Spazi vettoriali

November 17, 2017

Chapter 1

Matrici

1.1 Introduzione

Dati m ed n due numeri interi positivi e considerati mn numeri reali si chiama **matrice** rettangolare di tipo (m, n) l'insieme degli nm numeri disposti in una tabella:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Se $m = n$ la matrice si dice **quadrata** di ordine n.
Una matrice A sará anche denotata con $A = (a_{ij})$.
Data $A = (a_{ij})$ la sua **trasposta** è $A_t = (a_{ji})$.

Una matrice quadrata A di ordine n è **triangolare superiore** se sono nulli tutti gli elementi sotto la diagonale principale.
Una matrice quadrata A di ordine n è **triangolare inferiore** se sono nulli tutti gli elementi sopra la diagonale principale.
Una matrice quadrata A è **simmetrica** se $a_{ij} = a_{ji}$ ossia $A = A_t$.
Una matrice quadrata A è **emisimmetrica** se $a_{ij} = -a_{ji}$.
Ne segue che tutti gli elementi della diagonale principale di una matrice emisimmetrica sono uguali a zero.

1.2 Algebra delle matrici

Siano $A = (a_{ij})$ e $B = (b_{ij})$ due matrici.

Somma di matrici.

L'operazione di addizione tra due matrici si puó definire solo se esse hanno lo stesso numero di righe e colonne. Sia dunque $M_{n,m}$ l'insieme delle matrici di tipo (m, n) allora si definisce $A + B = (a_{ij} + b_{ij})$. $(M_{n,m}, +)$ è un gruppo abeliano.

Prodotto matrice per scalare

$$\alpha A = A\alpha = (\alpha a_{ij})$$

Le proprietá di cui gode sono:

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$$

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$$

$$1A = A$$

Prodotto tra matrici.

Il prodotto tra matrici si definisce riga per colonna solo quando A e di tipo (m, s) e B è di tipo (s, n) e risulta AB di tipo (m, n).

Esso gode delle seguenti proprietá :

$$A(B + C) = AB + AC$$

$$(B + C)A = BA + CA$$

$$(AB)C = A(BC)$$

Inoltre $(AB)_t = B_t A_t$.

Nell'insieme M_n delle matrici quadrati quadrate di ordine n la matrice I avente $a_{ii} = 1$ e $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$ è detta **matrice unitaria** ed è l'elemento neutro rispetto al prodotto.

1.3 Struttura algebrica delle matrici

Sia $M_{m,n}$ l'insieme delle matrici di tipo (m, n) su un campo K. Tale insieme si puó strutturare a spazio vettoriale su K con le operazioni di somma tra matrici e di prodotto di uno scalare per una matrice sopra definite. Esso risulta ovviamente isomorfo allo spazio vettoriale K^{mn}.

Se $m = n$, ossia nell'insieme M_n delle matrici quadrate di ordine n su K, somma e prodotto sono operazioni sempre possibili e interne.

M_n dotato di tali operazioni è un anello non commutativo.

Se consideriamo in M_n soltanto le matrici a determinta diverso da zero ossia $GL(n, K)$, esso, rispetto alle operazioni di somma e prodotto tra matrici risulta un corpo.

1.4 Determinanti

Il determinante è un'applicazione che va da M_n insieme delle matrici quadrate di ordine n ad $\mathbf{R}$. Si definisce per induzione su n ponendo $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ se $n = 2$ e per $n = 3$ definendo con la regola di Sarrus o Laplace.

Per la regola di Laplace, con n in generale, si considerano i complementi algebrici degli elementi della matrici. Data $A = (a_{ij})$ di ordine n il **complemento algebrico** A_{ij} di a_{ij} è il determinante della matrice ottenuta da A cancellando la riga i e la colonna j, preceduto dal segno $+$ se $i + j$ è pari, dal segno $-$ se $i + j$ è dispari.

Il determinante di una matrice di ordine n è dato, con la formula di Laplace da:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$

o equivalentemente

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{mj}A_{mj}.$$

Proprietá .

- Se tutti gli elementi di una linea sono nulli, il determinante è nullo;
- $|I| = 1$;
- $det[A_1, \ldots, \alpha A_i, \ldots, A_n] = \alpha det[A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n]$;
- $det[A_1, \ldots, A_i + B, \ldots, A_n] = det[A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n] + det[A_1, \ldots, B, \ldots, A_n]$;
- se due linee parallele sono uguali o proporzionali il determinante è nullo;
- se si scambiano tra loro due righe o due colonne il determinante cambia di segno;
- $det[A_1, \ldots, A_i, \ldots, A_n] = det[A_1, \ldots, A_i + \alpha A_k, \ldots, A_n]$;
- se una linea è combinazione lineare di altre linee ad essa parallele il determinante è nullo.

$$det(AB) = det(A)det(B)$$

Osservazione 1.4.1 *Il determinante di una matrice triangolare è uguale a prodotto dei suoi elementi diagonali.*

L'inversa di una matrice si puó definire solo se la matrice è quadrata ed inoltre sussiste il seguente:

Teorema 1.4.2 *Una matrice quadrata A di ordine n ammette inversa sse $|A| \neq 0$.*

Inoltre $|A^{-1}| = 1/|A|$

Se A è una matrice quadrata con determinante diverso da zero risulta $A^{-1} = (A_{ji}/|A|) = 1/|A|A_t^*$ ove $A^* = (A_{ij})$.

Rango.

Il **rango** di una matrice A è il numero massimo di linee parallele indipendenti o equivalentemente il massimo ordine dei minori non nulli che si possono estrarre da A. Ove per **minore** si intende il determinante di una matrice quadrata estratta da A.

Osservazione 1.4.3 *Una matrice A ha rango r se:*

- *esiste un minore di A di ordine r diverso zero;*
- *tutti i minori di A di ordine $> r$ sono nulli.*

In pratica si utilizza il teorema degli orlati.

Teorema 1.4.4 (degli orlati) *Il rango di una matrice A è r sse:*

- *esiste un minore A' di A di ordine r diverso zero;*
- *tutti i minori di A di ordine $r + 1$ ottenuti orlando in ogni possibile modo il minore A' con righe e colonne di A sono nulli.*

Chapter 2

Sistemi lineari

Un sistema lineare è un insieme di m equazioni lineari (di primo grado) nelle n incognite $x_1, \ldots, x_n$.

Esso è **omogeneo** se i termini noti $b_1 = b_2 = \cdots = 0$ ed esso ammette sempre almeno la soluzione $(0, 0, \ldots, 0)$.

Un qualunque sistema lineare ha tre possibilitá : non ha soluzioni, ha un unica soluzione, ha infinite soluzioni.

Un sistema quadrato di n equazioni in n incognite con il determinante della matrice A dei coefficienti diverso da zero ha un'unica soluzione data dalla formula di Cramer:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{|A|}, i = 1, \ldots, n$$

ove Δ_i è il determinante della matrice ottenuta da A sostituendo la colonna $i-$esima con la colonna dei termini noti del sistema.

Teorema 2.0.1 (Rouchè -Capelli) *Un sistema lineare ha soluzione sse la matrice dei coefficienti e quella completa hanno lo stesso rango.*

Per trovare le soluzioni di un sistema lineare, dopo aver verificato con Rouchè -Capelli che vi siano soluzioni, detto r il rango di A, se A' è un minore di ordine r di A si riduce il sistema cancellando le $m - r$ equazioni non facenti parti di A' e si considerano come termini noti le $n - r$ incognite non facenti parti di A'. A questo punto utilizzando Cramer ottengo un'unica soluzione dipendente da $n - r$ parametri ossia ∞^{n-r} soluzioni.

Un altro modo di procedere è il seguente:

Metodo di eliminazione di Gauss. Se ad un'equazione di un sistema si sostituisce quella che si ottiene sommando ad essa un'altra equazione del sistema, eventualmente dopo averle moltiplicate anche per una costante si ottiene un sistema equivalente. Si utilizza ció nel metodo di Gauss per ottenere un sistema equivalente ad dato avente tutti zero sotto la diagonale principale.

Osservazione 2.0.2 *Nel caso di sistemi lineari omogenei con m equazioni ed n incognite l'insieme delle soluzioni risulta un sottospazio vettoriale di $\mathbf{R}^n$.*

Chapter 3

Spazi vettoriali

Sia $(K, +, \cdot)$ un campo i cui elementi sono detti **scalari** e V un insieme i cui elementi sono detti **vettori** con due operazioni:

$$+V \times V \to V$$

interna di addizione tra vettori e l'altra

$$* : K \times V \to V$$

esterna di moltiplicazione scalare-vettore che associa ad ogni coppia (α, v) il vettore $\alpha * v$.

Diremo che $(V, K, +, *)$ è uno **spazio vettoriale** sul campo K se:

- $(V, +)$ è un gruppo abeliano;
- $\alpha * (v + w) = \alpha * v + \alpha * w$
- $(\alpha + \beta) * v = \alpha * v + \beta * v$
- $1 * v = v$ (ove 1 è l'unitá del campo)
- $\alpha * (\beta * v) = (\alpha\beta) * v$

Esempio 3.0.1 *Sia K un campo, $K^n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n)\}_{a_i \in K}$ l'insieme delle n-ple ordinate di elementi di K con l'usuale addizione tra n-ple e la moltiplicazione per uno scalare è uno spazio vettoriale.*

Sia $M_{n,m}(K)$ l'insieme delle matrici di tipo (m, n) ad elementi in un campo K. Esso è uno spazio vettoriale rispetto all'addizione tra matrici e alla moltiplicazione per uno scalare.

Sia V uno spazio vettoriale su un campo K e sia $W \subseteq V$. W è un **sottospazio** di V se:

- $v, w \in W$ allora $v + w \in W$;
- $\alpha \in K, v \in W$ allora $\alpha * v \in W$

Dati h vettori $v_1, \dots v_h$ in uno spazio vettoriale V il vettore $w = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_h v_h$ è detto una **combinazione lineare di** $v_1, \dots, v_h$.

Si dice anche che il vettore w **dipende linearmente** da $v_1, \dots, v_h$ e gli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_h$ sono detti i **coefficienti della combinazione lineare.**

Dati h vettori $v_1, \dots, v_h$ essi si dicono **linearmente indipendenti** se per ogni scelta degli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_h$, non tutti nulli, risulta

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_h v_h \neq 0.$$

I vettori $v_1, \dots, v_h$ si dicono **linearmente dipendenti** se non sono indipendenti ossia se esistono degli scalari $\alpha_1, \dots, \alpha_h$, non tutti nulli, risulta

$$\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_h v_h = 0.$$

Se $v_1, \dots, v_h$ sono h vettori di V l'insieme $W = \{\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_h v_h\}$ al variare di $\alpha_i \in K$ è un sottospazio detto **sottospazio generato** dai vettori $v_1, \dots, v_h$ e si denota $W = [v_1, \dots, v_h]$.

Se $V = [v_1, \dots, v_h]$ allora $\{v_1, \dots, v_h\}$ è detto un **sistema di generatori** di V.

Sussiste la seguente proposizione:

Proposizione 3.0.2 *I vettori $v_1, \dots, v_h$ sono linearmente dipendenti sse uno di essi dipende dai rimanenti*

Ne segue:

Proposizione 3.0.3 *I vettori $v_1, \dots, v_h$ sono linearmente indipendenti sse nessuno di essi dipende dai rimanenti.*

Inoltre

Proposizione 3.0.4 *Se tra i vettori $v_1, \dots, v_h$ figura il vettore nullo allora essi sono dipendenti. Se due dei vettori $v_1, \dots, v_h$ sono uguali o proporzionali allora essi sono dipendenti.*

Proposizione 3.0.5 *Se i vettori $v_1, \dots, v_h$ sono indipendenti e il vettore $v_{h+1} \notin [v_1, \dots, v_h]$ allora $v_1, \dots, v_h, v_{h+1}$ sono indipendenti.*

Sia V uno spazio vettoriale e $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. B è una **base** per V se è un sistema di generatori indipendenti di V.

Si dimostra che tutte le basi di uno spazio vettoriale V hanno lo stesso numero n di vettori detto **dimensione** di V.

Proposizione 3.0.6 *Tutte le basi di uno spazio vettoriale V hanno lo stesso numero di vettori.*

Siano V_n e V'_n due spazi vettoriali della stessa dimensione n sullo stesso campo K. Un **isomorfismo** tra tali spazi è una biezione $f : V \to V'$ tale che

$$f(v + w) = f(v) + f(w) \qquad\qquad f(\alpha v) = \alpha f(v)$$

Un isomorfismo f tra due spazi vettoriali V e V' manda il vettore nullo nel vettore nullo e conserva la dipendenza e l'indipendenza dei vettori.

Proposizione 3.0.7 *$v_1, \ldots, v_h$ sono indipendenti sse $f(v_1), \ldots, f(v_h)$ sono indipendenti.*

Da ció segue che due spazi vettoriali sullo stesso campo K tra loro isomorfi hanno la stessa dimensione. Infatti per la proposizione precedente una base B di V va, tramite l'isomorfismo f, in una base B' di V'.

Viceversa si puó dimostrare che se V e V' sono due spazi vettoriali della stessa dimensione sullo stesso campo K essi sono isomorfi.

Sia $B = (e_1, \ldots, e_n)$ una base ordinata di V (**riferimento**) ogni vettore v si puó esprimere come combinazione lineare di B

$$v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n.$$

I coefficienti $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sono univocamente determinati da v. Infatti se fosse $v = \beta_1 e_1 + \cdots \beta_n e_n$ allora avremmo $(\alpha_1 - \beta_1)e_1 + \cdots + (\alpha_n - \beta_n)e_n = 0$ ed essendo $e_1, \ldots, e_n$ indipendenti segue $\alpha_1 - \beta_1 = \cdots = \alpha_n - \beta_n = 0$ cioè $\alpha_1 = \beta_1, \cdots, \alpha_n = \beta_n$.

Quindi $f : V_n \to K^n$ tale che ad ogni vettore $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$ associa la n-pla $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ è un'applicazione.

I coefficienti $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ sono detti le **componenti** di v nel riferimento B. Tale applicazione f è un isomorfismo tra V_n e K^n detto **isomorfismo coordinazione**. Ne segue che due spazi vettoriali di dimensione n sullo stesso campo sono tra loro isomorfi essendo entrambi isomorfi a K^n.

3.1 Applicazioni lineari

Siano V e V' due spazi vettoriali sullo stesso campo K. Un'applicazione $f : V \to V'$ è **applicazione lineare** o **omomorfismo** se:

$$f(v + w) = f(v) + f(w) \qquad\qquad f(\alpha v) = \alpha f(v).$$

Ovviamente se f è lineare e biettiva essa è un isomorfismo.

Ad esempio $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ tale che $f(x, y, z) = (x, y)$ è un'applicazione lineare.

Definizione 3.1.1 *Data $f : V \to V'$ applicazione lineare. L'***immagine** *di f, e il* **nucleo** *di f sono:*

$$Imm(f) = \{v' \in V'| \ \exists v \in V \ \ f(v) = v'\}$$
$$Ker(f) = \{v \in V | f(v) = 0.\}$$

Nell'esempio precedente $Imm(f) = \mathbf{R}^2$ e $Ker(f) = \{(0, 0, z)\}_{z \in \mathbf{R}}$.

Risulta $Imm(f)$ sottospazio di V' e $Ker(f)$ sottospazio di V. Si definisce **rango** di f la dimensione di $Imm(f)$ e **nullitá** di f

Sussistono le seguenti proposizioni:

Proposizione 3.1.2 *L'applicazione lineare f è iniettiva sse $Ker(f) = \{0\}$.*

Proposizione 3.1.3

$$dimV = dim\ Ker(f) + dim\ Imm(f)$$

Proposizione 3.1.4 *Un'applicazione lineare f trasforma vettori dipendenti in vettori dipendenti. Se f è iniettiva trasforma anche vettori indipendenti in vettori indipendenti.*

Fondamentale è la seguente proprietá delle applicazioni lineari:

Proposizione 3.1.5 *Un'applicazione lineare $f : V_n \to V'_m$ è determinata dai valori che essa assume su una fissata base.*

Dim. Sia $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V_n e sia v un qualsiasi vettore di V. Allora $v = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. Quindi $f(v) = f(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 f(e_1) + \cdots + \alpha_n f(e_n)$. Quindi se conosco $f(e_1), \ldots, f(e_n)$ allora conosco $f(v)$ per ogni $v \in V$. □

Pertanto se conosco i valori che f assume su una base, la f è univocamente determinata.

Facciamo ora vedere che ad ogni applicazione lineare $f : V_n \to V'_m$, fissata una base B in V e una base B' in V', è possibile associare una matrice di tipo (m, n). Viceversa fissata una matrice di tipo (m, n) e fissate due basi B di V e B' di V' resta individuata un'applicazione lineare $f : V \to V'$.

Siano V_n e V'_m due spazi vettoriali su uno stesso campo K, $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ una base di V, $B' = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$ una base di V' ed $f : V \to V'$ un'applicazione lineare. Allora sará :

$$f(e_1) = \alpha_1 e'_1 + \alpha_2 e'_2 + \cdots \alpha_m e'_m$$
$$f(e_2) = \beta_1 e'_1 + \beta_2 e'_2 + \cdots \beta_m e'_m$$

....

$$f(e_n) = \gamma_1 e'_1 + \gamma_2 e'_2 + \cdots \gamma_m e'_m$$

e la matrice associata ad f nelle basi B e B' è :

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \cdots & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \gamma_2 \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots \\ \alpha_m & \beta_m & \cdots & \gamma_m \end{pmatrix}.$$

Tale matrice è detta la **matrice che rappresenta f nelle basi B e B'.**

In particolare se $V' = V$ ossia $f : V rightarrow V$ è un'applicazione lineare di V in sè essa è detta anche un **endomorfismo** di V. In tal caso ci conviene fissare un'unica base $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ sia per il dominio che per il codominio ottenendo, come sopra, la matrice A quadrata di ordine n, che rappresenta f nella base B.

Esempio 3.1.6 *Sia $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ tale che $f(x, y) = (4x-2y, 2x+y)$. Calcolare la matrice A di f nella base $B = \{(1, 1), (-1, 0)\} = \{e_1, e_2\}$.*

$f(1, 1) = (2, 3) = 3e_1 + e_2$*;* $f(-1, 0) = (-4, -2) = -2e_1 + 2e_2$ *quindi A è :*

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Sussiste inoltre il seguente teorema:

Teorema 3.1.7 *Dato V spazio vettoriale, $f : V \to V$ applicazione lineare, una base B di V ed A la matrice associata a f nella base B. Allora per ogni $v \in V$ si ha che*

$$A[v]_B = [f(v)]_B$$

ove $[v]_B$ è il vettore delle componenti di v nella base B e $[f(v)]_B$ è il vettore delle componenti di $f(v)$ nella base B.

Ad esempio preso $v = (5, 7) = 7e_1 + 2e_2$ risulta $f(v) = (6, 17) = 17e_1 + 11e_2$
Quindi $[v]_B = (7, 2)_t$ e $[f(v)]_B = (17, 11)_t$ e si ha:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 \\ 11 \end{pmatrix}$$

Lo stesso vale anche per le applicazioni lineari $f : V_n \to V'_m$. Ossia detta A la matrice che rappresenta f nelle basi B e B' risulta

$$A[v]_B = [f(v)]_{B'}.$$

3.2 Cambiamento di basi

Siano $B = \{e_1, \dots, e_n\}$ e $B' = \{e'_1, \dots, e'_n\}$ due basi di V_n. Allora i vettori di B' si possono esprimere come combinazione lineare dei vettori di B. Quindi

$$e'_1 = \alpha_1 e_1 + \cdots + \gamma_1 e_n$$

$$e'_2 = \alpha_2 e_1 + \cdots + \gamma_2 e_n$$

....

$$e'_n = \alpha_n e_1 + \cdots + \gamma_n e_n$$

e

$$P = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & ... & \alpha_n \\ ..... & ... & ... & ... \\ \gamma_1 & \gamma_2 & .... & \gamma_n \end{pmatrix}$$

è la matrice dal cambiamento di base da B a B'. La matrice P è invertibile e la sua inversa P^{-1} è la matrice del cambiamento di base da B' a B.

Avendo un vettore $v \in V$ scritto come combinazione lineare della base B ossia $v = v_1 e_1 + \cdots v_n e_n$, come si fa a scrivere lo stesso vettore v come combinazione lineare della base B' ?

Basta considerare la matrice P^{-1} ottenendo

$$[v]_{B'} = P^{-1}[v]_B$$

Esempio 3.2.1 *Siano $B = \{(1,0),(0,1)\}$ e $B' = \{(1,1),(-1,0)\}$ due basi di $\mathbf{R}^2$ allora la matrice P del cambiamento di base da B a B' è :*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La sua inversa è

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ed è la matrice del cambiamento di base da B' a B.

Se $v = (5,2)$ è un vettore, scritto ovviamente nella base canonica, allora le sue componenti rispetto alla base B' sono:

$$P^{-1}(5,2)_t = (2,-3)_t.$$

3.3 La formula di Grassmann

E' facile vedere che dato uno spazio vettoriale V, in esso l'intersezione di sottospazi è un sottospazio. Non è cosí per l'unione. Allora se H e T sono due sottospazi di V considerati i sottospazi $H \cap T$ e

$$H + T = [H \cup T]$$

detto sottospazio **congiungente** H e T sussiste il seguente:

Teorema 3.3.1 (Formula di Grassmann)

$$dim(H + T) + dim(H \cap T) = dimH + dimT.$$