Il Calcolo numerico

1 Errori e loro propagazione

1.1 L'analisi numerica

L'*analisi numerica* o *calcolo numerico* si occupa dei metodi risolutivi di problemi matematici dei cui dati siano noti i valori numerici.
I metodi dell'analisi numerica sono algoritmi che permettono di calcolare i valori numerici delle soluzioni di dati problemi.
(A differenza ad es. dell'analisi matematica che utilizza come dati spesso simboli.)
Distinguiamo metodi esatti e metodi approssimati.

- metodi esatti: sono quelli che permettono di ottenere soluzioni esatte;
- metodi approssimati: sono quei metodi che forniscono soluzioni approssimate.

Tale distinzione é solo teorica. Infatti raramente i dati iniziali sono esatti, perché frutto della misurazione di grandezze fisiche, e perció approssimati, oppure perché numeri irrazionali che possono essere introdotti nei calcoli solo mediante approssimazioni.
Pertanto la *teoria degli errori* é basilare per l'analisi numerica.

1.2 Approssimazioni ed errori

c: valore esatto di una certa quantitá . (Ad es. π).
a: approssimazione di c. (Ad es. 3,14).
Ogni volta che si considera al posto di un numero c una sua approssimazione a si commette un errore

$$e = c - a.$$

Si ha:

- *approssimazione per difetto di* c se $a < c$;
- *approssimazione per eccesso di* c se $a > c$.

Piú semplicemente diremo che a *approssima* c e si scrive $c \simeq a$.

Esempio 1.1 *Sia* $c = \pi$, $a = 3,14$. *L'errore commesso é* $e = \pi - 3,14 = 0,0015..$

1.3 Errore assoluto e maggiorazione dell'errore

Si definisce *errore assoluto*

$$e_{ass} = |c - a|$$

Poiché non possiamo conoscere il valore esatto di c ne segue che neppure e_{ass} puó essere esattamente determinato, ma sará possibile avere solo una sua maggiorazione $e_{ass} \leq \epsilon$. Quindi

$$|c - a| \leq \epsilon$$

Ad esempio $\pi - 3,14 = 3,14159... < 0,0016$.
Da $|c - a| \leq \epsilon$ segue:

$$a - \epsilon \leq c \leq a + \epsilon.$$

Si usa in tal caso scrivere $c = a \pm \epsilon$ e dire che a é un valore approssimato di c *a meno di* ϵ

Esempio 1.2
- *Dire che cm* $110,4$ *é un'approssimazione di c con un errore non superiore a* $0,1$ *cm vuol dire che il valore esatto c é cm* $110,3 \leq c \leq 110,5$ *cm.*
- *Se sostituisco* $1/3$ *con* $0,33$ *l'errore commesso é* $1/3-0,33 = 1/300$ *e quindi in questo caso é esattamente valutabile.*

1.4 Errore relativo

L'errore assoluto non é molto indicativo della bontá di un'approssimazione. Per esempio se si commette un errore di 1 cm nel misurare la lunghezza di un tavolo la misurazione é stata effettuata in modo grossolano. Se invece si commette l'errore di 1 m nel misurare la distana terra-luna la misurazione é stata effettuata in maniera accurata. L'errore quindi deve essere proporzionale alla grandezza da valutare. Si introduce quindi l'*errore relativo*.

$$e_r = \frac{e_{ass}}{|c|} = \frac{|c - a|}{|c|}.$$

Poiché il valore di c non é esatto neppure l'errore relativo é esattamente valutabile, si userá quindi una sua maggiorazione δ. Quindi $e_r \leq \delta$.
Nell'esempio precedente $a = 110,4$ cm, $\quad |c - a| \leq \epsilon = 0,1$ cm $\quad c \simeq a$ allora

$$e_r \leq 0,1/110,4 \simeq 0,000905.. < \delta$$

ove $\delta = 0,001$. Quindi $e_r \leq 0,001$ che scritto in percentuale é minore di $0,1\%$.

1.5 Dall'errore relativo all'errore assoluto e viceversa.

ϵ é una maggiorazione dell'errore assoluto $|c - a|$, tuttavia nel linguaggio corrente é esso stesso inteso come errore assoluto quindi $\epsilon \simeq |c - a|$. Analogamente δ é una maggiorazione dell'errore relativo $e_{ass}/|c|$, tuttavia nel linguaggio corrente si intende $\delta \simeq e_{ass}/|c|$. Ma $e_{ass} \simeq \epsilon, \quad |a| \simeq |c|$ pertanto otteniamo:

$$\delta \simeq \frac{e_{ass}}{|c|} \simeq \frac{\epsilon}{|a|}$$

che permette di passare dall'errore assoluto a quello relativo e viceversa.

Esempio 1.3 *$a = 2,72$, $\delta = 0,07\%$ calcolare l'errore assoluto. Risulta $\delta = 0,07/100 = 0,0007$. Quindi*

$$\epsilon = |a|\delta \simeq 2,72 \cdot 0,0007 = 0,019.. < 0,002.$$

Pertanto $c = 2,72 \pm 0,002$.

1.6 Intervallo di indeterminazione

c : grandezza incognita.

$$a' \leq c \leq a''$$

L'intervallo $[a', a'']$ é detto *intervallo di indeterminazione di c.* Il suo punto medio

$$a = \frac{a' + a''}{2}$$

é un'approssimazione di c con un errore assoluto $\epsilon = \frac{a''-a'}{2}$. Quindi $c = a \pm \epsilon$.

1.7 valore troncato all'n-esima cifra decimale

Per troncare un valore c all'n-esima cifra decimale basta considerare soltanto le prime n cifre decimali di c. In tal caso l'errore commesso é minore di 10^{-n}.

Esempio 1.4 *1,414 é il valore troncato alla terza cifra decimale di $\sqrt{2}$. L'errore assoluto commesso é $\leq 10^{-3}$.*

1.8 valore arrotondato all'n-esima cifra decimale

Per arrotondare un valore c all'n-esima cifra decimale si considerano le prime $n+1$ cifre decimali di c. Se l'ultima é ≥ 5 si arronda l'n-esima cifra per eccesso aumentandola di una unitá . Se invece l'(n+1)-esima cifra é < 5 si prende c troncato all'n-esima cifra. L'errore assoluto commesso é $\leq 0,5 \cdot 10^{-n}$.

1.9 Propagazione degli errori

Quando si eseguono con valori approssimati i risultati sono anch'essi affetti da errori. Tale fenomeno é noto come *propagazione degli errori e dipende anche dal tipo e dal numero di operazioni eseguito.*

1.9.1 Somma e sottrazione

Siano:

$$a' \leq c \leq a''$$

e

$$b' \leq d \leq b''$$

Sommando membro a membro ho:

$$a' + b' \leq c + d \leq a'' + b''$$

Un'approssimazione di c e d sono rispettivamente:

$$a = \frac{a' + a''}{2}, b = \frac{b' + b''}{2}$$

i rispettivi errori commessi sono al piú :

$$\epsilon(c) = \frac{a'' - a'}{2}, \epsilon(d) = \frac{b'' - b'}{2}.$$

Analogamente quando a $c + d$ sostituisco $\frac{a''+b''+a'+b'}{2} = a + b$ commetto un errore dato da:

$$\epsilon(c + d) = \frac{(a'' + b'') - (a' + b')}{2} = \epsilon(c) + \epsilon(d).$$

Pertanto:
L'errore assoluto della somma di due o piú valori approssimati é la somma dei loro errori assoluti.
Per quanto riguarda gli errori relativi supponendo che $\delta(c) = \delta(d) = \delta$ risulta:

$$\delta(c + d) = \delta(c) = \delta(d)$$

pertanto:
La somma di due o piú quantitá approssimate, tutte affette dallo stesso errore relativo δ é affetta dal medesimo errore relativo δ.
N.B. Gli errori assoluti si sommano anche nella differenza di due o piú quantitá approssimate.

1.9.2 Moltiplicazione

Siano

$$a' \leq c \leq a''$$

e

$$b' \leq d \leq b''$$

tutte quantitá positive. Moltiplicando

$$a'b' \leq cd \leq a''b''$$

Assumiamo come approssimazioni di c e d i valori medi dei loro intervalli. I rispettivi errori commessi sono:

$$\epsilon(c) = \frac{a'' - a'}{2}, \epsilon(d) = \frac{b'' - b'}{2}.$$

L'errore commesso quando a cd sostituisco il valore medio dell'intervallo $[a'b', a''b'']$ é :

$$\epsilon(cd) = \frac{a''b'' - a'b'}{2} \simeq d\epsilon(c) + c\epsilon(d)$$

Dividendo tale formula per cd ottengo:

$$\delta(cd) \simeq \delta(c) + \delta(d)$$

Esempio 1.5 *Sia* $r = cm78,23$*,* $h = cm131,15$*,* $\delta = 0,5\%$ *in entrambi i casi. Calcolare* $V = 1/3\pi r^2 h$ *e gli errori commessi.*
E' $\delta = 0,5\% = 0,005$*. Scelto* $\pi = 3,1416$ *é* $\epsilon(\pi) = 0,5{\cdot}10^{-4}$ *e* $\delta(\pi) = (0,5{\cdot}10^{-4})/(3,1416) = 0,000016$*. Il volume risulta* $V = 840513,298$ *e l'errore relativo é*

$$0,005 + 0,005 + 0,005 + 0,000016 = 0,015$$

L'errore assoluto di V *é quindi* $840513,298 \cdot 0,015 = 13000$.

N.B. E' preferibile calcolare gli errori relativi dei singoli fattori di un prodotto e poi sommarli per ottenere l'errore relativo del prodotto, anziché procedere con gli errori assoluti.

1.9.3 Divisione

Siano

$$a' \leq c \leq a''$$

e

$$b' \leq d \leq b''$$

tutte quantitá positive.
Allora é :

$$1/b'' \leq 1/d \leq 1/b'$$

quindi moltiplicando membro a membro

$$a'/b'' \leq c/d \leq a''/b'.$$

Analogamente a quanto visto per la moltiplcazione si calcola che l'errore commesso approssimando c/d al valore medio del suo intervallo é :

$$\epsilon(\frac{c}{d}) \simeq \frac{d\epsilon(c) + c\epsilon(d)}{d^2}$$

mentre

$$\delta(\frac{c}{d}) = \delta(c) + \delta(d).$$

Nel caso particolare $c/d = 1/d$ é

$$\delta(1/d) = \delta(d)$$

Esempio 1.6 *Valutiamo l'errore del reciproco di* $\sqrt{2}$ *servendoci del suo valore approssimato alla seconda cifra decimale* $d = 1,41$. *Poiché* $\epsilon(d) = 0,5 \cdot 10^{-2}$ *é* $\delta(d) = 0,5 \cdot 10^{-2}/1,41 = 0,0036$.
Quindi considerando $1/1,41 = 0,7092...$ *commetto un errore uguale a* $\delta(d)$.

- PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI NELLE OPERAZIONI ELEMENTARI
- ERRORI ASSOLUTI
  1) Somma e sottrazione $\epsilon(c \pm d) = \epsilon(c) + \epsilon(d)$
  2) Moltiplicazione $\epsilon(cd) \simeq d\epsilon(c) + c\epsilon(d)$
  3) Divisione $\epsilon(c/d) \simeq \frac{d\epsilon(c)+c\epsilon(d)}{d^2}$
- ERRORI RELATIVI
  1) Somma e sottrazione $\delta(c \pm d) = \delta(c) = \delta(d)$ se $\delta(c) = \delta(d)$
  2) Moltiplicazione $\delta(cd) \simeq \delta(c) + \delta(d)$
  3) Divisione $\delta(c/d) \simeq \delta(c) + \delta(d)$

2 Problema diretto e problema inverso

Dati *Longrightarrow* Calcoli *Longrightarrow* Risultato (Errori nei dati) (Propagazione errori) (Errore nel risultato)
Problema diretto. Assegnati i dati iniziali di una certa computazione mediante valori approssimati valutare l'errore da cui é affetta l'approssimazione del risultato.

Primo metodo) Si eseguono i calcoli mediante i valori approssimati dei dati, individuando un'approssimazione del risultato. Si determina quindi una valutazione dell'errore assoluto o relativo da cui é affetto il risultato servendosi della tabella.

Secondo metodo) Si cerca di individuare un intervallo di indeterminazione del risultato, a partire da approssimazioni per difetto o per eccesso dei dati iniziali.

Problema inverso. Assegnato l'errore massimo tollerabile nel risultato, determinare quali errori si possono ammettere nelle approssimazioni dei dati.

Esempio 2.1 Metodo Diretto. *Si deve valutare la superficie totale di un parallelepipedo rettangolo. Le misure dei dati affette da un errore relativo dello* $0,8\%$ *sono :*

$$57,3 \;\; 84,2 \;\; 59,8$$

La superficie totale é :

$$2 \cdot 57,3 \cdot 84,2 + 2 \cdot 57,3 \cdot 59,8 + 2 \cdot 84,2 \cdot 59,8 = 26572,72$$

Questo risultato é affetto da un errore relativo dell' $1,6\%$ *in quanto ciascun prodotto ha un errore relativo pari alla somma degli errori relativi quindi* $0,8\% + 0,8\% = 1,6\%$*, la somma, poiché ciascun addendo ha lo stesso errore relativo, é affetta dallo stesso errore relativo* $1,6\%$.

Esempio 2.2 *(*Metodo inverso.) Si vuole determinare la quantitá

$$\alpha = \pi + \sqrt{5} + log10$$

con un errore non superiore a 10^{-2}. Con quante cifre decimali occorre eseguire i calcoli ? Supponiamo che ogni addendo sia effetto da uno stesso errore ϵ. Poiché nella somma si accumulano gli errori assoluti si ha:

$$\epsilon(\alpha) = 3\epsilon < 10^2$$

pertanto $\epsilon < 10^{-2}/3$ quidni $\epsilon < 1/300 < 1/1000$ quindi devo considerare π, $\sqrt{5}$ e $log10$ con tre cifre decimali.

$$\alpha \simeq 3,141 + 2,236 + 2,302 = 7,679$$

3 Risoluzione approssimata di equazioni

4 Introduzione

In questo capitolo ci occuperemo della risoluzione approssimata di equazioni algebriche e trascendenti in una sola incognita che si presentano nella forma $f(x) = 0$ e $x = g(x)$.

Esempio 4.1 *Consideriamo*

$$xlogx - 7 = x^2$$

Nella prima forma abbiamo $xlogx - 7 - x^2 = 0$ *nella seconda forma* $x = \frac{7+x^2}{logx}$

5 Interpretazione grafica di un'equazione

Risolvere un'equazione del tipo $f(x) = 0$ equivale a determinare le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 0 \end{cases}$$

Cioé graficamente equivale a determinare le intersezioni del grafico di $f(x)$ con l'asse delle x.

Esempio 5.1

$$\sqrt{x} - x + 1 = 0$$

si puó scrivere come

$$\sqrt{x} = x - 1$$

che equvale a trovare le soluzioni del sistema:

$$\begin{cases} y = \sqrt{x} \\ y = x - 1 \end{cases}$$

L'ascissa del punto di intersezione tra le due curve é l'unica soluzione dell'equazione iniziale.

6 Separazione delle radici

Prima di passare alla risoluzione vera e propria dell'equazione occorre compiere l'operazione di *separazione delle radici*.
Separare le radici significa individuare per ciascuna radice x_i, un'intervallo $[a_i, b_i]$ che la contenga e non contenga alcuna altra radice.

Esempio 6.1 *Separare graficamente le radici dell'equazione*

$$x^2 - 2 - log x = 0$$

che equivale a $x^2 - 2 = logx$ *ossia al sistema:*

$$\begin{cases} y &= x^2 - 2 \\ y &= logx \end{cases}$$

Dal grafico si vede che vi sono due soluzioni, una nell'intervallo $[0, 1]$ *e l'altra nell'intervallo* $[\sqrt{2}, 2]$.

7 Teoremi di esistenza e unicitá

Le considerazioni intuitive che risultano dall'interpretazione grafica possono essere rese piú precise con i seguenti teoremi.

Theorem 7.1 *(di esistenza della radice) Se* $f(x)$ *é continua nell'intervallo chiuso* $[a, b]$ *e* $f(a)f(b) < 0$ *allora* $f(x) = 0$ *ha almeno una radice interna a tale intervallo.*

Esempio 7.2

$$x^2 - 2 - logx = 0$$

quindi

$$f(x) = x^2 - 2 - logx.$$

La $f(x)$ *é definita e continua per* $x > 0$. *Consideriamo l'intervallo chiuso* $[1/e^2, 1]$. *Risulta* $f(1) < 0$ *e* $f(e^{-2}) > 0$ *e quindi esiste almeno una radice di* $f(x) = 0$ *in* $[e^{-2}, 1]$.

Theorem 7.3 *(primo teorema di unicitá della radice) Sia* $f(x)$ *una funzione definita e continua in* $[a, b]$ *e derivabile in* (a, b). *Sia inoltre* $f(a)f(b) < 0$ *e* $f'(x) \neq 0$ *in* (a, b). *Allora esiste un'unica soluzione dell'equazione* $f(x) = 0$ *in* (a, b).

Esempio 7.4 *Consideriamo* $f(x) = xe^x - 1$. *Graficamente si nota che esiste una radice di* $f(x) = 0$ *in* $[0, 1]$. *Inoltre* $f(0) < 0$, $f(1) > 0$ *ed* $f'(x) = (1 + x)e^x$. *Essendo* $f'(x) > 0$ *per* $x > -1$ *sará* $f'(x) > 0$ *in* $(0, 1)$. *Pertanto esiste un'unica soluzione dell'equazione data.*

Theorem 7.5 *(secondo teorema di unicitá della radice) Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in $[a, b]$ e derivabile due volte in (a, b). Sia inoltre $f(a)f(b) < 0$ e $f''(x)$ sia in (a, b) sempre positiva o sempre negativa. Allora esiste un'unica soluzione dell'equazione $f(x) = 0$ in (a, b).*

Esempio 7.6

$$x^2 - 2 - logx = 0$$

quindi

$$f(x) = x^2 - 2 - logx.$$

La $f(x)$ é definita e continua per $x > 0$. Consideriamo l'intervallo chiuso $[1/e^2, 1]$. Risulta $f(1) < 0$ e $f(e^{-2}) > 0$ e quindi esiste almeno una radice di $f(x) = 0$ in $[e^{-2}, 1]$. Inoltre $f'(x) = 2x - 1/x, \quad f''(x) = 2x + 1/x^2$.
Quindi $f''(x) > 0$ per ogni $x \in (1/e^2, 1)$ e per il secondo teorema di unicitá esiste un'unica soluzione in tale intervallo.

8 Il metodo di bisezione

Una volta visto che esiste un'unica soluzione di $f(x) = 0$ in un certo intervallo (a, b) ci preoccupiamo di determinarne una sua approssimazione. Esistono vari metodi, cominciamo con il *metodo di bisezione.*
Sia $f(x)$ una funzione continua in $[a, b]$ e $f(a)f(b) < 0$. Si supponga inoltre che l'equazione $f(x) = 0$ abbia una soluzione in (a, b). Costruiamo allora una successione $\{a_n\}$ di approssimazioni per difetto e $\{b_n\}$ di approssimazioni per eccesso della soluzione nel modo seguente:
Poniamo $a_0 = a, b_0 = b$.
Consideriamo il punto medio dell'intervallo (a, b) $(a + b)/2$. Se $f((a + b)/2)$ ha lo stesso segno di $f(a)$ poniamo

$$a_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad b_1 = b_0$$

ed il nuovo intervallo da prendere in considerazione in cui cadrá la radice di $f(x) = 0$ é quindi $[a_1, b_1]$ che risulta di ampiezza metá del precedente.
Se $f((a + b)/2)$ ha lo stesso segno di $f(b)$ poniamo

$$b_1 = \frac{a_0 + b_0}{2}, \quad a_1 = a_0$$

ed il nuovo intervallo da prendere in considerazione in cui cadrá la radice di $f(x) = 0$ é quindi $[a_1, b_1]$ che risulta di ampiezza metá del precedente.
Dopo n iterazioni del procedimento otteniamo un intervallo $[a_n, b_n]$ in cui cadrá la radice di $f(x) = 0$ di ampiezza $b - a/2^n$. Quindi la radice é determinata a meno di $b - a/2^n$ che posso rendere piccolo quanto voglio.

Pertanto se voglio determinare la soluzione con tre cifre decimali esatte il numero delle iterazioni sará determinato da $b - a/2^n < 10^{-3}$
Ovviamente se ad un certo passo n risulta $f((a_n + b_n)/2) = 0$ ho determinato la radice dell'equazione.

N.B. Il metodo di bisezione é il piú generale e si puó applicare ad una piú ampia classe di funzioni rispetto ai metodi successivi.

9 Il metodo delle secanti

Sia $f(x)$ una funzione definita e continua in $[a, b]$ ed $f(a)f(b) < 0$. Si supponga inoltre che in (a, b) $f''(x)$ esista e sia sempre positiva o sempre negativa. Come é noto esiste un'unica soluzione $\overline{x}$ dell'equazione $f(x) = 0$ in (a, b). Per determinarne un'approssimazione tracciamo il grafico di $y = f(x)$ e congiungiamo i punti $A(a, f(a))$ e $B(b, f(b))$ con un segmento. L'ascissa x_1 del punto di intersezione di AB con l'asse delle x puó essere considerata una prima approssimazione di $\overline{x}$.
Per fissare le idee supponiamo $f(a) < 0$, $f(b) > 0$ e $f''(x) > 0$ in (a, b). In tali ipotesi sará $f(x_1) < 0$, pertanto $\overline{x} \in (x_1, b)$ e i nuovi estremi da congiungere saranno $A'(x_1, f(x_1))$ e B. La retta $A'B$ intersecherá l'asse delle x in un punto di ascissa x_2 in cui $f(x_2) < 0$ ed il

nuovo intervallo in cui cade $\overline{x}$ sará (x_2, b).

Iterando il processo costruiamo una successione crescente $\{x_n\}$ di approssimazioni per difetto di $\overline{x}$ data da:

$$\begin{cases} x_0 & = & a \\ x_{n+1} & = & x_n - \frac{b-x_n}{f(b)-f(x_n} f(x_n). \end{cases}$$

E' importante rilevare che le nostre considerazioni sono state fatte nel caso in cui $f''(x) > 0$ in (a, b), $f(a) < 0$ ed $f(b) > 0$. Le stesse formule sono valide anche per il caso $f''(x) < 0$ in (a, b), $f(a) > 0$ ed $f(b) < 0$.
Infatti in entrambi i casi si mantiene fisso il punto B, mentre il punto A varia (osserviamo che il punto fisso é quello in cui la f ha lo stesso segno della f'')
Si puó osservare inoltre che il processo é valido anche nel caso in cui $f''(x) > 0$ in (a, b) e $f(a) > 0$ ed $f(b) < 0$ oppure $f''(x) < 0$ in (a, b) e $f(a) < 0$ ed $f(b) > 0$. In questi ultimi due casi le formule da utilizzare sono diverse in quanto il punto A é fisso e B varia (ancora una volta il punto fisso é quello in cui la f ha lo stesso segno della f'').

$$\begin{cases} x_0 & = & b \\ x_{n+1} & = & x_n - \frac{a-x_n}{f(a)-f(x_n)} f(x_n). \end{cases}$$

Esempio 9.1 $f(x) = senx + x - 1$ *in* $[0, 1]$.
Verifichiamo le ipotesi del secondo teorema di esistenza e unicitá .
$f(0) < 0$, $f(1) > 0$, $f'(x) = cosx + 1$, $f''(x) = -senx$.
Nell'intervallo in esame risulta $f''(x) < 0$ *sempre. Resta fisso il punto* $A(0, -1)$ *e quindi le formule da utilizzare sono:*

$$\begin{cases} x_0 & = & 1 \\ x_{n+1} & = & x_n - \frac{0-x_n}{f(0)-f(x_n)} f(x_n). \end{cases}$$

Si ottiene $x_1 = 0,543044$,.....,$x_6 = 0,510973$, $x_7 = 0,5109073$. *Pertanto si puó assumere il valore* $0,510973$ *come una'approssimazione esatta fino alla sesta cifra decimale.*