f_2 funzioni rispettivamente da Ω_1 e Ω_2 a $\mathbb{C}$, con tutte le derivate parziali continue fino all'ordine m e tali da avere limiti finiti sull'ipersuperficie. Come nell'esempio precedente useremo la notazione $\{D^\alpha f\}$ per la funzione (localmente sommabile) che vale $D^\alpha f_1$ in Ω_1 e $D^\alpha f_2$ in Ω_2 .

Per integrazione per parti, come nell'esempio precedente si ottiene

$$\frac{\partial T_f}{\partial x_i} = T_{\{\frac{\partial f}{\partial x_i}\}} + \sigma_0 n_i \delta_S$$

dove $\sigma_0(y)$ per $y \in S$ è il salto della funzione f nel punto y della superficie, quindi la differenza dei limiti della funzione $f_1(x)$ quando x tende, da Ω_1 , al punto y sulla superficie, e di quello della funzione $f_2(x)$ quando x tende, da Ω_2 , allo stesso punto. $n_i(y)$ indica la componente i -sima del vettore normale alla superficie in y , entrante nella regione Ω_1 ovvero $n_i(y) = \hat{n}(y) \cdot \hat{i}$ e la distribuzione δ_S è la “distribuzione di carica superficiale” definita precedentemente. (Basta ricordare, o verificare, che $(\hat{n}(y) \cdot \hat{i}) dS = dx_1 \dots dx_{i-1} dx_{i+1} \dots dx_n$).

Iterando il procedimento otteniamo

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T_f}{\partial x_i^2} &= T_{\{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\}} + \sigma_1^i n_i \delta_S + \frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_0 n_i \delta_S) \\ \Delta T_f &= T_{\{\Delta f\}} + \sigma_1^{\hat{n}} \delta_S + \frac{\partial}{\partial \hat{n}}(\sigma_0 \delta_S) \end{aligned} \tag{5.2}$$

dove σ_1^i denota il salto della derivata parziale i -sima, $\sigma_1^{\hat{n}}$ il salto della derivata normale.

È interessante notare come la (5.2) permetta una dimostrazione indipendente di formule classiche dell'analisi vettoriale, conseguenze dei teoremi della divergenza e di Stokes.

Sia Ω una regione aperta limitata di $\mathbb{R}^n$ che ha come bordo una ipersuperficie S regolare di dimensione $n - 1$ e consideriamo le normali alla superficie S dirette verso l'interno della regione Ω . Sia

$$\begin{aligned} f(x) &= g(x) & x \in \Omega \\ &= 0 & x \in \mathbb{R}^n \setminus \overline{\Omega} \end{aligned}$$

con g che ha derivate continue fino al secondo ordine (quindi un Laplaciano localmente integrabile).

Tenuto conto che, in questo caso, $\{\Delta f\} = \Delta g$ per $x \in \Omega$, $\sigma_0(y) = g(y)$ per $y \in S$ e $\sigma_1^{\hat{n}} = \frac{\partial g}{\partial \hat{n}}(y)$ per $y \in S$, l'eguaglianza (5.2) tra distribuzioni, applicata a una qualunque funzione $\varphi \in \mathcal{D}$ dà

$$\begin{aligned} \langle \Delta T_f, \varphi \rangle &= \langle f, \Delta \varphi \rangle = \int_{\Omega} g(x) \Delta \varphi(x) dx \\ &= \langle T_{\{\Delta f\}}, \varphi \rangle + \langle \sigma_1^{\hat{n}} \delta_S, \varphi \rangle + \langle \frac{\partial}{\partial \hat{n}}(\sigma_0 \delta_S), \varphi \rangle \\ &= \int_{\Omega} \Delta g \varphi(x) dx + \int_S \frac{\partial g}{\partial \hat{n}}(y) \varphi(y) dS(y) - \int_S g(y) \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}}(y) dS(y) \end{aligned}$$

che fornisce la **Formula di Green**

$$\int_{\Omega} (g(x) \Delta \varphi(x) - \Delta g \varphi(x)) dx = \int_S \left(\frac{\partial g}{\partial \hat{n}}(y) \varphi(y) - g(y) \frac{\partial \varphi}{\partial \hat{n}}(y) \right) dS(y)$$

Esercizio 5 Utilizzando la formula di Green proviamo che in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ vale la $\Delta \frac{1}{|x|^{n-2}} = -(n-2) S^{(n)}(1) \delta_0$ per $n \neq 2$ e $\Delta \log \frac{1}{|x|} = -2\pi \delta_0$ per $n = 2$. Ricordiamo che con $S^{(n)}(1)$ abbiamo indicato al Cap. 3 la superficie della sfera unitaria in $\mathbb{R}^n$ $S^{(n)}(1) = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}$.

Con calcolo diretto si ricava (provarlo) che, in ogni dimensione n , il Laplaciano di una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$, che dipenda solamente dal $|x|$, è dato da

$$(\Delta f)(|x|) = \frac{d^2 f}{d|x|^2} + \frac{n-1}{|x|} \frac{df}{d|x|}$$

Una funzione f che dipenda solo da $|x|$ è quindi armonica in $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ se

$$(\Delta f)(|x|) = \frac{d^2 f}{d|x|^2}(|x|) + \frac{n-1}{|x|} \frac{df}{d|x|}(|x|) = 0$$

ovvero se

$$\frac{d}{d|x|} \left(\log \frac{df}{d|x|} \right) = - \frac{n-1}{|x|} = \frac{d}{d|x|} \left(\log \frac{1}{|x|^{n-1}} \right)$$

che ha soluzioni

$$\begin{cases} f(|x|) = \frac{A}{|x|^{n-2}} + B & n \neq 2 \\ f(|x|) = C \log \frac{1}{|x|} + D & n = 2 \end{cases}$$

per qualunque scelta di costanti complesse A, B, C, D .

Consideriamo il caso $n \neq 2$. Sia $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. La formula di Green applicata alla coppia di funzioni φ e $\frac{1}{|x|^{n-2}}$ nel volume esterno alla sfera in $\mathbb{R}^n$, di raggio $r > 0$, centrata nell'origine, dà

$$\int_{|x|>r} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx = -\frac{1}{r^{n-2}} \int_{|x|=r} \frac{\partial \varphi}{\partial |x|}(y) dS(y) - \frac{n-2}{r^{n-1}} \int_{|x|=r} \varphi(y) dS(y) \quad (5.3)$$

Poiché la funzione φ è limitata e ha derivate parziali limitate

$$\begin{aligned} \int_{|x|=r} \frac{\partial \varphi}{\partial |x|}(y) dS(y) &< \sup_{|x|=r} \left| \frac{\partial \varphi}{\partial |x|} \right| S^{(n)}(r) \quad e \\ \int_{|x|=r} |\varphi(y) - \varphi(0)| dS(y) &< \sup_{|x|=r} |\varphi(x) - \varphi(0)| S^{(n)}(r) \end{aligned}$$

con $S^n(r) = r^{n-1} S^n(1)$ (vedi Cap. 3) superficie della sfera di raggio r in $\mathbb{R}^n$.

In particolare

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{n-2}} \int_{|x|=r} \frac{\partial \varphi}{\partial |x|}(y) dS(y) &= 0 \\ \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^{n-1}} \int_{|x|=r} (\varphi(y) - \varphi(0)) dS(y) &= 0 \end{aligned}$$

poiché $\sup_{|y|=r} |\varphi(y) - \varphi(0)|$ tende a 0 quando $r \rightarrow 0$.

Dall'eguaglianza (5.3) si ricava quindi

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{|x| > r} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx = -(n-2)S^n(1)\varphi(0)$$

La funzione $\frac{1}{|x|^{n-2}}$ è localmente sommabile e definisce quindi una distribuzione $T_{\frac{1}{|x|^{n-2}}}$. Il risultato precedente implica che

$$\langle \Delta T_{\frac{1}{|x|^{n-2}}}, \varphi \rangle \equiv \left\langle \frac{1}{|x|^{n-2}}, \Delta \varphi \right\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{|x|^{n-2}} \Delta \varphi(x) dx = -(n-2)S^n(1)\varphi(0)$$

che è il risultato che volevamo dimostrare per $n \neq 2$. Il risultato per $n = 2$ si dimostra in maniera identica.

5.4 La trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'$

Definizioni e proprietà delle distribuzioni temperate non risultano essere essenzialmente diverse da quelle che abbiamo visto per le distribuzioni. Una importante differenza è costituita dal fatto che non tutte le funzioni localmente sommabili definiscono una distribuzione temperata.

Infatti perché una funzione f definisca una distribuzione temperata è necessario che il funzionale $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx$ sia finito per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ e sia continuo in $\mathcal{S}$. Se φ è una funzione a decrescenza rapida il prodotto $f \varphi$ non necessariamente decresce all'infinito per ogni f localmente sommabile e, in particolare, non necessariamente è integrabile. Come esempio si può considerare il caso $\varphi = e^{-|x|^2} \in \mathcal{S}$ e $f = e^{|x|^2}$ che è localmente sommabile; il loro prodotto $f\varphi = 1$ non risulta integrabile.

È facile convincersi che una funzione localmente sommabile definisce una distribuzione temperata se cresce all'infinito al più polinomialmente, se esiste cioè un m tale che $|f(x)| < C(1 + |x|)^m$. In questo senso le distribuzioni temperate $T \in \mathcal{S}'$ sono una generalizzazione delle funzioni da $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{C}$ localmente sommabili che crescono al più polinomialmente.

Per motivi analoghi non è definito il prodotto di una distribuzione temperata per una qualunque funzione $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Infatti perché la definizione $\langle \alpha T, \varphi \rangle \equiv \langle T, \alpha \varphi \rangle$ abbia un senso è necessario che l'applicazione che a $\varphi \in \mathcal{S}$

associa la funzione $\alpha\varphi$ trasformi in maniera continua lo spazio di funzioni test $\mathcal{S}$ in se stesso. Per questo la infinita differenziabilità di α è condizione necessaria, ma non sufficiente. La funzione α dovrà anche crescere al più polinomialmente all'infinito perché $\alpha\varphi$ appartenga a $\mathcal{S}$.

Come avevamo già notato $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Le considerazioni precedenti confermano che l'inclusione è stretta, poiché, per esempio, le funzioni localmente sommabili, che crescono più che polinomialmente, appartengono a $\mathcal{D}'$ ma non a $\mathcal{S}'$. Si dimostra però che tutte le distribuzioni a supporto compatto (lo spazio $\mathcal{E}'$ definito alla fine della sezione 5.2) appartengono a $\mathcal{S}'$. In effetti abbiamo asserito, senza dimostrarlo, che $\mathcal{E}'$ è il duale topologico dello spazio $\mathcal{E}$ delle funzioni infinitamente differenziabili, con la topologia indotta dalla convergenza uniforme su ogni compatto. Poiché, come è immediato verificare, $\mathcal{S}$ è incluso in maniera continua in $\mathcal{E}$ ne discende che $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}'$ ¹. Il risultato può comunque essere provato in maniera diretta mostrando che per ogni distribuzione T a supporto compatto e per ogni successione $\varphi^{(n)}$ di funzioni in $\mathcal{S}$, convergente in $\mathcal{S}$, esiste una successione di funzioni $\psi^{(n)}$ convergente in $\mathcal{D}$ tale che $\psi^{(n)} = \varphi^{(n)}$ in ogni punto del supporto di T .

Esercizio 6 *Provare che ogni distribuzione a supporto compatto è una distribuzione temperata*

Vogliamo generalizzare alle distribuzioni temperate la definizione di trasformata di Fourier per funzioni integrabili (che sono certamente incluse nelle distribuzioni temperate). Come abbiamo fatto per le altre operazioni lineari sulle funzioni la definizione dell'operazione sulle distribuzioni verrà data “per dualità”.

Definiremo **trasformata di Fourier della distribuzione temperata** $\mathbf{T}$ la distribuzione temperata $\hat{T}$

$$\langle \hat{T}, \varphi \rangle \equiv \langle T, \hat{\varphi} \rangle \quad (5.4)$$

La (5.4) definisce una distribuzione temperata poiché l'applicazione $\varphi \rightarrow \hat{\varphi}$ è continua da $\mathcal{S}$ in se stesso (in effetti su se stesso). Nel Cap.3 abbiamo dimostrato alcune proprietà delle trasformate di Fourier di funzioni infinitamente differenziabili a decrescenza rapida che qui riportiamo:

¹In definitiva si ha la catena di inclusioni $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ e anche $\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$

data una funzione $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}(k) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i k \cdot x} dx \in \mathcal{S} \\ \varphi(x) &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int \hat{\varphi}(k) e^{i k \cdot x} dk \\ (D^\alpha \hat{\varphi})(k) &= (-i)^{|\alpha|} (\widehat{x^\alpha \varphi})(k) \\ \widehat{D^\alpha \varphi}(k) &= (i)^{|\alpha|} k^\alpha \hat{\varphi}(k)\end{aligned}$$

$$\text{con } \alpha_i \geq 0, \quad \underline{\alpha} = \alpha_1, \dots, \alpha_n, \quad |\underline{\alpha}| = \sum_i \alpha_i, \quad x^\alpha = \prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}, \quad D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$$

D'altra parte, abbiamo mostrato che la trasformata di Fourier di una funzione a supporto compatto non ha mai supporto compatto. In particolare quindi ogni funzione di $\mathcal{D}$ ha una trasformata di Fourier che certamente non sta in $\mathcal{D}$. È quindi impossibile definire la trasformata di Fourier in $\mathcal{D}'$. La principale ragione dell'introduzione delle distribuzioni temperate è appunto quella che, per tali distribuzioni, è possibile definire la trasformata di Fourier, fornendo un strumento tecnico di grande importanza nello studio delle soluzioni deboli di equazioni differenziali alle derivate parziali, come vedremo più avanti.

Esempio La trasformata di Fourier della distribuzione δ_0 è la funzione costante $f(x) = 1/(2\pi)^{n/2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$; più in generale la trasformata di Fourier della distribuzione δ_y con $y \in \mathbb{R}^n$ è la funzione $g(x) = e^{-ix \cdot y}/(2\pi)^{n/2}$. Infatti

$$\langle \hat{\delta}_y, \varphi \rangle \equiv \langle \delta_y, \hat{\varphi} \rangle = \hat{\varphi}(y) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-ix \cdot y} dx = \langle T_g, \varphi \rangle$$

Esempio La trasformata di Fourier della funzione costante $f(x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$ è la distribuzione $(2\pi)^{n/2} \delta_0$. Infatti

$$\langle \hat{T}_f, \varphi \rangle \equiv \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k) dk = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(k) e^{ikx} \Big|_{x=0} dk = (2\pi)^{n/2} \varphi(0) = \langle (2\pi)^{n/2} \delta_0, \varphi \rangle$$

Gaussiana con varianza immaginaria Sia $f(x) = e^{it|x|^2}$. Essendo f limitata su tutto $\mathbb{R}^n$ definisce una distribuzione temperata T_f :

$$\langle T_f, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \varphi(x) dx \quad \varphi \in \mathcal{S}$$

Poiché sappiamo che per $\sigma \in \mathbb{R}^+$

$$\widehat{e^{-|x|^2/(2\sigma)}} = \sigma^{n/2} e^{-|k|^2\sigma/2}$$

possiamo prevedere che la trasformata di Fourier della distribuzione T_f sia data da T_g , con g ottenuta ponendo nella relazione precedente $\sigma = -\frac{1}{i2t}$.

In effetti, dalla formula di Parseval, per $s > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-s|x|^2/2} \hat{\varphi}(x) dx = s^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/(2s)} \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}.$$

La funzione $F(z) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-z|x|^2/2} \hat{\varphi}(x) dx$ e la funzione $G(z) = z^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2/(2z)} \varphi(x) dx$ sono analitiche per $\operatorname{Re} z > 0$ e coincidono sull'asse reale (positivo). (Notare che gli integrali convergono per $\operatorname{Re} z > 0 \Rightarrow \operatorname{Re} \frac{1}{2z} > 0$).

$F(z)$ e $G(z)$ coincidono quindi su tutto il dominio di analiticità $\operatorname{Re} z > 0$ poiché in tale semipiano $(F(z) - G(z))$ è analitica, è nulla sull'asse reale ed è quindi nulla in tutto il dominio di analiticità.

Per il teorema di dominata convergenza esistono e sono uguali i limiti di $F(z)$ e $G(z)$ quando $z \rightarrow i2t$, con t reale $\neq 0$.

Per $\operatorname{Re} z > 0$ $z^{-n/2} = \frac{1}{|z|^{n/2}} e^{-i \arg z n/2}$, con $\pi/2 > \arg z > -\pi/2$

Prendendo il limite $z \rightarrow -2it$ quindi

$$\arg z \rightarrow -\pi/2 \quad \text{per } t > 0$$

$$\arg z \rightarrow \pi/2 \quad \text{per } t < 0$$

$$\Rightarrow \hat{T}_f = T_g, \text{ con } g = \left(\frac{1}{-i2t} \right)^{n/2} e^{-i|x|^2/(4t)}$$

$$\text{con } (-it)^{n/2} = \begin{cases} |t|^{n/2} e^{i\frac{\pi}{4}n} & t > 0 \\ |t|^{n/2} e^{-i\frac{\pi}{4}n} & t < 0 \end{cases}$$

Esercizio 7 La funzione di Heaviside $H(x)$ è limitata quindi definisce una distribuzione temperata. $H(x)$ non è integrabile quindi la sua trasformata di Fourier non è definita nel senso delle funzioni. Provare che

$$\hat{H}(x) = -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{x - i\epsilon} \quad (5.5)$$

Suggerimento $\langle \hat{T}_H, \varphi \rangle \equiv \langle T_H, \hat{\varphi} \rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^\infty e^{-\epsilon k} \hat{\varphi}(k) dk \dots$

Dalla definizione e dalle proprietà della trasformata di Fourier per le funzioni in $\mathcal{S}$ discendono le proprietà della trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'$ affermate nel teorema

Teorema 4 *La trasformata di Fourier è un isomorfismo in $\mathcal{S}'$. Valgono le proprietà*

- Per ogni funzione $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ (quindi localmente sommabile e che non cresce più che polinomialmente)

$$\hat{T}_f = T_{\hat{f}}$$

e la trasformata di Fourier di distribuzioni temperate è quindi compatibile con l'immersione di $L^1(\mathbb{R}^n)$ in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$.

- Esiste un'inversa in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ della trasformazione di Fourier ed è il duale dell'inversa in $\mathcal{S}$

$$\check{T} = T \quad \text{con} \quad \langle \check{V}, \varphi \rangle \equiv \langle V, \check{\varphi} \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S} \quad V \in \mathcal{S}'$$

- Valgono le proprietà

$$\begin{aligned} D^\alpha \hat{T} &= (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha T} \\ \widehat{D^\alpha T} &= (i)^{|\alpha|} k^\alpha \hat{T} \end{aligned}$$

Dimostrazione Se $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ e $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ allora la funzione $f(x)\varphi(\xi)$ è certamente integrabile in $\mathbb{R}^{2n}$ e vale la successione di uguaglianze

$$\begin{aligned} \langle \hat{T}_f, \varphi \rangle &\equiv \langle T_f, \hat{\varphi} \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi \cdot x} \varphi(\xi) d\xi \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(\xi) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-i\xi \cdot x} dx \right) d\xi = \langle T_{\hat{f}}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il teorema di Fubini per lo scambio dell'ordine di integrazione.

Le altre proprietà affermate nel teorema sono una semplice conseguenza della definizione di trasformata di Fourier in $\mathcal{S}'$ e delle equivalenti proprietà della trasformata di Fourier di funzioni in $\mathcal{S}$ e la loro verifica è lasciata al lettore.

5.5 La convoluzione tra distribuzioni

Se f e g sono funzioni in $L^1(\mathbb{R}^n)$ la loro convoluzione è ben definita e, come abbiamo visto nel Cap. 3, appartiene a $L^1(\mathbb{R}^n)$. Le funzioni f , g , e $f * g$ definiscono dunque tre distribuzioni temperate e per ogni funzione test φ in $\mathcal{S}$ (a maggior ragione per $\varphi \in \mathcal{D}$) vale la

$$\langle T_{f*g}, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(\xi) g(y) \varphi(\xi+y) d\xi dy \quad (5.6)$$

cioè appare come il valore che la distribuzione associata alla funzione localmente sommabile in $\mathbb{R}^{2n}$ $f(\xi) g(y)$ assume sulla particolare funzione test in $\mathbb{R}^{2n}$ che si ottiene prendendo una funzione test in $\mathbb{R}^n$ e calcolandola in $\xi + y$. L'eguaglianza appena scritta sarà la guida per la definizione di convoluzione per distribuzioni in $\mathcal{D}'$ e in $\mathcal{S}'$. Problemi verranno dalla circostanza che se $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ (rispettivamente $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$) non si verifica mai che $\varphi(x+y)$ appartenga a $\mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ (rispettivamente a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$). La definizione sarà quindi ristretta a distribuzioni con particolari proprietà di supporto.

Con la notazione

$$x \in \mathbb{R}^m \times y \in \mathbb{R}^n \rightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^{m+n}$$

il prodotto tensoriale tra due funzioni $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ è definito come la funzione

$$f \otimes g : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{C} \quad (f \otimes g)(x, y) \equiv f(x) g(y)$$

Se $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{C}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$ sono localmente integrabili e $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{m+n})$

$$\varphi = \varphi(x, y) \quad x \in \mathbb{R}^m, \quad y \in \mathbb{R}^n$$

allora $\text{supp } |f(x) g(y) \varphi(x, y)| \subset \text{supp } \varphi(x, y)$ e $f(x) g(y) \varphi(x, y)$ è integrabile in $\mathbb{R}^{m+n}$.

Per il teorema di Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{m+n}} f(x) g(y) \varphi(x, y) dx dy &= \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \varphi(x, y) dy \right\} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \left\{ \int_{\mathbb{R}^m} f(x) \varphi(x, y) dx \right\} dy \end{aligned}$$

Il seguente teorema, che non dimostreremo, permette di generalizzare alle distribuzioni la definizione di prodotto tensoriale

Teorema 5 *se T è una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ (risp. in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^m)$) e V è una distribuzione in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (risp. in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) allora esiste una sola distribuzione $W \equiv T \otimes V$ in $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^{m+n})$ tale che per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^m)$ e $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ si abbia*

$$\langle T \otimes V, \varphi \otimes \psi \rangle = \langle T, \varphi \rangle \langle V, \psi \rangle$$

Esplicitando per ciascuna distribuzione la variabile su cui opera, per ogni funzione test $\xi = \xi(x, y)$ in $\mathbb{R}^{n+m}$ si ha

- Il prodotto è commutativo

$$\langle W, \xi \rangle = \langle T_x \langle V_y, \xi \rangle \rangle = \langle V_y \langle T_x, \xi \rangle \rangle$$

- il prodotto tensoriale è associativo $(T_x \otimes V_y) \otimes R_z = T_x \otimes (V_y \otimes R_z) \equiv T_x \otimes V_y \otimes R_z$
- $D_x^\alpha(T \otimes V) = D_x^\alpha T \otimes V$
- $\alpha(x)(T \otimes V) = \alpha T \otimes V$
 $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ (risp. $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^m)$ a crescita al più polinomiale).

Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (risp. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) e $V \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ (risp. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$) la (5.6) suggerisce la definizione

$$\begin{aligned} \langle T * V, \varphi \rangle &= \langle T_x \otimes V_y, \varphi(x + y) \rangle \\ &= \langle T_x \langle V_y, \varphi(x + y) \rangle \rangle = \langle V_y \langle T_x, \varphi(x + y) \rangle \rangle \quad (5.7) \\ &\quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \quad (\text{risp. } \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)) \end{aligned}$$

Come abbiamo già fatto notare si verifica che entrambe le affermazioni

- $\varphi(x + y)$ ha supporto limitato in $\mathbb{R}^{2n}$, se φ ha supporto limitato in $\mathbb{R}^n$
- $\varphi(x + y) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{2n})$ se $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$

sono false. Se, ad esempio, $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ha supporto compatto $K \subset \mathbb{R}^n$ il supporto della funzione $\varphi(x + y)$ in $\mathbb{R}^{2n}$ è l'insieme che si ottiene traslando K lungo la “diagonale secondaria” $x + y = 0$, che non è mai compatto. In altre parole $x + y$ può rimanere in un insieme limitato, malgrado sia x che y vadano all'infinito. Daremo, nel seguito, solo condizioni sufficienti perché la convoluzione esista in $\mathcal{D}'$ (risp. in $\mathcal{S}'$) individuando casi speciali in cui la (5.7) definisce correttamente una distribuzione.

Definizione Due distribuzioni T e V in $\mathcal{D}'$ si definiscono soddisfare la **condizione del supporto** se per ogni compatto $K \in \mathbb{R}^n$ l'insieme (chiuso)

$$K_{T,V} \equiv \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : x \in \text{supp} T, \ y \in \text{supp} V, \ x + y \in K\}$$

risulta compatto in $\mathbb{R}^{2n}$.

È chiaro che la condizione del supporto costituisce una condizione sufficiente perché la (5.7) sia una definizione ben data in $\mathcal{D}'$: siano infatti T e V due distribuzioni che soddisfano la condizione del supporto, per ogni $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ sia $K_{T,V}^\varphi$ l'insieme compatto definito precedentemente e relativo a $K = \text{supp} \varphi$. Sia $\psi(x, y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ una funzione infinitamente differenziabile a supporto compatto con $\psi(x, y) = 1 \ \forall (x, y) \in K_{T,V}^\varphi$ (abbiamo visto nel Cap.3 che una tale funzione esiste e ne abbiamo dato una espressione esplicita). Valgono allora le due proprietà

- $\psi(x, y) \varphi(x + y) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$
- $\langle T_x \otimes V_y, \psi(x, y) \varphi(x + y) \rangle$ non può differire da $\langle T_x \otimes V_y, \varphi(x + y) \rangle$ poiché ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^{2n} \setminus K_{T,V}^\varphi$ è esterno a $(\text{supp} T \times \text{supp} V) \cap \{(x, y) : (x + y) \in \text{supp} \varphi\}$

Intesa come applicata alla funzione $\psi(x, y) \varphi(x + y)$ la (5.7) definisce quindi un funzionale lineare su $\mathcal{D}$ se T e V soddisfano la condizione del supporto. È facile verificare che il funzionale è continuo.

Se una delle distribuzioni ha supporto compatto la condizione del supporto è certamente valida: è vero infatti che se x (risp. y) appartiene ad un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$ e anche $x + y$ appartiene ad un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$ allora y (risp. x) appartiene ad un insieme limitato di $\mathbb{R}^n$ e, di conseguenza (x, y) appartiene ad un insieme limitato di $\mathbb{R}^{2n}$. Limitandoci al caso in cui una delle distribuzioni sia a supporto compatto, partendo dalla definizione (5.7) si dimostrano facilmente i teoremi:

Teorema 6 : Sia $T \in \mathcal{D}'$ e sia $V \in \mathcal{D}'$ a supporto compatto. Sia $\varphi \in \mathcal{D}$, allora

$$\langle T * V, \varphi \rangle \equiv \langle T_x \otimes V_y, \varphi(x + y) \rangle$$

($\equiv \langle T_x \otimes V_y, \alpha(y) \varphi(x + y) \rangle$ con $\alpha \in \mathcal{D}$, $\text{supp} \alpha \supset \text{supp} V$, $\alpha(y) = 1$, $y \in \text{supp} V$) definisce in maniera unica una distribuzione in $\mathcal{D}'$.

Valgono le proprietà

- a) $T * V = V * T$
- b) $D^\alpha(T * V) = D^\alpha T * V = T * D^\alpha V$
- c) $\forall T \in \mathcal{D}'$ si ha $\delta_0 * T = T * \delta_0 = T$

Vale inoltre che

- d) se $\psi \in \mathcal{D}$ e $V \in \mathcal{D}'$ allora $T_\psi * V$ esiste ed è uguale a $T_{V*\psi}$
- e) se $V \in \mathcal{D}'$ ha supporto compatto e f è una funzione infinitamente differenziabile, allora la convoluzione $V * T_f$ esiste ed è una funzione infinitamente differenziabile. Si ha $V * T_f = T_{V*f}$

Dimostrazione Essendo in tutti i casi una delle distribuzioni a supporto compatto la proprietà del supporto è sempre soddisfatta, in qualunque ordine la convoluzione venga definita.

La commutatività del prodotto tensoriale nella definizione (5.7) implica la commutatività della convoluzione (proprietà a)).

La proprietà b) è una conseguenza della definizione di derivata D^α di una distribuzione e del fatto che $D_x^\alpha \varphi(x+y) = D_y^\alpha \varphi(x+y)$. Infatti

$$\begin{aligned}
 \langle D^\alpha(T * V), \varphi \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle (T * V), D^\alpha \varphi \rangle \\
 &= (-1)^{|\alpha|} \langle (T \otimes V)(x, y), D^\alpha \varphi(x+y) \rangle \\
 &= (-1)^{|\alpha|} \langle T_x \langle V_y, D_y^\alpha \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
 &= (-1)^{|\alpha|} \langle T_x, \langle (D^\alpha V)(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle \\
 &= \langle (T * D^\alpha V)(x, y), \varphi(x+y) \rangle = \langle T * D^\alpha V, \varphi \rangle
 \end{aligned}$$

La proprietà c) è una conseguenza immediata della definizione

$$\langle \delta_0 * T, \varphi \rangle = \langle (\delta_0 \otimes T)(x, y), \varphi(x+y) \rangle = \langle T_y \langle \delta_0(x), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle T, \varphi \rangle$$

La prova delle proprietà d) e e) è lasciata come esercizio.

Analoghi risultati per le distribuzioni temperate sono raccolti nel seguente:

Teorema 7 :

- a) Sia $T \in \mathcal{S}'$ e sia $\xi \in \mathcal{S}$. Allora $\langle (T * \xi), \varphi \rangle \equiv \langle T, \xi^- * \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$,
con $\xi^-(x) \equiv \xi(-x)$, definisce la distribuzione temperata $T * \xi$ la cui
trasformata di Fourier soddisfa

$$\widehat{T * \xi} = (2\pi)^{n/2} \hat{\xi} \cdot \hat{T}$$

- b) Sia $T \in \mathcal{S}'$ e sia $V \in \mathcal{S}'$ a supporto compatto. Allora $T * V$ è una
distribuzione temperata che soddisfa le proprietà

$$D^\alpha(T * V) = D^\alpha T * V = T * D^\alpha V$$

$$\widehat{T * V} = (2\pi)^{n/2} \hat{T} \cdot \hat{V}$$

Dimostrazione Sappiamo che la convoluzione di due funzioni in $\mathcal{S}$ appartiene ancora a $\mathcal{S}$. In più l'applicazione che a $\varphi \in \mathcal{S}$ associa $\xi^- * \varphi$ è continua in $\mathcal{S}$. La relazione $\langle (T * \xi), \varphi \rangle \equiv \langle T, \xi^- * \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{S}$ definisce quindi una distribuzione temperata e si ha

$$\begin{aligned} \langle \widehat{(T * \xi)}, \varphi \rangle &= \langle (T * \xi), \hat{\varphi} \rangle \\ &= \langle T, \xi^- * \hat{\varphi} \rangle = \langle \hat{T}, \widehat{\xi^- * \hat{\varphi}} \rangle \\ &= (2\pi)^{n/2} \langle \hat{T}, \widetilde{\xi^-} \cdot \check{\hat{\varphi}} \rangle = (2\pi)^{n/2} \langle \hat{T}, \hat{\xi} \cdot \varphi \rangle \\ &= (2\pi)^{n/2} \langle \hat{\xi} \hat{T}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

che prova la a).

Non daremo qui la prova di b) che si basa sul fatto che la trasformata di Fourier di una distribuzione a supporto compatto (quindi temperata) è una funzione infinitamente differenziabile le cui derivate hanno crescita al più polinomiale.

5.6 Applicazioni

In quest'ultimo paragrafo mostreremo alcuni esempi di applicazione della teoria delle distribuzioni all'analisi qualitativa e quantitativa delle soluzioni di equazioni differenziali a coefficienti costanti di interesse nella Fisica Teorica. Trattandosi di un corso introduttivo rinunceremo a una trattazione rigorosa e generale. Ci limiteremo a trattare casi specifici: l'equazione di Poisson,

l'equazione di Helmholtz, l'equazione di Schrödinger e l'equazione delle onde. Inizialmente i problemi verranno solo analizzati in tutto $\mathbb{R}^n$. Particolari problemi con "condizioni al bordo" su domini limitati di $\mathbb{R}^n$ saranno analizzati sinteticamente alla fine del paragrafo. Il caso $n = 1$, cioè il caso di equazioni differenziali ordinarie per funzioni della variabile reale $t \geq 0$, con condizioni assegnate in $t = 0$, viene risolto sfruttando le proprietà della convoluzione per distribuzioni sulla retta reale positiva, dando luogo al cosiddetto calcolo simbolico. Non tratteremo il calcolo simbolico che verrà sintetizzato in un'appendice alla fine del capitolo.

Ancora ricorrendo alla notazione multiindice $\underline{\alpha}$, sia $P(x)$ un polinomio di grado m nelle n variabili $(x_1, \dots, x_n) = x \in \mathbb{R}^n$ a coefficienti complessi $c_{\underline{\alpha}}$

$$P(x) = \sum_{|\underline{\alpha}| \leq m} c_{\underline{\alpha}} x^{\underline{\alpha}}.$$

Sia $P(D)$ l'operatore differenziale, a coefficienti costanti, che si ottiene sostituendo $x^{\underline{\alpha}}$ nel polinomio con l'operatore di derivazione $D^{\underline{\alpha}}$:

$$P(D) = \sum_{|\underline{\alpha}| \leq m} c_{\underline{\alpha}} D^{\underline{\alpha}}.$$

Come abbiamo già notato (paragrafo (5.3)), $P(D)$ trasforma in maniera continua $\mathcal{D}$ (risp. $\mathcal{S}$) in $\mathcal{D}$ (risp. $\mathcal{S}$) e per dualità trasforma $\mathcal{D}'$ (risp. $\mathcal{S}'$) in $\mathcal{D}'$ (risp. $\mathcal{S}'$).

Sia $V \in \mathcal{D}'$ rispettivamente $V \in \mathcal{S}'$. Se esiste una distribuzione T (risp. una distribuzione temperata) che soddisfa l'uguaglianza $P(D)T = V$ ovvero se $\forall \varphi \in \mathcal{D}$ (rispettivamente $\in \mathcal{S}$)

$$\langle P(D)T, \varphi \rangle = \sum_{|\underline{\alpha}| \leq m} (-1)^{|\underline{\alpha}|} \langle T, D^{\underline{\alpha}} \varphi \rangle = \langle V, \varphi \rangle \quad (5.8)$$

allora T si dirà una **soluzione debole** (risp. **debole temperata**) della equazione differenziale.

Un'importante branca della teoria analizza il problema della regolarità delle soluzioni deboli (5.8). Si tratta cioè di stabilire quali operatori differenziali siano tali che ogni soluzione debole della (5.8), con V sufficientemente regolare, sia anche una **soluzione forte**: con questo si intende che la soluzione abbia derivate continue fino all'ordine m e che l'uguaglianza sia verificata come uguaglianza puntuale di funzioni continue. Queste note non esploreranno questo problema.

Una distribuzione (risp. una distribuzione temperata) F si dirà una **soluzione fondamentale** relativa all'operatore differenziale $P(D)$ se soddisfa, nel senso dell'eguaglianza di distribuzioni,

$$P(D) F = \delta_0$$

Dimostreremo solo la parte più elementare del seguente teorema sulle soluzioni deboli (quindi in $\mathcal{D}'$)

Teorema 8 *Per ogni $P(D)$ della forma indicata precedentemente esiste almeno una soluzione fondamentale in $\mathcal{D}'$.*

L'equazione differenziale $P(D)T = V$ ammette almeno una soluzione in $\mathcal{D}'$ per tutte le distribuzioni V che soddisfano la proprietà del supporto con una soluzione fondamentale F relativa a $P(D)$. In tal caso la soluzione ha la forma

$$T = F * V$$

In particolare la soluzione esiste sempre se il supporto di V è limitato.

Dimostrazione Non dimostreremo la prima parte del teorema riguardante l'esistenza di almeno una soluzione fondamentale. Sia F una tale soluzione. Poiché la coppia (F, V) soddisfa la proprietà del supporto, la convoluzione tra le due distribuzioni è ben definita e

$$P(D)(F * V) = (P(D)F) * V = \delta_0 * V = V$$

come asserito nella seconda parte del teorema.

Per quanto riguarda le soluzioni deboli temperate, la forma dell'equazione suggerisce l'uso della trasformata di Fourier. Formalmente

$$P(D)T = \delta_0 \implies P(\imath k)\hat{T} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \quad (5.9)$$

La (5.9) sembra indicare che la soluzione fondamentale possa essere l'anti-trasformata dell'inverso del polinomio $(2\pi)^{n/2} P(\imath k)$. L'intuizione è certamente fruttuosa se il polinomio non ha zeri in $\mathbb{R}^n$ mentre deve essere ulteriormente elaborata se l'equazione $P(\imath k)\hat{T} = 0$ ha soluzioni in $\mathcal{S}'$ e/o se l'inverso del polinomio non definisce una distribuzione temperata.

Riportiamo, senza prova, un teorema generale di esistenza, per poi procedere a esempi specifici di utilizzo della trasformata di Fourier di distribuzioni per il calcolo delle soluzioni fondamentali di alcune equazioni differenziali alle derivate parziali a coefficienti costanti.

Teorema 9 *Sia P un polinomio in n variabili a coefficienti complessi e sia $V \in \mathcal{S}'$. Allora*

- *esiste almeno una distribuzione temperata T che soddisfa la relazione $P \cdot T = V$.*
- *La soluzione è unica se il polinomio P non ha zeri reali.*
- *L'operatore differenziale $P(D)$ ha almeno una soluzione fondamentale $F \in \mathcal{S}'$.*
- *Se $P(\imath k)$ non ha zeri reali la soluzione fondamentale è unica.*
- *Se $V \in \mathcal{S}'$ allora esiste almeno una distribuzione temperata T tale che $P(D)T = V$ e ha la forma $T = F * V$*

Negli esempi che seguono utilizzeremo la trasformata di Fourier e la convoluzione di distribuzioni temperate per il calcolo delle soluzioni fondamentali di alcune equazioni differenziali alle derivate parziali rilevanti per la Fisica teorica e applicata

Equazione di Poisson Abbiamo già mostrato (vedi l'esercizio 5) che

$$\Delta \left(-\frac{1}{(n-2) S^{(n)}(1) |x|^{n-2}} \right) = \delta_0$$

per $n \neq 2$ e

$$\Delta \left(-\frac{1}{2\pi} \log \frac{1}{|x|} \right) = \delta_0$$

per $n = 2$.

Conosciamo quindi soluzioni fondamentali del Laplaciano in ogni dimensione. Altre soluzioni fondamentali in $\mathcal{D}'$ si ottengono sommando, a quelle date sopra, soluzioni della equazione omogenea $\Delta f = 0$ (funzioni armoniche) che sono tutte localmente sommabili e quindi definiscono una distribuzione. Allo stesso modo si possono trovare soluzioni fondamentali temperate aggiungendo

a quelle date sopra funzioni armoniche che siano a crescita al più polinomiale. La specificazione è necessaria perché esistono funzioni armoniche, localmente sommabili, ma la cui crescita non è polinomiale: per $n = 2$, ad esempio, la funzione $e^{x_1} \cos x_2$ è armonica ma cresce nella direzione 1 più rapidamente di qualunque polinomio.

Vediamo come ottenere il risultato utilizzando la trasformata di Fourier. L'equazione $\Delta F_L = \delta_0$ si legge, in trasformata di Fourier,

$$-(2\pi)^{n/2} |k|^2 \hat{F}_L = 1$$

La funzione $-\frac{1}{(2\pi)^{n/2} |k|^2}$ è una funzione localmente sommabile solo in dimensione $n \geq 3$. Non è quindi immediato ritrovare le soluzioni fondamentali già citate, servendosi della trasformata di Fourier, in dimensioni $n = 1$ e 2 . Per $n = 3$ si ha per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \langle F_L, \varphi \rangle &= \langle \hat{F}_L, \check{\varphi} \rangle = - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{(2\pi)^3 |k|^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{ik \cdot x} \varphi(x) dx \right) dk \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|k| \leq R} \frac{1}{(2\pi)^3 |k|^2} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{ik \cdot x} \varphi(x) dx \right) dk \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{|k| \leq R} \frac{e^{ik \cdot x}}{(2\pi)^3 |k|^2} dk \right) \varphi(x) dx \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_0^R 2\pi |k|^2 \left(\int_0^\pi \frac{e^{i|k||x| \cos \theta}}{(2\pi)^3 |k|^2} \sin \theta d\theta \right) d|k| \right) \varphi(x) dx \\ &= - \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_0^R \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\sin(|k||x|)}{|k||x|} \right) d|k| \right) \varphi(x) dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\varphi(x)}{4\pi|x|} dx = \langle T_{-\frac{1}{4\pi|x|}}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

dove si è utilizzato il teorema di Fubini per lo scambio dell'ordine di integrazione e il fatto che $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin y}{y} dy = \pi$. Abbiamo quindi ritrovato il risultato ottenuto precedentemente per $n = 3$.

Conoscendo la soluzione fondamentale siamo ora in grado di esplicitare le soluzioni del problema con sorgenti (equazione di Poisson). Limitandoci al caso di una distribuzione di sorgenti a supporto compatto (che certamente soddisfa la proprietà del supporto assieme alla soluzione fondamentale) si ha:

Teorema 10 *Se $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ è a supporto compatto allora una soluzione dell'equazione di Poisson*

$$\Delta V = T$$

*è la distribuzione $F_L * T$.*

Il teorema generalizza l'equazione di Poisson (e la formula per il potenziale di una carica distribuita in maniera continua in una regione limitata) a sorgenti di campo che sono definite solo come distribuzioni (cariche puntiformi, distribuzioni di carica o di dipoli su una superficie etc.).

In particolare per $n = 3$ e $T = T_\rho$, con ρ distribuzione continua di sorgenti in una regione limitata, troviamo la formula classica del potenziale coulombiano

$$V(x) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(y)}{4\pi|x-y|} dy$$

Equazione di Helmholtz L'equazione di Helmholtz per la soluzione fondamentale $\Delta F_H - \lambda F_H = \delta_0$ in trasformata di Fourier risulta $(-|k|^2 - \lambda)\hat{F}_H = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}$. Per λ reale positivo il polinomio $\sum_{i=1}^n k_i^2 + \lambda$ non ha zeri reali. L'unica soluzione temperata si ottiene allora come antitrasformata della funzione localmente sommabile (per ogni n) $-\frac{(2\pi)^{n/2}}{|k|^2 + \lambda}$. Il calcolo risulta semplice per $n = 1$ e per $n = 3$. È lasciato come esercizio verificare che

$$\begin{aligned} F_H &= -\frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x|}}{2\sqrt{\lambda}} & n = 1 \\ F_H &= -\frac{1}{4\pi} \frac{e^{-\sqrt{\lambda}|x|}}{|x|} & n = 3 \end{aligned}$$

Equazione del calore La soluzione fondamentale dell'equazione del calore in n dimensioni spaziali e una temporale soddisfa l'equazione

$$\frac{\partial F_C}{\partial t} - \Delta F_C = \delta_0$$

che, in trasformata di Fourier, si legge

$$(\imath k_0 + \sum_{i=1}^n k_i^2)\hat{F}_C = 1/(2\pi)^{(n+1)/2}$$

Si tratta dunque di calcolare:

$$F_C(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{(n+1)}} \int_{\mathbb{R}^n} dk \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i k_0 t + i k \cdot x}}{i k_0 + |k|^2} dk_0 \right). \quad (5.10)$$

Per l'integrazione in k_0 si utilizza il metodo dei residui su un semicerchio di centro l'origine, contenuto nel semipiano $\text{Im} k_0 \geq 0$. Il lemma del cerchio grande e il teorema dei residui implicano che, per $t > 0$ si abbia

$$\frac{1}{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{i k_0 t}}{k_0 - i |k|^2} dk_0 = \frac{1}{i} 2\pi i \text{Res}_{k_0 = i |k|^2} \left(\frac{e^{i k_0 t}}{k_0 - i |k|^2} \right) = 2\pi e^{-t |k|^2}.$$

Da cui

$$F_C(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t |k|^2 + i k \cdot x} dk.$$

$F_C(t, x)$ risulta quindi l'antitrasformata in $\mathbb{R}^n$ della gaussiana $\frac{e^{-t |k|^2}}{(2\pi)^{n/2}}$. Nel

terzo capitolo abbiamo provato che $\hat{G}_\sigma(k) = \sigma^{n/2} e^{-|k|^2 \sigma/2}$ è la trasformata di Fourier di $G_\sigma(x) = e^{-|x|^2/2\sigma}$.

Prendendo $(2\sigma)^{-1} = t$ si ottiene dunque

$$F_C(t, x) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad t > 0. \quad (5.11)$$

Per $t < 0$, l'integrale, calcolato con il metodo dei residui, utilizzando un cerchio nel semipiano $\text{Im} k_0 < 0$, fornisce $F_C(t, x) = 0$. Si ha quindi in definitiva

$$F_C(t, x) = \frac{H(t)}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \quad (5.12)$$

con $H(t)$ funzione di Heaviside. L'equazione del calore descrive vari fenomeni di evoluzione indagati dalla Fisica Classica. In particolare l'evoluzione del campo di temperatura in un mezzo in cui il calore si propaga esclusivamente per conduzione o la densità di un soluto che diffonde in un solvente.

Nella maggioranza dei casi pratici i problemi di evoluzione si presentano nella maniera seguente: accertati i valori delle quantità fisiche rilevanti ad un tempo t_0 , prevedere la loro evoluzione per tempi successivi a t_0 .

All'interno del modello teorico, che vuole descrivere il processo di evoluzione, la possibilità predittiva si traduce nella ricerca di soluzioni del **problema di Cauchy** per le equazioni del modello.

Al quadro delineato precedentemente si aggiunge la necessità di formalizzare nel modello l'effetto dell'ambiente esterno al sistema in esame. Questo si traduce nell'aggiunta di termini di sorgente nell'equazione e in più o meno complicate **condizioni al bordo**, sulla frontiera della regione che contiene il sistema in esame, che le soluzioni delle equazioni devono soddisfare.

Analizziamo, nel caso dell'equazione del calore, il problema di Cauchy in tutto $\mathbb{R}^n$:

$$\frac{\partial}{\partial t} T - \Delta T = V \quad \text{con} \quad T(0, x) = T_0(x). \quad (5.13)$$

Per esemplificare, sia $T(x, t)$ la temperatura in un punto x , al tempo t , in un mezzo solido (assenza di moti convettivi). L'equazione del calore sintetizza le due leggi:

- il calore fluisce nella direzione e proporzionalmente al gradiente della temperatura (dalle parti più calde a quelle più fredde, quindi nel verso opposto a quello del gradiente);
- la temperatura in un punto cresce proporzionalmente alla $\text{div}(\nabla T) = \Delta T$, cioè al flusso di calore, per unità di volume, attorno a quel punto.

I coefficienti di proporzionalità, conducibilità termica e calore specifico, sono stati fissati ad un valore unitario.

La V nella (5.13) indica l'effetto di sorgenti esterne che immettono (o tolgono) calore in qualche punto del mezzo. A V è richiesto di essere una distribuzione di cui si possa fare la convoluzione con la soluzione fondamentale che abbiamo trovato.

Con un ragionamento di cui non giustificheremo il dettaglio, le condizioni iniziali possono essere inglobate nelle sorgenti: sia $T_{ex}(x, t)$ la funzione che si ottiene estendendo ai tempi $t < 0$ la soluzione $T(x, t)$ ponendo il suo valore, per tempi negativi, a 0:

$$T_{ex}(x, t) = \begin{cases} T(x, t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

La distribuzione $T_{ex}(x, t)$, definita dalle due funzioni regolari $T(x, t)$ e 0, rispettivamente in $\Omega_+ = \{(x, t) \mid t \geq 0\}$ e $\Omega_- = \{(x, t) \mid t < 0\}$, soddisfa

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} T_{ex} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} T_{ex} \right\} \quad \forall i = 1, \dots, n \quad \frac{\partial}{\partial t} T_{ex} = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} T_{ex} \right\} + T_0 \delta_0 \quad (5.14)$$

dove abbiamo scelto la normale all'ipersuperficie $t = 0$ con il verso dei t crescenti, da cui $\frac{\partial}{\partial \hat{n}} = \frac{\partial}{\partial t}$.

L'equazione del calore per la distribuzione T_{ex} diventa

$$\frac{\partial}{\partial t} T_{ex} - \Delta T_{ex} = V_{ex} + T_0 \delta_0^{(t)}$$

(con V_{ex} “estensione” della distribuzione delle sorgenti a $t < 0$ con la distribuzione nulla).

La conoscenza della soluzione fondamentale (unica in questo caso) ci permette quindi di dare un'espressione esplicita dell'unica soluzione del problema di Cauchy per l'equazione del calore:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= F_C * (V_{ex} + T_0 \delta_0^{(t)}) = F_C * V_{ex} + \delta_0^{(t)} * \int_{\mathbb{R}^n} F_C(t, x - y) T_0(y) dy \\ &= F_C * V_{ex} + \int_{\mathbb{R}^n} F_C(t, x - y) T_0(y) dy. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Nel caso in cui le sorgenti siano descritte da una funzione continua $\rho(x, t)$:

$$T(x, t) = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} F_C(t - s, x - y) \rho(y, s) dt dx$$

Esercizio 8 *Dare l'espressione della soluzione dell'equazione del calore senza sorgenti: sulla semiretta reale positiva, con le condizioni iniziali e al bordo seguenti*

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} T(t, x) + \Delta T(t, x) &= 0 & T(0, x) &= T_0(x) & x &\in [0, \infty) \\ \left\{ \begin{array}{l} T(t, 0) = 0 \quad \forall t \\ \text{oppure} \\ \frac{\partial}{\partial x} T(t, 0) = 0 \quad \forall t \end{array} \right. \end{aligned}$$

Suggerimento: estendere le condizioni iniziali a tutta la retta reale come funzioni pari o dispari a seconda delle condizioni in 0. Risolvere il problema su tutta la retta reale, verificando che le condizioni nell'origine rimangano verificate a tutti i tempi t .

Come ultimo caso affronteremo lo studio delle soluzioni del problema di Cauchy per l'equazione del calore, in un intervallo della retta reale, per condizioni al bordo omogenee.

Per $x \in [0, L]$ consideriamo il problema di Cauchy

$$\frac{\partial}{\partial t} T = \Delta T \quad T(0, x) = T_0(x) \quad x \in [0, L]$$

con

$$\left\{ \begin{array}{l} T(t, 0) = T(t, L) = 0 \quad \forall t \\ \text{oppure} \\ \frac{\partial}{\partial x} T(t, 0) = \frac{\partial}{\partial x} T(t, L) = 0 \quad \forall t \end{array} \right.$$

tradizionalmente di utilizza, per la ricerca delle soluzioni, il metodo della separazione delle variabili e la serie di Fourier. Commenteremo, alla fine, su quanto la soluzione di questo problema abbia a che fare con la teoria spettrale dell'operatore Laplaciano in $L^2[0, L]$.

Cerchiamo soluzioni cosiddette stazionarie dell'equazione del calore, soluzioni cioè della forma

$$T(t, x) = U(x)V(t).$$

Se T è soluzione dell'equazione del calore si deve avere che

$$\frac{U''(x)}{U(x)} = \frac{V'(t)}{V(t)}$$

che non possono essere uguali per ogni x e per ogni t a meno che entrambe le funzioni non siano uguali ad una costante reale, che indicheremo con $-\lambda$. Le soluzioni di $V'(t) \equiv -\lambda V(t)$, che non crescano esponenzialmente al crescere di t , sono del tipo $V(t) = C e^{-\lambda t}$, con $\lambda \geq 0$ e C costante.

Consideriamo prima le “condizioni al bordo omogenee di Dirichlet”:

$$T(t, 0) = T(t, L) = 0 \implies U(0) = U(L) = 0.$$

Le soluzioni dell'equazione $U''(x) = -\lambda U(x)$, $\lambda > 0$, che si annullano nell'origine e in $x = L$, sono

$$U_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \quad \forall n = 1, 2, \dots$$

con $\sqrt{\lambda} = \frac{n\pi}{L}$.

Sono quindi soluzioni stazionarie dell'equazione del calore le funzioni

$$T_n^D(t, x) = C e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad n = 1, 2, \dots$$

Nella famiglia di soluzioni:

$$T(t, x) = \sum_n c_n T_n^D(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

soddisferanno le condizioni iniziali $T(0, x) = T_0(x)$ le soluzioni per le quali

$$T_0(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right). \quad (5.16)$$

Come sappiamo $\left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ è una base ortonormale in $L^2(0, L)$, (vedi capitolo tre). Esiste quindi una, e una sola, scelta dei coefficienti c_n , data dai coefficienti di Fourier della funzione $T_0(x)$ rispetto alla base (moltiplicati per $\sqrt{L/2}$), per cui la (5.16) risulta verificata.

Consideriamo ora le “condizioni al contorno omogenee di Neumann”

$$\frac{\partial}{\partial x} T(t, 0) = \frac{\partial}{\partial x} T(t, L) = 0 \quad \forall t \implies \frac{dU}{dx}(0) = \frac{dU}{dx}(L) = 0$$

Procedendo come precedentemente, si ottengono le soluzioni stazionarie dell'equazione del calore, con condizioni al bordo di Neumann

$$T_n^N(t, x) = C e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Si noti che per $n = 0$ si ha la soluzione stazionaria $T_0^N(t, x) = C$ che certamente soddisfa l'equazione e le condizioni al bordo.

Ancora, essendo $\frac{1}{\sqrt{L}}$, $\left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ una base in $L^2(0, L)$ esiste una sola scelta dei coefficienti c_n che rende la funzione

$$T(t, x) = \sum_n c_n T_n^D(t, x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

soluzione del problema di Cauchy, con condizioni al bordo omogenee di Neumann, nell'intervallo $[0, L]$.

Vogliamo ora tradurre il risultato appena ottenuto in termini di proprietà spettrali dell'operatore Laplaciano, in $L^2(0, L)$, con condizioni al bordo omogenee di tipo Dirichlet e Neumann.

Il sistema ortonormale $\left\{ w_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ è completo in $L^2(0, L)$ e ogni w_n soddisfa le condizioni al bordo di Dirichlet $w_n(0) = w_n(L) = 0$. L'operatore Δ_D con dominio

$$D_{\Delta_D} = \left\{ \phi \in L^2(0, L) \left| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 \pi^4}{L^4} |(w_n, \phi)|^2 < \infty \right. \right\}$$

e azione

$$\Delta_D \phi = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} (w_n, \phi) w_n$$

è tale che ogni elemento w_n della base è, per definizione, un suo autovettore, relativo all'autovalore $-\frac{n^2 \pi^2}{L^2}$.

L'operatore è quindi autoaggiunto, ha spettro discreto e la sua decomposizione spettrale è esplicita

$$\Delta_D = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{n^2 \pi^2}{L^2} P_n$$

con P_n proiettore sull'elemento n -simo della base: $P_n \phi = (w_n, \phi) w_n$.

In termini dell'operatore Δ_D il problema di Cauchy in $L^2(0, L)$ è quello di trovare la funzione ξ_t da $t = [0, \infty)$ in $L^2(0, L)$ che soddisfa

$$\frac{d\xi_t}{dt} = \Delta_D \xi_t \quad \xi_0 = \xi$$

(dove le condizioni al bordo sono già contenute nella definizione del Laplaciano di Dirichlet).

La conoscenza della decomposizione spettrale dell'operatore permette di dare una forma esplicita della soluzione

$$\xi_t = e^{\Delta_D t} \xi = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} P_n \xi$$

che coincide con quella trovata precedentemente con $\xi = T_0$.

L'operatore Δ_N con condizioni di Neumann si costruisce in maniera analoga utilizzando la base $\frac{1}{\sqrt{L}}$, $\left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ tutta costituita da autovettori di Δ_N relativi agli autovalori 0, $\left\{ -\frac{n^2\pi^2}{L^2} \right\}_{n=1}^{\infty}$.

Equazione di Schrödinger libera. L'equazione di Schrödinger (dove si è posto $m = 1/2$ e $\hbar = 1$) per l'ampiezza di probabilità di una particella quantistica in $\mathbb{R}^n$, non soggetta a forze esterne è:

$$\imath \frac{\partial}{\partial t} \psi = \Delta \psi. \quad (5.17)$$

La soluzione fondamentale relativa all'operatore $\imath \frac{\partial}{\partial t} - \Delta$ può essere cercata tra le distribuzioni temperate in $\mathbb{R}^{n+1}$ che soddisfino:

$$(-k_0 + |k|^2) \hat{F}_S = 1/(2\pi)^{(n+1)/2}. \quad (5.18)$$

Contrariamente al caso dell'equazione del calore il polinomio in $(k_0, k_1, \dots, k_n)$ che moltiplica $\hat{F}_S$ ha una infinità di zeri reali, per $k_0 = |k|^2$. In particolare $(-k_0 + |k|^2)^{-1}$ non è localmente integrabile e non definisce quindi una distribuzione temperata.

Proviamo che $-\frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \left(\frac{1}{k_0 - |k|^2 - \imath\epsilon} \right)$ è una soluzione della (5.18).

Infatti:

$$\left\langle x \frac{1}{x - \imath\epsilon}, \phi \right\rangle = \left\langle \frac{1}{x - \imath\epsilon}, x \phi \right\rangle = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x - \imath\epsilon} \phi(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x) dx \quad (5.19)$$

(giustificare il passaggio del limite sotto segno di integrale).

Tenendo conto della traslazione di $|k|^2$ e della formula (5.5), l'anti-trasformata nella variabile k_0 diventa $-\frac{\sqrt{2\pi}}{\imath} H(t) e^{\imath t |k|^2}$. Utilizzando la formula per la trasformata di Fourier di una gaussiana a esponente immaginario, siamo ora in grado di completare l'anti-trasformata di Fourier ottenendo

$$F_S = \mathcal{F}^{-1} \left[-\frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \left(\frac{1}{k_0 - |k|^2 - \imath\epsilon} \right) \right] = (-\imath)^{1-n/2} \frac{H(t)}{(4\pi t)^{n/2}} e^{-\imath \frac{|x|^2}{4t}}$$

dove si è indicato con $\mathcal{F}^{-1}$ l'anti-trasformata di Fourier.

Un metodo alternativo è quello di cercare la soluzione fondamentale analizzando l'equazione che si ottiene per trasformazione di Fourier nelle sole variabili spaziali $\{x_i\}_{i=1}^n$. Sia $\tilde{F}_S(t; k_1, k_2, \dots, k_n)$ la famiglia di distribuzioni (parametrizzata da t) che soddisfa la

$$\left(\imath \frac{d}{dt} + |k|^2 \right) \tilde{F}_S = \frac{1^{(k)}}{(2\pi)^{n/2}} \delta_0^{(t)} \quad (5.20)$$

che si ottiene dall'equazione per la soluzione fondamentale per trasformazione di Fourier nelle sole variabili spaziali.

Verifichiamo che $\tilde{F}_S \equiv \frac{H(t) e^{\imath |k|^2 t}}{\imath (2\pi)^{n/2}}$ è una soluzione della (5.20). Infatti

$$\begin{aligned} \imath \frac{d}{dt} \left(\frac{H(t) e^{\imath |k|^2 t}}{\imath (2\pi)^{n/2}} \right) &= -\frac{H(t) |k|^2}{\imath (2\pi)^{n/2}} e^{\imath |k|^2 t} + \imath \delta_0^{(t)} \frac{e^{\imath |k|^2 t}}{\imath (2\pi)^{n/2}} \\ &= -|k|^2 \tilde{F}_S + \frac{\delta_0^{(t)}}{(2\pi)^{n/2}} \end{aligned} \quad (5.21)$$

(dove si è utilizzata l'eguaglianza $\alpha(x)\delta_0 = \alpha(0)\delta_0$).

Una soluzione fondamentale è data dunque dall'anti-trasformata, nelle variabili spaziali, della $\tilde{F}_S$:

$$F_S = -\frac{\imath H(t)}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\imath k \cdot x} e^{\imath |k|^2 t} dk. \quad (5.22)$$

Come abbiamo visto in un esempio del paragrafo 5.4, la formula per la trasformata di Fourier di Gaussiane con varianza in $\mathbb{R}^+$:

$$\widehat{e^{-\frac{|x|^2}{2\sigma}}} = \sigma^{n/2} e^{-\frac{|k|^2 \sigma}{2}}$$

rimane vera per distribuzioni gaussiane con varianza puramente immaginaria. Si ha quindi (con $\sigma = (-2 \imath t)^{-1}$):

$$F_S = -\imath \frac{H(t)}{(-4\pi \imath t)^{n/2}} e^{-\imath \frac{|x|^2}{4t}}$$

che è la soluzione fondamentale per l'equazione di Schrödinger.

Come nel caso dell'equazione del calore la soluzione del problema di Cauchy in $\mathbb{R}^n$

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \Delta \psi \quad \psi(0, x) = \psi_0(x)$$

tradotta in soluzione dell'equazione con sorgenti

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \Delta \right) \psi = i \psi_0(x) \delta_0^{(t)}$$

per $t \geq 0$, ha la forma

$$\psi(x, t) = F_S * \left(i \psi_0 \delta_0^{(t)} \right) = \frac{1}{(4\pi i t)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i \frac{|x-y|^2}{4t}} \psi_0(y) dy$$

È facile verificare che, anche nel caso in cui $\psi_0(y)$ sia diversa da 0 in una regione limitata di $\mathbb{R}^n$, $\psi(x, t)$ è diversa da 0, per ogni $t > 0$, in punti comunque lontani dal supporto di ψ_0^2 . Come nel caso dell'equazione del calore la “velocità di propagazione” risulta infinita per le soluzioni dell'equazione di Schrödinger.

Le soluzioni dell'equazione di Schrödinger in un intervallo limitato $[0, L]$ della retta reale, con condizioni omogenee di Dirichlet e di Neumann, si trovano seguendo gli stessi passi fatti nel caso dell'equazione del calore. Sia $\psi(x, t)$ la soluzione del problema di Cauchy per l'equazione di Schrödinger

$$i \frac{\partial \psi}{\partial t} = \Delta \psi \quad \psi(0, x) = \psi_0(x) \quad x \in [0, L]$$

con

$$\begin{cases} \psi(t, 0) = \psi(t, L) = 0 & \forall t \\ \text{oppure} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, 0) = \frac{\partial \psi}{\partial x}(t, L) = 0 & \forall t \end{cases}$$

Le soluzioni stazionarie dell'equazione di Schrödinger sono

$$\psi_n^D(t, x) = C e^{i \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad n = 1, 2, \dots$$

nel caso delle condizioni di Dirichlet e

$$\psi_n^N(t, x) = C e^{i \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos \left(\frac{n\pi}{L} x \right) \quad n = 0, 2, \dots$$

$$2e^{-i \frac{|x-y|^2}{4t}} \neq 0, \quad \forall |x-y| \text{ se } t > 0$$

nel caso delle condizioni di Neumann. La soluzione del problema di Cauchy ha quindi la forma

$$\psi(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{i \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right)$$

per le condizioni di Dirichlet e

$$\psi(t, x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{i \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right)$$

per le condizioni di Neumann. Nelle formule precedenti i coefficienti a_n (risp. c_n) sono i coefficienti di Fourier, moltiplicati per $L/2$, della funzione ψ_0 rispetto alla base di $L^2(0, L)$ $\left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$ (risp. rispetto alla base $\frac{1}{\sqrt{L}}, \left\{ \sqrt{\frac{2}{L}} \cos\left(\frac{n \pi}{L} x\right) \right\}_{n=1}^{\infty}$).

Ancora, come nel caso dell'equazione del calore, la soluzione si può sintetizzare in termini della schiera spettrale degli operatori Laplaciano di Dirichlet e di Neumann Δ_D e Δ_N

$$\begin{aligned} \psi_t &= e^{-i \Delta_D t} \psi_0 = \sum_{n=1}^{\infty} e^{i \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} P_n^{(D)} \psi_0 && \text{nel caso di condizioni di Dirichlet} \\ \psi_t &= e^{-i \Delta_N t} \psi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i \frac{n^2 \pi^2}{L^2} t} P_n^{(N)} \psi_0 && \text{nel caso di condizioni di Neumann} \end{aligned}$$

dove P_n^D e P_n^N sono i proiettori sugli autovettori dell'operatore Laplaciano rispettivamente di Dirichlet e di Neumann.

Equazione delle Onde L'equazione delle onde è presa a modello di equazione di evoluzione in molti campi della Fisica Fondamentale e Applicata. I campi elettrici e magnetici lontani dalle sorgenti, i potenziali elettrodinamici, il campo di velocità delle onde acustiche in un gas, il campo di deformazione in un mezzo elastico etc., soddisfano l'equazione delle onde.

L'equazione delle onde, con sorgenti ρ assegnate, per un campo scalare v ha la forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = \rho$$

dove la costante c ha le dimensioni di una velocità.

Per trovare soluzioni fondamentali temperate F_O in $\mathcal{S}'$ dello spazio-tempo (di dimensione $n+1$) possiamo scrivere l'equazione per la soluzione fondamentale in trasformata di Fourier

$$\left(-\frac{k_0^2}{c^2} + |k|^2\right) \hat{F}_O = \frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \quad \text{con} \quad |k| = \sum_{j=1}^n k_j^2. \quad (5.23)$$

Il polinomio in $k_0, k_1 \dots k_n$ ha però una ipersuperficie di zeri $c|k| = \pm k_0$ e la funzione $(-\frac{k_0^2}{c^2} + |k|^2)^{-1}$ non è localmente integrabile.

È possibile cercare soluzioni della (5.23) come combinazione lineare delle distribuzioni $p.p. \frac{1}{|k| \pm \frac{k_0}{c}}$ e/o $\frac{1}{|k| \pm \frac{k_0}{c} \pm \epsilon}$.

Notiamo ad esempio che

$$(k_0^2 - c^2 |k|^2) \left[\frac{1}{k_0 - c|k| - \epsilon} - \frac{1}{k_0 - c|k| + \epsilon} \right] = 2c|k|$$

da cui discende che una soluzione della (5.23) è

$$\hat{F}_O = -\frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \frac{c}{2|k|} \left[\frac{1}{k_0 - c|k| - \epsilon} - \frac{1}{k_0 - c|k| + \epsilon} \right] \quad (5.24)$$

L'anti-trasformata di Fourier nella sola variabile k_0 della distribuzione (5.24), in analogia a quanto fatto nel caso dell'equazione di Schrödinger, risulta

$$F_O = -\frac{1}{(2\pi)^{(n+1)/2}} \frac{c}{2|k|} \left(-\frac{\sqrt{2\pi}}{i} \right) H(t) (e^{ic|k|t} - e^{-ic|k|t}) \quad (5.25)$$

$$= \frac{c}{(2\pi)^{n/2}} \frac{H(t) \sin(c|k|t)}{|k|} \quad (5.26)$$

Analogamente a quanto fatto nel caso dell'equazione di Schrödinger, possiamo trovare le soluzioni fondamentali dell'equazione delle onde prendendo la trasformata di Fourier nelle sole coordinate spaziali.

L'equazione di cui dobbiamo cercare soluzioni è dunque la

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} + |k|^2 \right) \tilde{F}_O^{(t,k)} = \delta_0^{(t)} \frac{1^{(k)}}{(2\pi)^{n/2}} \quad (5.27)$$

poiché $f_k(t) = A \sin(c|k|t) + B \cos(c|k|t)$, con A e B costanti complesse, è la soluzione generale di

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 f_k}{dt^2} + |k|^2 f_k = 0$$

cercheremo una soluzione della (5.27) nella forma $\tilde{F}_O^{(t,k)} = H(t)f_k(t)$. Il calcolo esplicito delle derivate rispetto al tempo fornisce

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(H(t)f_k) &= H(t) [Ac|k| \cos(c|k|t) - Bc|k| \sin(c|k|t)] + \\ &\quad + \delta_0^{(t)} [A \sin(c|k|t) + B \cos(c|k|t)] \\ &= H(t) [Ac|k| \cos(c|k|t) - Bc|k| \sin(c|k|t)] + B\delta_0^{(t)} \end{aligned}$$

essendo $\sin(\alpha t)\delta_0^{(t)} = 0 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$. La derivata successiva fornisce

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dt^2}(H(t)f_k(t)) &= \delta_0^{(t)} [Ac|k| \cos(c|k|t) - Bc|k| \sin(c|k|t)] \\ &\quad - c^2|k|^2 H(t)f_k(t) + B(\delta_0^{(t)})' \\ &= \delta_0^{(t)} Ac|k| - c^2|k|^2 H(t)f_k(t) + B(\delta_0^{(t)})' \end{aligned}$$

Perché $H f_k$ sia soluzione della (5.27) basterà porre $B = 0$ e $A = \frac{c}{(2\pi)^{n/2}|k|}$.

Una soluzione della (5.27) è quindi

$$\tilde{F}_{O,+}^{(t,k)} = H(t) \frac{c \sin(c|k|t)}{(2\pi)^{n/2}|k|}$$

È facile verificare che anche

$$\tilde{F}_{O,-}^{(t,k)} = -H(-t) \frac{c \sin(c|k|t)}{(2\pi)^{n/2}|k|}$$

è una soluzione fondamentale, essendo $\frac{d}{dt}(-H(-t)) = \delta_0^{(t)}$. Si noti che entrambe le soluzioni sono funzioni limitate e definiscono quindi una distribuzione temperata. Lo stesso varrà quindi per la soluzione fondamentale,

antitrasformata, nelle sole variabili k , della $\tilde{F}_{O,\pm}^{(t,k)}$. Utilizzeremo nel seguito la sola $\tilde{F}_{O,+}^{(t,k)}$ che fornisce la soluzione del problema di Cauchy per tempi positivi, date le condizioni iniziali a $t = 0$. La $\tilde{F}_{O,-}^{(t,k)}$ può essere utilizzata in maniera simile per risolvere il problema di Cauchy per tempi negativi e valori finali assegnati a $t = 0$. I dettagli di questo secondo caso non verranno riportati nel seguito.

Il problema di Cauchy per l'equazione delle onde, in assenza di sorgenti, ha la forma

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = 0 \quad v(0, x) = f(x) \quad \frac{\partial v}{\partial t}(0, x) = g(x). \quad (5.28)$$

La conoscenza della velocità di variazione del campo v a tempo 0 è necessaria perchè l'equazione delle onde fissa solamente l'accelerazione del campo, a ciascun tempo t , in termini della sua configurazione spaziale. Per semplicità assumeremo che le funzioni f e g siano continue e a supporto compatto.

Se le condizioni iniziali vengono inglobate, come termine di sorgente nell'equazione (vedi (5.14)), si ottiene in questo caso

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \Delta v = \frac{1}{c^2} f(x)(\delta_0^{(t)})' + \frac{1}{c^2} g(x)\delta_0^{(t)}$$

ovvero, in trasformata di Fourier delle sole variabili spaziali

$$\frac{1}{c^2} \frac{d^2 \tilde{v}}{dt^2} + |k|^2 \tilde{v} = \frac{1}{c^2} \hat{f}(k)(\delta_0^{(t)})' + \frac{1}{c^2} \hat{g}(k) \delta_0^{(t)}.$$

La soluzione si trova per convoluzione della soluzione fondamentale con il termine di sorgente. Per le proprietà della trasformata di Fourier della convoluzione, la trasformata di Fourier nelle sole variabili spaziali della soluzione sarà

$$\begin{aligned} \tilde{v}(k, t) &= \tilde{F}_{O,+}^{(t,k)} \frac{1}{c^2} \hat{f}(k) \overset{t}{*} (\delta_0^{(t)})' + \tilde{F}_{O,+}^{(t,k)} \frac{1}{c^2} \hat{g}(k) \overset{t}{*} \delta_0^{(t)} \\ &= \frac{d}{dt} \tilde{F}_{O,+}^{(t,k)} \frac{1}{c^2} \hat{f}(k) \overset{t}{*} \delta_0^{(t)} + \tilde{F}_{O,+}^{(t,k)} \frac{1}{c^2} \hat{g}(k) \overset{t}{*} \delta_0^{(t)} \\ &= \frac{\cos(c|k|t)}{(2\pi)^{n/2}} \hat{f}(k) + \frac{\sin(c|k|t)}{(2\pi)^{n/2}c|k|} \hat{g}(k) \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (5.29)$$

dove con $\overset{t}{*}$ si è indicata la convoluzione nella sola variabile temporale e si è utilizzata l'eguaglianza valida per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned}
 \langle H(t) \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} * \delta', \varphi \rangle &= \langle H(t) \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} \otimes (\delta_0^{(\bar{t})})', \varphi(t + \bar{t}) \rangle \\
 &= -\langle H(t) \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha}, \varphi'(t) \rangle \\
 &= -\int_0^\infty \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} \varphi'(t) dt \\
 &= \int_0^\infty \cos(\alpha t) \varphi(t) dt = \langle H(t) \cos(\alpha t), \varphi \rangle
 \end{aligned}$$

Si noti che il risultato è immediatamente ottenibile dall'eguaglianza $T * (\frac{d}{dt}S) = (\frac{d}{dt}T) * S = \frac{d}{dt}(T * S)$, valida per ogni $T, S \in \mathcal{S}'$ con S a supporto compatto, tenuto conto che $\frac{d}{dt}H(t) \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} = H(t) \cos(\alpha t)$ essendo $\delta_0 \frac{\sin(\alpha t)}{\alpha} = 0$.

La (5.29) fornisce quindi una forma esplicita della soluzione del problema di Cauchy in trasformata di Fourier (rispetto alle sole variabili spaziali). Per ottenere un'analogia forma esplicita nelle variabili spaziali è necessario ottenere la trasformata inversa della (5.29).

Caso n = 1 Indichiamo con h_β la funzione limitata $h_\beta(k) = \frac{\cos(\beta|k|)}{(2\pi)^{1/2}} k$, $\beta \in \mathbb{R}$ e calcoliamo l'antitrasformata di Fourier della distribuzione temperata T_{h_β} definita da tale funzione. Per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$ si ha

$$\begin{aligned}
 \langle \check{T}_{h_\beta}, \varphi \rangle &= \langle T_{h_\beta}, \check{\varphi} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^\infty \cos(\beta|k|) \check{\varphi}(k) dk \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{i\beta k} + e^{-i\beta k}}{2} \check{\varphi}(k) dk \\
 &= \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^\infty e^{i\beta k} \check{\varphi}(k) dk + \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^\infty e^{-i\beta k} \check{\varphi}(k) dk \\
 &= \frac{1}{2} \varphi(\beta) + \frac{1}{2} \varphi(-\beta) = \langle \frac{1}{2} \delta_\beta + \frac{1}{2} \delta_{-\beta}, \varphi \rangle
 \end{aligned}$$

che dimostra che $\check{T}_{h_\beta} = \frac{1}{2} \delta_\beta + \frac{1}{2} \delta_{-\beta}$. Analogamente indicando con $\xi_{\gamma t}(k) = \frac{\sin(\gamma|k|t)}{(2\pi)^{1/2} \gamma|k|}$ e notando che $\frac{d}{dt} \xi_{\gamma t}(k) = h_{\gamma t}(k)$, con $\xi_{t=0}(k) = 0$, si ottiene

$$\langle \check{T}_{\xi_\gamma}, \varphi \rangle = \frac{1}{2} \int_0^t [\varphi(\gamma s) + \varphi(-\gamma s)] ds = \frac{1}{2\gamma} \int_{-\gamma t}^{\gamma t} \varphi(s) ds$$

Siamo ora in grado di scrivere la soluzione del problema di Cauchy (5.28) in una dimensione spaziale. Prendendo nelle formule precedenti $\beta = ct$ e $\gamma = c$, nelle ipotesi fatte per le condizioni iniziali, dalla (5.29) si ha

$$v(t, x) = (\check{T}_{h_{ct}} * f)(t, x) + (\check{T}_{\xi_c} * g)(t, x) = \frac{1}{2} f(x-ct) + \frac{1}{2} f(x+ct) + \frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} g(x+s) ds \quad (5.30)$$

Osservazione 11 *Se f e g sono funzioni due volte differenziabili con derivate continue, si può verificare direttamente che le soluzioni trovate sono soluzioni forti del problema di Cauchy per l'equazione delle onde. Abbiamo provato che anche per dati iniziali solo continui le (5.30) sono soluzioni deboli del problema di Cauchy.*

Osservazione 12 *Si noti che il termine $\frac{1}{2} f(x-ct) + \frac{1}{2} f(x+ct)$ descrive un campo che evolve traslando con velocità c verso destra e verso sinistra mantenendo il profilo $\frac{1}{2} f(x)$ inalterato. Se f ha supporto limitato, il supporto di $f(x-ct)$ e di $f(x+ct)$ saranno gli insieme traslati di ct e di $-ct$ del supporto della f . In particolare prima di un tempo finito questo termine risulterà nullo fuori dal supporto di f e dopo un tempo sufficientemente lungo questo termine risulterà nullo in ogni intervallo finito.*

Al contrario il termine $\frac{1}{2c} \int_{-ct}^{ct} g(x+s) ds$, sebbene non abbia velocità di propagazione superiore a c , può rimanere non nullo dopo tempi comunque lunghi, in qualunque intervallo finito della retta reale.

Caso n=3 Il calcolo della antitrasformata della funzione limitata $\frac{\sin(c|k|t)}{(2\pi)^{3/2}c|k|}$ in tre dimensioni spaziali fa uso dell'uguaglianza

$$\frac{\sin(c|k|t)}{(2\pi)^{3/2}c|k|} = \frac{t}{4\pi (2\pi)^{3/2}} \int_{S^{(3)}(1)} e^{i ct \cdot k \cdot z} dS(z)$$

dove ricordiamo che $S^{(3)}(1)$ è la sfera di raggio unitario in tre dimensioni. L'uguaglianza è verificata facilmente tenendo conto che $k \cdot z = |k| |z| \cos \theta = |k| \cos \theta$ per $z \in S^{(3)}(1)$ e che $dS(z) = \sin \theta d\theta d\phi$ $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \phi < 2\pi$. Si ha quindi per ogni $\varphi \in \mathcal{S}$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\sin(c|k|t)}{(2\pi)^{3/2}c|k|} \check{\varphi}(k) dk &= \frac{t}{4\pi (2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \left(\int_{S^{(3)}(1)} e^{i ct k \cdot z} dS(z) \right) \check{\varphi}(k) dk = \\ &= \frac{t}{4\pi (2\pi)^{3/2}} \int_{S^{(3)}(1)} \left(\int_{\mathbb{R}^3} e^{i ct k \cdot z} \check{\varphi}(k) dk \right) dS(z) = \frac{t}{4\pi} \int_{S^{(3)}(1)} \varphi(ct z) dS(z) = \\ &= \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{S^{(3)}(ct)} \varphi(y) dS(y) \equiv \frac{1}{4\pi c^2 t} \langle \delta_{S^{(3)}(ct)}, \varphi \rangle \end{aligned}$$

La antitrasformata della distribuzione in $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ definita dalla funzione limitata $\frac{\sin(c|k|t)}{(2\pi)^{3/2}c|k|}$ è quindi la distribuzione $\frac{1}{4\pi c^2 t} \delta_{S^{(3)}(ct)}$. La antitrasformata di $\frac{\cos(c|k|t)}{(2\pi)^{3/2}}$ si trova semplicemente derivando rispetto al tempo il risultato precedente.

Siamo quindi in grado di scrivere la soluzione del problema di Cauchy (5.28) in tre dimensioni spaziali

$$\begin{aligned} v(t, x) &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \delta_{S^{(3)}(ct)} \overset{x}{*} f \right) + \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \delta_{S^{(3)}(ct)} \overset{x}{*} g \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|z|=ct} f(x+z) dS(z) \right) + \frac{1}{4\pi c^2 t} \int_{|z|=ct} g(x+z) dS(z) \end{aligned}$$

dove con $\overset{x}{*}$ si è indicato la convoluzione rispetto alle sole variabili spaziali.

Esercizio 9 Analizzare la formula appena provata e mostrare che, nelle ipotesi fatte su f e g , solo il primo termine ha un limite non nullo per t che tende a 0, pari a $f(x)$. Mostrare inoltre che, se f e g sono due volte differenziabili allora la soluzione è una soluzione forte del problema di Cauchy.

Osservazione 13 Si noti che la soluzione è nulla in tutti i punti $x \in \mathbb{R}^3$ tali che $x+y \notin \text{supp } f$ e $x+y \notin \text{supp } g$ per nessun $y : |y| = ct$. Contrariamente al caso unidimensionale c non è solo la massima velocità di propagazione. Nel caso tridimensionale la propagazione avviene con velocità c e, successivamente al passaggio della “perturbazione” (campo diverso da zero), il campo torna a valori nulli.

Esercizio 10 Calcolare in $n = 2$ la antitrasformata della distribuzione definita dalla funzione limitata $\frac{\sin(c|k|t)}{2\pi c|k|}$ e provare che il problema di Cauchy bidimensionale ha come soluzione

$$v(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{t}{2\pi} \int_{|z| \leq 1} \frac{f(x + ctz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz \right) + \frac{t}{2\pi} \int_{|z| \leq 1} \frac{g(x + ctz)}{\sqrt{1 - |z|^2}} dz$$

Mostrare che, come nel caso unidimensionale e diversamente dal caso tridimensionale, la velocità di propagazione non può eccedere c , ma può essere inferiore a c .

Bibliografia

- [Sc] L. Schwartz, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*, Hermann, 1965.
- [BB] Ph. Blanchard and E. Brüning, *Mathematical Methods in Physics*, Birkhäuser, 2003.
- [St] R.S. Strichartz, *A guide to Distribution Theory and Fourier Transforms*, World Scientific, 2003.